

Міністерство освіти і науки України
Чорноморський національний університет імені Петра Могили

**Чуйко Г. П., Дворник О. В.,
Дарнапук Є. С., Бойко А. П.**

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ З ПРАКТИКУМОМ В MAPLE 2021

Навчальний посібник



Миколаїв – 2024

Рекомендовано до друку вченою радою Чорноморського національного університету імені Петра Могили (протокол № 10 від 28 вересня 2023 р.)

Рецензенти:

Дейбук В. Г., д-р фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри комп'ютерних систем Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Кондратенко Ю. П., д-р техн. наук, професор, Заслужений винахідник України, член-кореспондент Королівської Європейської Академії докторів наук (RAED – Barcelona 1914), академік Академії наук суднобудування України, Лауреат премії ВСНТО, Фулбрайтівський науковець, завідувач кафедри інтелектуальних інформаційних систем ЧНУ імені Петра Могили.

Мельничук С. В., д-р фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри комп'ютерних систем Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Нужний С. М., канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерних технологій та інформаційної безпеки Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

Фісун М. Т., д-р техн. наук, професор, професор кафедри інженерії програмного забезпечення Чорноморського національного університету імені Петра Могили.

Ц 75

Цифрова обробка сигналів з практикумом в Maple 2021 : навч. посіб. / О. В. Дворник, Г. П. Чуйко, Є. С. Дарнапук, А. П. Бойко. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2024. – 256 с.

ISBN 978-966-336-457-5

У навчальному посібнику представлені основи цифрової обробки сигналів та інформації, зокрема засобами системи комп'ютерної математики Maple 2021. Наведено математичні апарати перетворення Фур'є і Лапласа. Розглядаються основи статистичного аналізу дискретних сигналів, а також техніка спектрального аналізу з використанням алгоритмів швидкого перетворення Фур'є. Значну увагу приділено: застосуванню автокореляції та крос-кореляції рядів даних; моделюванню аналогових і цифрових фільтрів; методам вейвлет-аналізу одно- та двовимірних сигналів, зокрема аудіосигналів та зображень, та іншим методам фільтрації і очищення сигналів. Акцент зроблений на візуалізації результатів моделювання, обробці та аналізі сигналів та даних. У декількох практичних роботах представлені результати наукових досліджень та/або математичного моделювання авторів посібника з галузі комп'ютерної обробки та аналізу біомедичних сигналів та інформації.

Навчальний посібник призначений для студентів старших курсів інженерних спеціальностей, зокрема фахівців з комп'ютерної інженерії, автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій, медичного приладобудування, а також стане в нагоді студентам медичних спеціальностей. Також матеріали цього посібника можуть бути корисні для аспірантів, науковців та викладачів, які працюють з Maple.

УДК 004.67:519.85](075.8)

ISBN 978-966-336-457-5

© Чуйко Г. П., Дворник О. В.,
Дарнапук Є. С., Бойко А. П., 2024
© Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2024

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ	7
ПЕРЕДМОВА	8
1 ТЕОРІЯ 1	11
1.1 Функціональний принцип класифікації методів вимірювань. Методи біомедичних досліджень.....	11
1.1.1 Інформація, дані та сигнал.....	11
1.1.2 Біологічна та біомедична інженерія.....	13
1.1.3 Біологічний та біомедичний сигнали	14
1.1.4 Методи біомедичних досліджень.....	15
1.2 Вступ до цифрової обробки сигналів.....	16
1.2.1 Принципи цифрової обробки сигналів.....	16
1.2.2 Основні застосування ЦОС.....	17
1.2.3 Основні перетворення.....	17
1.3 Цифрова обробка біомедичних сигналів. Теорема відліків.....	17
1.3.1 Дискретизація. Квантування	17
1.3.2 Теорема Шеннона-Найквіста-Котельникова	19
1.3.3 Приклади обробки цифрових сигналів.....	20
1.4 Питання для засвоєння	22
2 ТЕОРІЯ 2	23
2.1 Статистичні методи аналізу. Автокореляційний та крос-кореляційний аналіз сигналів	23
2.1.1 Статистичні характеристики.....	23
2.1.2 Статистичний аналіз електроміограм	28
2.1.3 Кореляція, автокореляція та крос-кореляція	30
2.2 Варіабельність ритмів: кардіоінтервалографія.....	32
2.3 Питання для засвоєння	34
3 ТЕОРІЯ 3	36
3.1 Спектральні методи аналізу сигналів	36
3.1.1 Фур'є-аналіз	36
3.1.2 Вейвлет-аналіз	37
3.2 Перетворення Фур'є та їх різновид.....	38
3.2.1 Неперервне перетворення Фур'є.....	38
3.2.2 Дискретне перетворення Фур'є.....	39
3.3 Питання для засвоєння	40
4 ТЕОРІЯ 4	42
4.1 Перетворення Лапласа та передавальні функції приладів.....	42
4.1.1 Динамічні системи.....	43
4.1.2 Передавальна та імпульсно-перехідна функції	43
4.2 АФЧХ та діаграми Найквіста	44
4.2.1 Графіки Боде	45
4.2.2 Кроковий електричний двигун	45
4.3 Питання для засвоєння	47
5 ТЕОРІЯ 5	48
5.1 Методи фільтрації сигналів	48
5.2 Аналогові та цифрові частотні фільтри	49
5.3 Принципи проектування цифрових фільтрів	51
5.4 Питання для засвоєння	53

6	ТЕОРІЯ 6	54
6.1	Вейвлети	54
6.1.1	Вейвлет-перетворення	55
6.1.2	Процедура дискретного вейвлет-перетворення	55
6.2	Методи вейвлет-аналізу, очищення та стискання одновимірних біомедичних сигналів	56
6.3	Питання для засвоєння	59
7	ТЕОРІЯ 7	60
7.1	Візуалізація біомедичних сигналів	60
7.1.1	Біомедичні зображення	60
7.1.2	Цифрова обробка зображення	61
7.2	Кольорове картування біоелектричної активності мозку	62
7.2.1	Альфа-ритм	63
7.2.2	Перспективи ЕЕГ у клінічному застосуванні	64
7.3	Питання для засвоєння	65
8	ТЕОРІЯ 8	66
8.1	Програмні пакети для роботи з двовимірними зображеннями	66
8.1.1	DICOM	66
8.1.2	PACS	66
8.1.3	Програмний пакет PACS	67
8.2	Обробка зображень, побудова гістограм	68
8.2.1	Спектральний аналіз зображень	68
8.2.2	Фільтрація	70
8.2.3	Сегментація та контури зображень	71
8.3	Питання для засвоєння	71
9	ТЕОРІЯ 9	73
9.1	Двовимірні вейвлети: принципи та методи вейвлет-аналізу зображень	73
9.1.1	Вейвлет-перетворення зображень	73
9.1.2	Перетворення Хаара	74
9.2	Аналітична обробка та стискання зображень	76
9.2.1	Формат JPEG та JPEG2000	77
9.2.2	Комп'ютерна обробка медичних зображень	77
9.3	Питання для засвоєння	78
10	ПРАКТИКА 1	80
10.1	Дискретизація аналогових сигналів та частота Найквіста	80
10.1.1	Вступ і постановка задачі	80
10.1.2	Моделювання аналогового сигналу	80
10.1.3	Дискретизація аналогових сигналів	82
10.2	Фур'є спектри дискретизованих та аналогових сигналів	84
10.2.1	Спектральний аналіз дискретизованого сигналу	84
10.2.2	Спектральний аналіз аналогового сигналу	88
10.3	Питання для засвоєння	89
10.4	Індивідуальні завдання	89
11	ПРАКТИКА 2	91
11.1	Статистичний аналіз електронейроміограм	91
11.1.1	Попередні налагодження	91
11.1.2	Імпорт даних з .txt в Excel	91
11.1.3	Завантаження даних з Excel у Maple 2021	92
11.1.4	Первинні сигнали	93
11.1.5	Статистичний аналіз ЕМГ здорової людини	94
11.1.6	Статистичний аналіз ЕМГ хворого на нейропатію	96

11.2	Автокореляційні функції та спектральний аналіз ЕМГ	97
11.2.1	Здорова людина	97
11.2.2	Пацієнт, хворий на нейропатію.....	102
11.3	Питання для засвоєння	107
11.4	Індивідуальні завдання	108
12	ПРАКТИКА 3	109
12.1	Спектральний аналіз часових послідовностей на прикладі спостережень сонячної активності.....	109
12.1.1	Сонячні цикли	109
12.1.2	Дані спостережень за сонячними плямами	109
12.1.3	АКФ даних спостережень та її аналіз	112
12.1.4	Команда FindPeakPoints з пакету SignalProcessing	114
12.1.5	Спектральний аналіз ряду чисел Вольфа	115
12.2	Фільтрація масиву даних сонячних плям.....	116
12.3	Питання для засвоєння	118
12.4	Індивідуальні завдання	119
13	ПРАКТИКА 4	120
13.1	Аналогові частотні фільтри 1-го порядку	120
13.1.1	Фільтр нижніх частот	120
13.1.2	Фільтр верхніх частот	123
13.2	Фільтри 2-го та вищих порядків	125
13.2.1	Фільтр НЧ 2-го порядку.....	126
13.2.2	Загальні властивості аналогових фільтрів 2-го порядку.....	129
13.2.3	Фільтри вищих порядків.....	130
13.3	Фільтри спеціальних типів	132
13.3.1	Фільтри Баттерворта.....	132
13.3.2	Фільтри Бесселя.....	136
13.4	Питання для засвоєння	140
13.5	Індивідуальні завдання	140
14	ПРАКТИКА 5	141
14.1	Проектування цифрового КІХ-фільтру	141
14.1.1	Вхідні параметри для розрахунків	141
14.1.2	Розрахунки параметрів цифрового фільтру	142
14.2	Тестування цифрового КІХ-фільтру	144
14.3	Питання для засвоєння	146
14.4	Індивідуальні завдання	146
15	ПРАКТИКА 6	148
15.1	Вейвлети Хаара та їх застосування.....	148
15.2	Вейвлет-аналіз АТ та частоти пульсових хвиль.....	149
15.2.1	Вхідні сигнали та їх статистичні характеристики	149
15.2.2	Вейвлет-аналіз, стискання та очищення сигналів	157
15.3	Кореляції первинних, очищених і згладжених сигналів	168
15.3.1	Розрахунки кореляції рядів даних СТ, ДТ і ЧП.....	168
15.3.2	Візуалізація результатів регресійного та кореляційного аналізу рядів даних ДТ та ЧП.....	169
15.4	Питання для засвоєння	171
15.5	Індивідуальні завдання	172
16	ПРАКТИКА 7	173
16.1	Програмні засоби роботи з файлами зображень	173
16.1.1	Команди вводу/виводу.....	173
16.1.2	Застосування ДВП до зображення	174

16.1.3	Команди перегляду файлів та гістограм інтенсивності	176
16.1.4	Команди управління кольорами.....	178
16.1.5	Аналіз зображень.....	178
16.1.6	Трансформування зображень.....	179
16.2	Гістограми яскравості та конволюційні маски.....	181
16.2.1	Маніпуляції з інтенсивностями (яскравістю) пікселів	181
16.2.2	Конволюційні маски	183
16.3	Питання для засвоєння	186
16.4	Індивідуальні завдання	186
17	ПРАКТИКА 8	187
17.1	Принципи та методи вейвлет-аналізу зображень.....	187
17.2	Вейвлет-аналіз, очищення та стискання зображення	188
17.2.1	Процедури вейвлет-аналізу та синтезу двовимірних зображень в Maple	189
17.2.2	Приклад очищення та стискання зображення	190
17.3	Питання для засвоєння	195
17.4	Індивідуальні завдання	195
18	ПРАКТИКА 9	196
18.1	Запис дискретизованого аудіо-сигналу у Maple.....	196
18.1.1	Цифровий запис звуку та його відтворення. Мовлення	196
18.1.2	Запис власного мовлення.....	197
18.1.3	Фільтр Баттерворта для очищення аудіо-сигналу	204
18.2	Вейвлет-аналіз, очищення та стискання аудіо-сигналу.....	209
18.3	Питання для засвоєння	216
18.4	Індивідуальні завдання	217
	ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ	218
	ДОДАТКИ.....	227
	Додаток А. Maple-код графіків до Теорії 1.....	227
	Додаток Б. Maple-код графіків до Теорії 2.....	230
	Додаток В. Maple-код графіків до Теорії 3.....	234
	Додаток Г. Maple-код графіків до Теорії 4.....	235
	Додаток Д. Maple-код графіків до Теорії 5.....	238
	Додаток Е. Maple-код графіків до Теорії 9.....	239
	Додаток Ж. Maple-код графіків до Практики 6.....	240
	ПЕРЕЛІК РИСУНКІВ	241
	ПЕРЕЛІК ТАБЛИЦЬ	247
	ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	248

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ

DP	– Diastolic pressure (діастолічний тиск)		
EHR	– Electronic health record (електронний медичний запис)		
FIR	– Finite Impulse Response (кінцева імпульсна характеристика)		
HDO	– Healthcare delivery organization (організація надання медичних послуг)		
HIS	– Health information systems (медичні інформаційні системи)		
HL7	– Health Level 7 (медичний стандарт сьомого рівня)		
HR	– Heart rate (частота пульсу)		
IIR	– Infinite Impulse Response (безкінечна імпульсна характеристика)		
IRF	– Impulse Response Function (імпульсна перехідна функція)		
MIPS	– Million instructions per second (мільйон операцій в секунду)		
mmHg	– Millimeter of mercury (мм рт. ст)		
PHI	– Protected health information (захищена медична інформація)		
RIS	– Radiology information systems (радіологічні інформаційні системи)		
SNR	– Signal to noise ratio (відношення корисного сигналу до рівня шумів)		
SP	– Systolic pressure (сistolічний тиск)		
VNA	– Vendor neutral archive (незалежний постачальник архівів)		
АКФ	– Автокореляційна функція	KIX	– Кінцева імпульсна характеристика
АМ	– Амплітудно-модульований	КТ	– Комп'ютерна томографія
АМО	– Амплітуда моди	ЛАФЧХ	– Логарифмічна амплітудно-фазова частотна характеристика
АТ	– Артеріальний тиск	ЛАЧХ	– Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика
АФЧХ	– Амплітудно-фазова частотна характеристика	ЛЗ	– Лаплас-зображення
АФ	– Автокореляційна функція	МЕГ	– Магнито-енцефалографія
АЦП	– Аналого-цифровий перетворювач	МІТ	– Масачусетський технологічний університет
АЧХ	– Амплітудно-частотна характеристика	МЗ	– Медичне зображення
БІ	– Біологічна інженерія	МНК	– Метод найменших квадратів
БІХ	– Безкінечна імпульсна характеристика	МО	– Мода кардіоінтервалів
БМІ	– Біомедична інженерія	МРТ	– Магніто-резонансна томографія
БМЗ	– Біомедичне зображення	НВП	– Неперервне вейвлет-перетворення
БМС	– Біомедичні сигнали	ОП	– Операційний підсилювач
БС	– Біологічний сигнал	ПАПР	– Показник адекватності процесів
ВВ	– Випадкова величина	ПЕТ	– Позитронна емісійна томографія
ВК	– Вейвлет-коефіцієнти	ПК	– Персональний комп'ютер
ВСП	– Варіабельність серцевих ритмів	ПЛ	– Перетворення Лапласа
ВП	– Вейвлет-перетворення	ПФ	– Перетворення Фур'є
ВІР	– Вегетативний показник ритму	ПХ	– Перетворення Хаара
ВХ	– Вейвлети Хаара	СА	– Спектральний аналіз
ДВП	– Дискретне вейвлет-перетворення	СКВІД	– Сенсори на контактах Джозефсона
ДПФ	– Дискретне перетворення Фур'є	СКМ	– Система комп'ютерної математики
ДСТУ	– Державний стандарт України	СР	– Серцевий ритм
ДТ	– Діастолічний тиск	ССС	– Серцево-судинна система
ЕЕГ	– Електроенцефалографія	СТ	– Систолічний тиск
ЕКГ	– Електрокардіографія	ФЧХ	– Фазово-частотна характеристика
ЕМГ	– Електроміографія	ЦОС	– Цифрова обробка сигналів
ЕНМГ	– Електронейромиографія	ЦС	– Цифровий сигнал
ЕОГ	– Електроокулограма	ЧП	– Частота пульсу
ІВР	– Індекс вегетативної рівноваги	ШПФ	– Швидке перетворення Фур'є
КІГ	– Кардіоінтервалографія	ЯМР	– Ядерний магнітний резонанс

ПЕРЕДМОВА

Галузь методів обробки сигналів, представлених у цифровій формі, за допомогою комп'ютерів або спеціалізованих процесорів надзвичайно активно розвивається і потребує адаптації до сучасних вимог як у проектуванні, так і в освітньому процесі. Розробку новітніх методів перетворення, обробки та аналізу цифрових сигналів, удосконалення вже існуючих методів та їх впровадження у вигляді алгоритмів для обчислювальних пристроїв дослідники та інженери починають здійснювати у потужних системах комп'ютерної математики (СКМ). Можна вказати на Maple, MATLAB, Mathematica та інші подібні до них СКМ [1], як комерційні, так і з відкритим кодом.

Дедалі актуалізується цифрова обробка сигналів для потреб медичної галузі. Особлива увага при цьому надається реалізації добре відомих методів (переважно числових) в обчислювальних процесах різноманітних комерційних пристроїв масмаркету, як от: смартфонів, смарт-годинників, фітнес-браслетів, «розумних» навушників та багатьох інших. Окрім того, виробництво сучасної медичної техніки все більше тяжіє до розробки високотехнологічних приладів та апаратів клінічного застосування.

Варто зазначити, що розвиток індивідуальної, орієнтованої на конкретного пацієнта, медицини великою мірою базується на цифровій обробці біомедичних сигналів та супровідної оцифрованої інформації, зокрема результатів самостійного моніторингу стану здоров'я людини, як активного користувача смарт-пристроїв та різноманітних програмних застосунків у них. Однак, говорити про те, що індустрія комерційних пристроїв, часто з не надто надійними і недостатньо апробованими методами обробки показників роботи організму людини, найближчими роками набуде революційного зросту поки що варто з обережністю. Отже, галузь цифрової обробки біомедичних сигналів та інформації сьогодні є однією з пріоритетних у світовій інженерії.

Використанню такого потужного інструменту, як СКМ Maple 2021, для задач цифрової обробки біомедичних сигналів та інформації, представленої у цифровому вигляді, та адаптації вже відомих методів до цифрової обробки присвячений цей навчальний посібник.

У посібнику автори відобразили частину власних багаторічних наукових досліджень у галузі комп'ютерного моделювання та комп'ютерної обробки біомедичних сигналів та інформації, а також власного досвіду роботи в СКМ Maple. Деякі з цих результатів викладені у наукових статтях і тезах конференцій [2]–[6] та у монографії [7]. Зокрема, у монографії [7] («Методи обробки медичних сигналів засобами комп'ютерної математики Maple») представлені приклади використання Maple 2021 у наукових дослідженнях саме для задач обробки, аналізу та візуалізації цифрових сигналів [7].

Для додаткового читання радимо такі видання: Оппенгейм А. «Цифрова обробка сигналів» [8], а також нові, суттєво доповнені видання цієї книги; Наконечний А. Й. та ін. «Цифрова обробка сигналів» [9], [10]; Ушенко Ю. О. та ін «Основи та методи цифрової обробки сигналів» [11]. Також рекомендуємо самостійно відшукати видання: «Застосування цифрової обробки сигналів за ред. Э. Оппенгейма; Айфічер Е. «Цифрова обробка сигналів: практичний підхід»; Юкио Сато «Без паніки! Цифрова обробка сигналів»; Хеммінг Р. В. «Цифрові фільтри»; Лайонс Р. «Цифрова обробка сигналів». Велику кількість спеціалізованих джерел англійською мовою читач може знайти за пошуком в інтернеті, подекуди навіть у відкритому доступі.

На відкритому ресурсі MIT (Massachusetts Institute of Technology) можна знайти матеріали до навчальних курсів з цифрової обробки сигналів (Digital Signal Processing) [12], починаючи з першого у своєму роді навчального курсу від зачинателя цього напрямку професора MIT Алана Оппенгейма (Alan Oppenheim) та його колег [13]–[15] до сучасних, які присвячені більш прикладним аспектам у певних галузях, як от [16]–[18], зокрема й обробці біомедичних сигналів [19]–[21].

Окрім того у вільному доступі є навчальний курс «Digital Signal Processing Specialization» на платформі Coursera [22].

Для початківців радимо звернутися до ознайомчого курсу з СКМ Maple, викладеного доступно для розуміння мовою, з простими прикладами та рішеннями конкретних прикладних задач, а також великою кількістю індивідуальних завдань за авторством Баганова Є. О. [23]. Окрім того, в інтернеті можна знайти книги професора Д'яконова В. П., присвячені користуванню Maple різних версій для рішення різноманітних задач та поясненню потужних можливостей цієї СКМ для дослідницьких та інженерних задач.

Наш посібник складається з двох частин: теоретичної та практичної. Теоретична частина представлена 9-ма тематичними блоками, сформованими за матеріалами лекцій, які були прочитані у Чорноморському національному університеті ім. Петра Могили у 2018–2022 навчальних роках студентам факультету комп'ютерних наук. Практична частина також складається з 9-ти практичних робіт, представлених у Maple 2021, з прикладами, питаннями для самоперевірки та індивідуальними завданнями.

Слова подяки

Ольга Дворник висловлює щиросердну подяку своєму братові Артуру Дворнику і друзям у Німеччині: Гідо Фрішу (Guido Frisch) і Даніеле Прібе (Daniela Priebe), підтримка яких під час написання рукопису посібника була надзвичайно цінною для неї.

Також О. Дворник виражає глибоку вдячність громадянам та керівництву Федеративної Республіки Німеччина, без підтримки яких у важкі часи війни в Україні цей рукопис навряд чи б з'явився, оскільки був написаний під час її перебування у Німеччині.

Danksagung

Olga Dvornyk bedankt sich aufrichtig bei ihrem Bruder Artur Dvornyk und ihren Freunden in Deutschland: Guido Frisch und Daniela Priebe, deren Unterstützung beim Verfassen des Manuskripts des Handbuchs für sie äußerst wertvoll war.

O. Dvornyk drückt ihren tiefen Dank auch den Bürgern und der Regierung der Bundesrepublik Deutschland aus, ohne deren Unterstützung in den schwierigen Zeiten des Krieges in der Ukraine dieses Manuskript nicht entstanden und erschienen wäre.

ТЕОРІЯ

ПИТАННЯ

- 1 ➡ Функціональний принцип класифікації методів медико-біологічних вимірювань. Методи медичних досліджень.
- 2 ➡ Вступ до цифрової обробки сигналів.
- 3 ➡ Цифрова обробка біомедичних сигналів. Теорема відліків.

1.1 ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ПРИНЦИП КЛАСИФІКАЦІЇ МЕТОДІВ ВИМІРЮВАНЬ. МЕТОДИ БІОМЕДИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Одним з універсальних стратегічних прийомів підвищення ефективності будь-якого дослідження є застосування математичних методів. Притому, чим складніше явище вивчається, тим більш удосконаленим має бути математичний апарат, який при цьому використовується. Повною мірою це стосується, наприклад, медико-біологічних досліджень, які полягають у виявленні закономірностей реагування найбільш складної – біологічної системи на дію факторів навколишнього середовища.

Існує діалектично обумовлене правило, яке стверджує, що сукупність методичних прийомів, які використовуються, має бути адекватною складності закономірностей, які вивчаються. Наслідком цього правила є необхідність застосування тим більше вдосконалених математичних методик, чим менш досконалими є інші методи (інструментальні, фізичні, хімічні, фізіологічні, біохімічні тощо), які використовуються для досліджень. Іншими словами, маючи можливість використовувати досить потужний математичний апарат, припустимо спрощувати і скорочувати процес вивчення явища за допомогою інших методів.

Практично всі дані лабораторних досліджень є наборами цифр, тобто дискретними наборами, за винятком результатів спектрального аналізу, які можуть являти собою криві. Отже, будь-яка інформація може бути представлена в дискретному або неперервному вигляді. Неперервні сигнали отримують, наприклад, під час зняття електроенцефалограм, електрокардіограм тощо. Крім того, в результаті досліджень можуть бути отримані зображення, такі як рентгенограма, томограма чи термограма. Величезну частину дискретної медико-біологічної інформації отримують шляхом проведення вимірювань.

В попередньому абзаці згадані два поняття, які ми часто використовуємо, але не замислюємося над їх змістом: «інформація» та «сигнал». Звісно, що для коректного опису явищ і процесів важливо розумітися на базовій термінології. Однак для цього доведеться звертатися до великої кількості тлумачних словників, й філософського зокрема. Це ви можете зробити самостійно.

Для подальшого коректного викладу матеріалу ми розберемося в термінологічному апараті саме цифрової обробки сигналів (ЦОС) та деяких її аспектів у медичній галузі. Розглянемо визначення таких понять:

- «інформація»,
- «сигнал»,
- «біосигнал» або «біологічний сигнал»,
- «біомедичний сигнал».

1.1.1 Інформація, дані та сигнал

Наведемо цитату з [24]: «Незважаючи на широку поширеність, поняття інформації залишається одним із найбільш дискусійних у науці, а термін може мати різні значення у різних галузях людської діяльності».

Інформація (від лат. «роз'яснення, уявлення, розуміння про що-небудь») – відомості (повідомлення, дані) незалежно від форми їх подання [9].

Інформацію не слід ототожнювати із даними, оскільки **дані** – то деяка форма подання інформації, щоб її можна було зберігати або обмінюватися (див. п. 1.4.2.19 [25] та [24]). У неформальному контексті ці два терміни часто використовують як синоніми.

Згідно з Міжнародним стандартом ISO 13527:2010, п. 1.4.2.11 [25] в галузі інформаційних технологій, визначення поняття є таким: «**Дані** – це реінтерпретоване представлення інформації у формалізований спосіб, придатний для передачі, інтерпретації чи обробки» [26].

Розглянемо приклад ієрархічної схеми у письмовому тексті на Рис. 1.1.

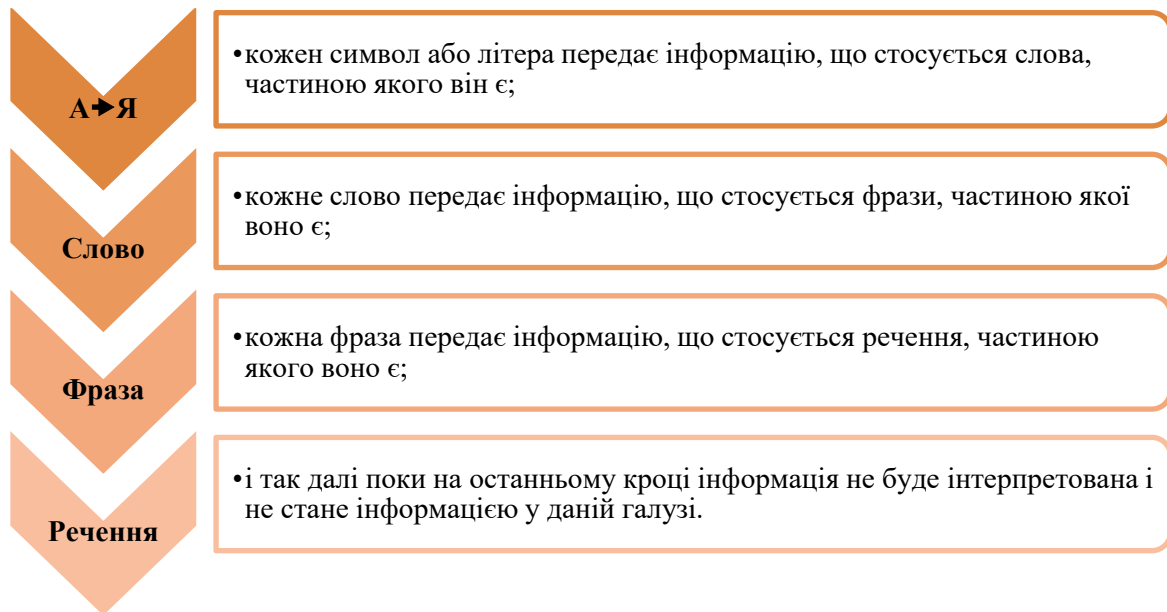


Рис. 1.1 – Приклад ієрархічної схеми у письмовому тексті.

Ключовою характеристикою інформації є те, що вона підлягає інтерпретації та обробці. Найпростішою одиницею виміру інформації є **біт** – одиниця виміру кількості інформації, що набирає два логічних значення:

- «так» чи «ні»,
- «істинно» чи «хибно»,
- увімкнено чи вимкнено;
- 1 або 0 у двійковій системі числення.

У цифровому сигналі біти можуть бути інтерпретовані як:

- символи,
- літери,
- цифри,
- структури, які передають інформацію, доступну на наступному рівні.

Сигнал – певні відомості, повідомлення, інформація про якісь процеси, стани або фізичні величини об’єктів матеріального світу, виражені у формі, зручній для передачі, обробки, зберігання і використання цих відомостей. З математичного точки зору, сигнал являє собою функцію, тобто залежність однієї величини від іншої, незалежної змінної. Найбільш поширене представлення сигналів – в електричній формі у вигляді залежності напруги від часу.

Згідно вступу до навчального курсу «Biomedical Signal and Image Processing» [19], який є у відкритому доступі на сайті авторитетного в усьому світі Масачусетського технологічного університету (MIT), в галузі біомедицини визначення сигналу (з лат. *signum* – знак) є таким [21]:

Сигнал – функція однієї або декількох змінних, в якій наявна корисна інформація.

Фактично, таке визначення з математичної точки зору є загальноприйнятим в теорії сигналів. Однак, варто навести цитату з найбільш відомого інформаційного інтернет-ресурсу – Вікіпедії [27]:

Існує велика кількість спроб сформулювати досить зручне визначення терміну «сигнал» у спеціальній літературі та у формальних нормативних актах (наприклад, таких як ДСТУ).

Чому сталася така ситуація з визначенням, здавалося б, такого простого на перший погляд поняття? З огляду на те, що сигнали можна розглядати з різних позицій, наприклад, з огляду на різні підходи їх класифікації [28]:

- за фізичною природою носія інформації;
- за способом задання сигналу;
- залежно від функції, що описує параметри сигналу.

Основні типи сигналів представлені на схемі Рис. 1.2, яку можна розглядати як порівняно просту класифікацію біомедичних сигналів.

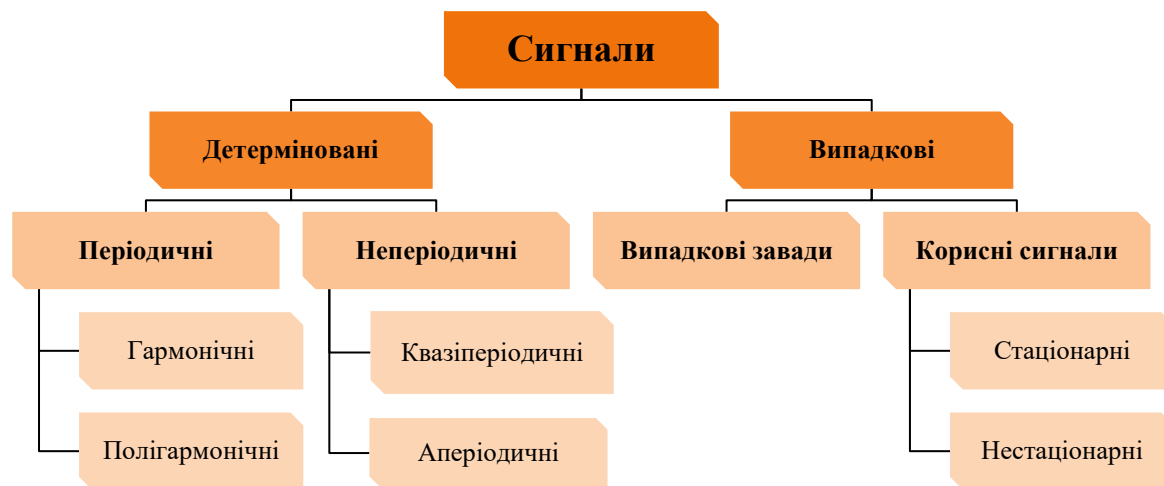


Рис. 1.2 – Основні типи сигналів.

Сигнали можуть бути або **одновимірними**, якщо вони залежать від однієї змінної, наприклад часу, або **багатовимірними**, якщо вони залежать від кількох змінних, таких як просторові координати.

1.1.2 Біологічна та біомедична інженерія

Далі розберемося в термінології, а саме в поняттях «біологічний» та «біомедичний» сигнали, чи є і в чому полягає відмінність між ними.

Поняття «біомедичний» бере початок від терміну «**біомедицина**» – розділу медицини [29], точніше, теоретичної медицини [30], який вивчає з теоретичних позицій організм людини, його будову і функції в нормі та патології, патологічні стани, методи їх діагностики, корекції та лікування.

Біомедицина включає напрацьовані відомості та дослідження, певною мірою загальні для медицини, ветеринарії, стоматології та фундаментальних біологічних наук, таких як хімія, біологічна хімія, біологія, гістологія, генетика, ембріологія, анатомія, фізіологія, патологія, біономія, ботаніка та мікробіологія.

Тепер розглянемо такі поняття як «біологічна інженерія» (БІ) та «біомедична інженерія» (БМІ). Пошуковий запит у Google за питанням «*What is the difference between Biomedical and Biological Engineering?*» випадковим чином привів до несподіваного джерела відповіді – ChatGPT, який у свою чергу надав лаконічну та достатньо задовільну відповідь, яку ми використаємо тут для формулювання визначень [31]:

Біологічна інженерія – є галуззю на поєднанні фундаментальних та прикладних досліджень, яка застосовує інженерні концепції, принципи та методи для дослідження і проектування живих систем.

Інженери-біологи використовують принципи біології, хімії, фізики та інформатики для проектування та розробки біологічних систем у таких напрямках як генна інженерія, біообробка та біотехнологія. Вони повинні мати глибоке розуміння базової біології живих систем, щоб проектувати та розробляти нові біологічні системи, які можуть виконувати певні функції.

Біомедична інженерія – це галузь також на поєднанні фундаментальних та прикладних досліджень, яка застосовує інженерні концепції, принципи та методи для проектування і розроблення технологій, систем і пристроїв у медицині та біології для цілей охорони здоров'я [31], [32].

Біомедичні інженери проектують і розробляють медичне обладнання, пристрої та системи, такі як штучні органи (кардіостимулятори та протези кінцівок), діагностичні (МРТ та ультразвукові сканери) та терапевтичні медичні інструменти. Вони також працюють над розробкою нових медичних технологій, таких як переносні пристрої та системи медичної візуалізації, а також комп'ютерних систем і програмного забезпечення для медичного використання. Біомедичні інженери повинні мати глибоке розуміння біології та медицини, щоб проектувати та розробляти пристрої та системи, які безпечно та ефективно інтегруються з тілом людини.

Обидві галузі, БІ та БМІ, пропонують можливості використання інженерних принципів для покращення здоров'я та добробуту людини або розробки стійких рішень із використанням живих організмів. Хоча між цими двома галузями є певне збігання, вони дещо відрізняються своєю спрямованістю та застосуванням, хоча й чітку межу проводити між ними немає сенсу. Відмінності або перетин цих галузей можна побачити, якщо спиратися на приблизну схему застосування або впливу БІ та БМІ, наведену на Рис. 1.3.

Об'єкти	Масштаб об'єктів	Галузь
• організм тварини, • організм людини.	• мікрочастинки, • клітини, • тканини, • органи, • організми.	• діагностика, • терапія, • протезування штучними або біологічними об'єктами.

Рис. 1.3 – Приклад схеми застосування або впливу БІ та БМІ.

Підсумовуючи відзначимо, що біомедична інженерія більше зосереджена на використанні інженерних принципів до медичних застосувань [32], тоді як біологічна інженерія більше зосереджена на застосуванні тих же принципів до живих систем [33].

Вважається, що БМІ є частиною більш загальної БІ, оскільки БМІ зосереджена у більшості на вирішенні медичних проблем, БІ менш обмежена та має справу з багатьма іншими галузями, які не є суто медичними [33]:

- біотехнологія – використання живих організмів і біологічних процесів у виробництві,
- біоміметика – використання біологічних методів і структур для розробки інженерних рішень та технологічних методів,
- системна біологія,
- біоніка, як-от протезування,
- біохімічна інженерія (виробництво біопалива) тощо.

1.1.3 Біологічний та біомедичний сигнали

Так само й біологічні (або біосигнали) та біомедичні сигнали – є спорідненими, але дещо різними поняттями [34].

Біологічні сигнали (БС) генерує живий організм (тварини або людини): на клітинному рівні, сигнали тканин, органів або цілих організмів [35]. Приклади:

- хімічні – між клітинами для спілкування одна з одною;
- електричні, які генеруються нервовою системою [35];
- акустичні, які використовуються тваринами для спілкування.

Біомедичні сигнали (БМС) – електричні, механічні або хімічні сигнали, які генерує організм в першу чергу людини і які використовуються для медичних цілей: діагностики, моніторингу та терапії різноманітних захворювань а також для їх профілактики.

В широкому сенсі, БМС – це дані спостережень за фізіологічною діяльністю організмів, починаючи від послідовностей генів і білків до нервових і серцевих ритмів і закінчуючи зображеннями тканин і органів [36]. Наприклад, під час дослідження електричної активності (Рис. 1.4):

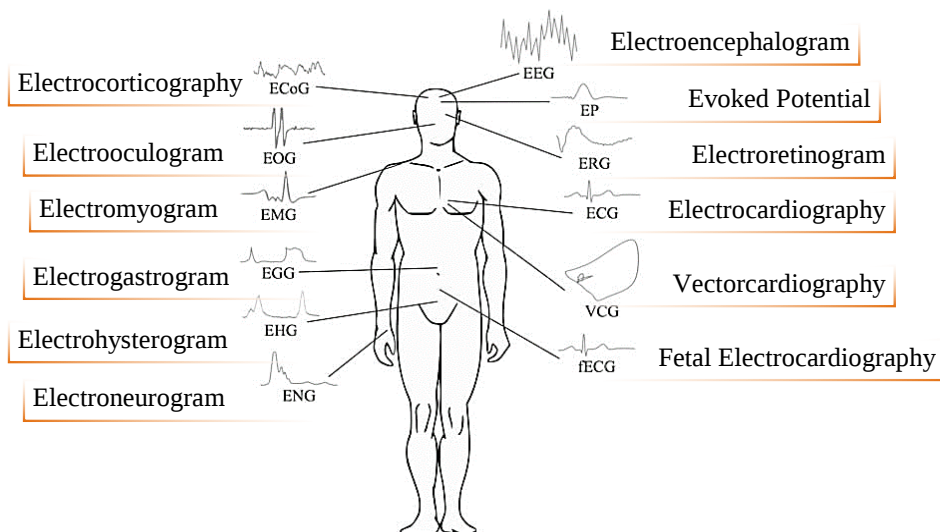


Рис. 1.4 – Загальна схема біоелектричних сигналів [37].

- серця – електрокардіографії (ЕКГ),
- мозку – електроенцефалографії (ЕЕГ),
- м'язів – електроміографії (ЕМГ),
- м'язів ока та зовнішнього шару сітківки – електроокулографія (ЕОГ),
- периферичних нервів – електронейрографія (ЕНГ) та ін.

БМС зазвичай вимірюються за допомогою спеціальних медичних приладів і обладнання. Хоча БМС є підмножиною БС, концептуально вони не є взаємозамінними. БМС стосуються медичної діагностики та лікування, тоді як БС можуть включати набагато ширший діапазон сигналів, створених живими організмами, на мікрорівні зокрема.

Виходячи з вищевикладеного та ще з декількох джерел, наявних у відкритому доступі в інтернеті, як от [38], [39], у подальшому будемо спиратися на наступне визначення:

Біомедичні сигнали – певні відомості, повідомлення, інформація про процеси, стани або фізичні величини фізіологічної активності організмів у медичній сфері, виражені у формі, зручній для передачі, обробки, зберігання і використання, причому БМС являють собою функції, тобто залежності однієї величини від іншої, незалежної змінної.

Як видно, визначення повністю спирається на визначення поняття «сигнал» (див. п. 1.1.1) з його подальшою адаптацією для галузі біомедичної інженерії.

1.1.4 Методи біомедичних досліджень

Основні групи математичних методів обробки інформації:

- апарат теорії імовірності і математичної статистики;
- математичний аналіз кривих;
- диференціальні рівняння;
- гармонічний аналіз.

Існує цілий ряд спеціальних математичних методів, призначених для розпізнавання зображень, виділення корисної інформації із «зашумленої» та інші.

Сучасні методи медичних досліджень діляться на дві основні групи:

1. лабораторні,
2. інструментальні.

Додатково до інструментальних методів відноситься особлива група методів, яка названа хірургічними методами. Окремий розгляд цієї групи пов'язаний з особливостями цих методів, які полягають у тому, що інструментальні методи пов'язані в них з хірургічним втручанням.

Сутність **лабораторних методів** полягає у дослідженні хімічних і фізичних властивостей біологічних рідин і тканин, проб навколишнього середовища (змівів з поверхонь, проб води, ґрунту, повітря тощо). Крім того, до лабораторних методів відносяться дослідження та ідентифікація мікроорганізмів (бактеріологія і вірусологія), з метою виявлення патогенних і умовно-патогенних для людини і тваринних мікроорганізмів і розробки методів специфічної профілактики і лікування інфекційних хвороб.

Основна інформація, одержана під час лабораторних досліджень, подається в дискретному вигляді. Це кількість клітин крові, концентрація різних речовин у біорідинах, кількість домішок у воді, кількість мікроорганізмів у полі зору та ін. Для обробки таких даних використовується апарат математичної статистики, що дозволяє визначити характер розподілу показників, їхні середні значення, похибки середнього тощо.

Крім дискретних даних, можливе отримання і неперервної інформації у вигляді спектрів, до якої можливо застосовувати методи диференціального і гармонічного аналізу.

До лабораторних методів відносяться дослідження з використанням оптичних пристроїв, наприклад, різноманітних мікроскопів. Зображення, одержані за допомогою таких пристроїв, апаратно чи програмно перетворюються в електричні сигнали й обробляються спеціальними методами.

До **інструментальних методів** відноситься велика група методів, у результаті застосування яких можна отримати різноманітні зображення. Це оптичні, рентгенологічні, радіологічні, тепловізійні, ультразвукові та інші методи.

Нині, завдяки автоматизації досліджень, можливо проводити обробку оптичних і ультразвукових зображень, вимірювання їхніх геометричних характеристик, виділення фрагментів, які зацікавили лікаря, із заданими структурними властивостями, підрахунки елементів, визначення площ тощо. Для досягнення такої мети використовується цілий ряд специфічних математичних та комп'ютерних методів.

Інша класифікація методів медичних досліджень підрозділяє їх на три основні групи об'єктивних методів дослідження організму людини:

1. структурна діагностика – методи, що виявляють зміни у побудові органів і тканин (рентгенологічні, ультразвукові дослідження, тепlobачення, ендоскопія – гастроскопія, бронхоскопія, колоноскопія тощо).
2. функціональна діагностика – методи вивчення функціонування органів і систем за їхніми електричними (електрокардіографія, електроенцефалографія, електроміографія тощо), звуковими (фонокардіографія), механічними (сфігмографія) та інших проявами.
3. лабораторна діагностика – методи виявлення змін клітинного і хімічного складу біологічних рідин та інших біологічних матеріалів.

Всю медичну інформацію, яка циркулює в лікувальному закладі, поділяють на **об'єктивну** та **суб'єктивну**.

Об'єктивною інформацією вважається інформація створена шляхом реєстрації, або вимірювань, апаратними засобами під час обстежування пацієнта та діагностики захворювання. Такими дослідженнями є термометрія,

біопсія, ендоскопія, результати вимірювань різноманітних біопотенціалів тощо. До такої інформації належать також різними способами отримані медичні зображення (МЗ) внутрішніх органів, зокрема, рентгенографія, комп'ютерна томографія (КТ), ультразвукова ехолокація тощо.

Суб'єктивно вважають таку медичну інформацію, яка отримується під час безпосереднього аналізу людиною БМС, причому без застосування будь-яких приладів, апаратів або пристроїв. Суб'єктивними є, наприклад, результати, огляду хворого лікарем, пальпація його органів, інші подібні дані.

1.2 ВСТУП ДО ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Як вам відомо з попередніх навчальних курсів, **цифровий сигнал** (ЦС) в цифровій електроніці являє собою дискретну послідовність електричних імпульсів квадратної форми із фіксованою довжиною. Кожен з імпульсів може займати лише один із рівнів амплітуди. Особливим випадком ЦС є логічний сигнал або двійковий сигнал, який змінюється (варіюється) між високим і низьким рівнем сигналу. Отже, всі ЦС є дискретними.

Найчастіше ЦС отримують після перетворення аналогового сигналу в послідовність імпульсів, наприклад, за допомогою аналого-цифрових перетворювачів (АЦП). Набори дискретних значень, уведених людиною у комп'ютер власноруч, також можуть бути ЦС.

Найчастіше сигнал передає релевантну інформацію, що представляє інтерес, а також зайву та непотрібну [19]. Наприклад, електроенцефалограма (ЕЕГ), записана на шкірі голови добровольця, може бути «забруднена» електрофізіологічною активністю серця та усюдисущим сигналом лінії електропередачі частотою 60 Гц. Те, що представляє інтерес, залежить від конкретного застосування.

Інший приклад: мовний сигнал містить як лінгвістичну інформацію (те, що було сказано), так і інформацію про мовця (хто це сказав). Перше представляло б інтерес для системи автоматичного розпізнавання мовлення, тоді як друге мало б значення для системи ідентифікації мовця.

Метою обробки сигналу є вибіркове усунення непотрібної інформації з сигналу, щоб зробити інформацію, яка цікавить, доступною для людини-спостерігача або комп'ютерної системи. Причина такого визначення полягає в тому, що не можна додати інформацію до сигналу, можна лише видалити зайву [19].

Цифрова обробка сигналів (англ. *digital signal processing, DSP*) – використання комп'ютерів або більш спеціалізованих процесорів для виконання широкого спектру операцій над сигналами, представленими у цифровій формі [40]. Такими операціями над сигналами можуть бути:

- перетворення (фільтрація, очищення від шумів тощо),
- обробка (в реальному часі або у відкладеному),
- аналіз,
- візуалізація тощо.

Обробка біомедичних сигналів – це отримання та попередня обробка фізіологічних сигналів та вилучення важливої інформації для виявлення закономірностей і тенденцій [41].

Також обробка БМС стосується алгоритмів обробки певного класу цифрових сигналів, отриманих у біомедичних дослідженнях і клінічній медицині [38]. За результатами обробки БМС біологи можуть відкривати нове у біології, а лікарі – слідкувати за захворюваннями. З основними задачами обробки біомедичних сигналів, перевагами її практичного використання, етапами здійснення такої обробки та прикладами застосування можна ознайомитися з лаконічного, але інформативного огляду [42].

1.2.1 Принципи цифрової обробки сигналів

Будь-який неперервний (аналоговий) сигнал $s(t)$ може бути підданий дискретизації за часом і квантуванню за рівнем (оцифруванню), тобто представлений в цифровій формі. Якщо частота дискретизації сигналу F_d не менше, ніж подвоєна найвища частота в спектрі сигналу F_{max} , то отриманий дискретний сигнал $s(k)$ буде еквівалентним сигналу $s(t)$ за методом найменших квадратів (МНК).

За допомогою математичних алгоритмів $s(k)$ перетвориться в дещо інший сигнал $s_1(k)$, який має необхідні властивості. Процес перетворення сигналів називається **фільтрацією**, а пристрій, що виконує фільтрацію, називається **фільтр**. Оскільки значення сигналів надходять з постійною швидкістю F_d , фільтр повинен встигати обробляти поточний сигнал серії до надходження наступного (частіше – до надходження наступних n відліків, де n – затримка фільтра), тобто обробляти сигнал в реальному часі.

Для обробки сигналів (фільтрації) в реальному часі застосовують спеціальні обчислювальні пристрої – цифрові сигнальні процесори. Це стосується не тільки неперервних сигналів, але і переривчастих, а також до сигналів, записаних на пристрої зберігання інформації. В останньому випадку швидкість обробки не принципова, оскільки при повільній обробці дані не будуть втрачені.

Розрізняють методи обробки сигналів у часовій (англ. *time domain*) і в частотній (англ. *frequency domain*) області. Еквівалентність частотно-часових перетворень однозначно визначається через перетворення Фур'є (ПФ, *Joseph Fourier*).

Обробка сигналів у часовій області широко використовується в сучасній електронній осцилографії і в цифрових осцилографах. Для подання сигналів в частотній області використовуються цифрові аналізатори спектра. Для вивчення математичних аспектів обробки сигналів використовуються пакети розширення (наприклад, Signal Processing) систем комп'ютерної математики Maple, MATLAB, Mathcad, Mathematica тощо.

В останні роки при обробці сигналів та зображень широко використовується новий математичний базис подання сигналів з допомогою «коротких сплесків» – вейвлетів. З його допомогою можуть оброблятися нестационарні сигнали, сигнали з розривами та іншими особливостями і сигнали у вигляді пакетів.

1.2.2 Основні застосування ЦОС

Лінійна фільтрація – селекція сигналу в частотній області; синтез фільтрів, узгоджених з сигналами; частотне розділення каналів; цифрові перетворювачі Гільберта і диференціатор; коректори характеристик каналів.

Спектральний аналіз – обробка мовних, звукових, сейсмічних, гідроакустичних сигналів; розпізнавання образів.

Частотно-часовий аналіз – компресія зображень, гідро- і радіолокація, різноманітні завдання виявлення сигналу.

Адаптивна фільтрація – обробка мови, зображень, розпізнавання образів, зниження або усунення шумів, адаптивні антенні решітки.

Нелінійна обробка – обчислення кореляцій, медіанна фільтрація; синтез амплітудних, фазових, частотних детекторів, обробка мови, векторне кодування.

Високошвидкісна обробка – інтерполяція (збільшення) і децимація (зменшення) частоти дискретизації в багатозв'язних системах телекомунікації, аудіосистемах.

Про отримання **згорток** цікаво викладено в авторів [43], [44].

1.2.3 Основні перетворення

Цифрова обробка сигналу, що здійснюється в:

Передавачі

- Форматування
- Кодування джерела
- Шифрування
- Канальне шифрування
- Ущільнення
- Імпульсна модуляція
- Смугова модуляція
- Розширення спектра
- Множинний доступ
- Передавання сигналів.

Приймачі

- Приймання сигналів
- Множинний доступ
- Звуження спектра
- Демодуляція і дискретизація
- Детектування
- Розушлювання
- Канальне декодування
- Дешифрування
- Декодування джерела
- Форматування.

1.3 ЦИФРОВА ОБРОБКА БІОМЕДИЧНИХ СИГНАЛІВ.

ТЕОРЕМА ВІДЛІКІВ

Велика частина біомедичних сигналів представляється в дискретному вигляді. Через те, що комп'ютерні методи обробки сигналів розраховані насамперед на дискретні сигнали, навіть неперервні аналогові біомедичні сигнали звичайно перед такою обробкою піддаються процедурі, яка має назву **дискретизації**, оскільки в комп'ютері внутрішнє подання інформації є дискретним.

Окрім того, для задач обробки даних зазвичай потрібно значно менше інформації, ніж її надходить від вимірювальних датчиків у вигляді неперервного аналогового сигналу. З урахуванням статистичних флуктуацій вимірюваних величин і кінцевої похибки засобів вимірювань, інформація про величину сигналу реально завжди обмежена.

Використання дискретних (цифрових) сигналів дозволяє застосовувати методи кодування інформації з можливістю подальшого виявлення і виправлення помилок при зверненні до збереженої інформації. Цифрова форма сигналів полегшує також уніфікацію операцій перетворення інформації на всіх етапах звернення до неї.

1.3.1 Дискретизація. Квантування

Дискретизація неперервного сигналу може здійснюватися як за часом, так і за рівнем (амплітудою) сигналу. Дискретизація аналогового сигналу здійснюється АЦП, які здійснюють автоматичну дискретизацію сигналу по часу і квантування за рівнем. Внаслідок дискретизації неперервного сигналу кожне значення дискретизованого (але неквантованого) сигналу строго прив'язане до певного моменту часу (Рис. 1.5, Maple-код у Додаток А).

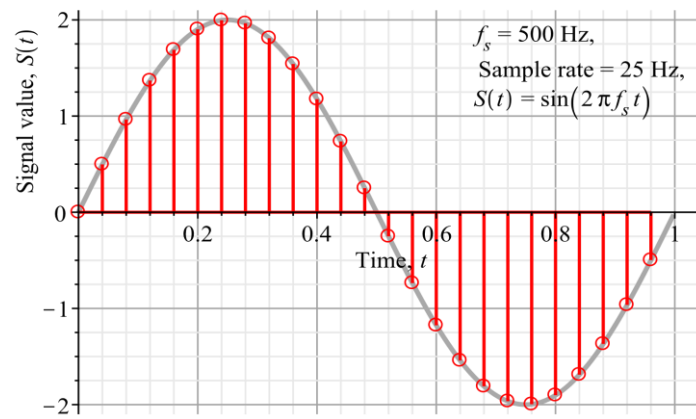


Рис. 1.5 – Дискретизований (але неквантований) сигнал.

Дискретизація за рівнем (амплітудою) сигналу отримала назву **квантування** (Рис. 1.6, Додаток А). Відмінність між Рис. 1.5 та Рис. 1.6 очевидна.

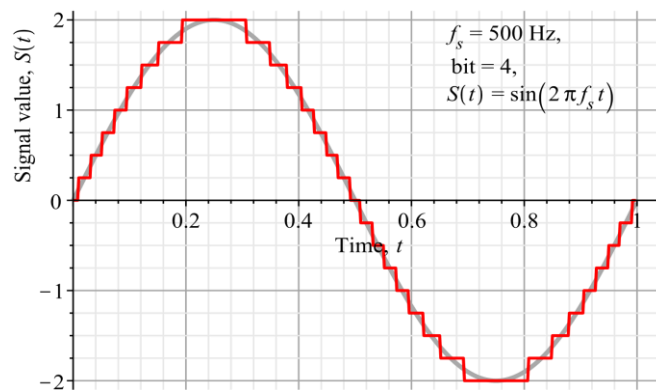


Рис. 1.6 – Квантований (але не дискретизований) сигнал.

Можливість дискретизації неперервного сигналу з будь-якою бажаною точністю (для зростання точності достатньо зменшити крок дискретизації) принципово важлива з точки зору медичної інформатики. Дискретизація вхідної інформації (якщо така інформація неперервна) дозволяє зробити її придатною для комп'ютерної обробки.

Не слід плутати квантування з дискретизацією (і, відповідно, рівень квантування з частотою дискретизації). Під час дискретизації величина, що змінюється в часі (сигнал) заміряється із заданою частотою (так звану частотою дискретизації). Частота дискретизації показує кількість відліків (вимірювань) в одиницю часу і обернено пропорційна кроку дискретизації в часі (див. Рис. 1.7, запозичений з [45]):

$$f_d = \frac{1}{\Delta t} \quad (1.1)$$

Отже, дискретизація розбиває сигнал за часовою складовою (Рис. 1.5 та Рис. 1.7 – по вертикалі). Квантування ж приводить сигнал до заданих значень, тобто, розбиває за рівнем сигналу (Рис. 1.6 та Рис. 1.7 – по горизонталі).

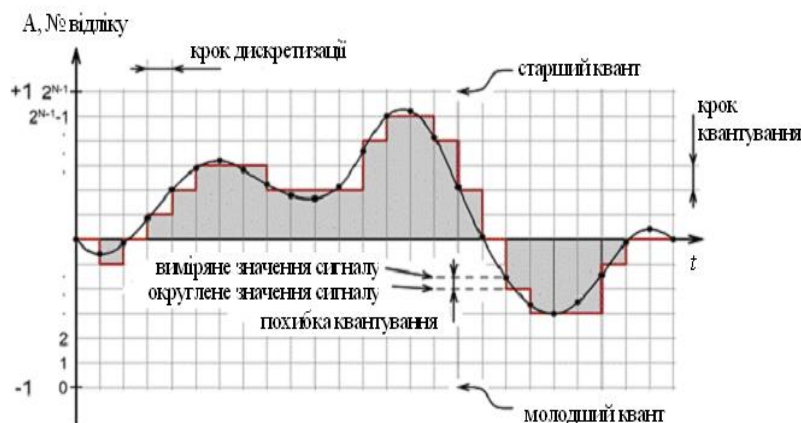


Рис. 1.7 – Деякі додаткові характеристики оцифрування сигналів.

Сигнал, до якого застосована як дискретизація, так і квантування, називається **цифровим** (Рис. 1.7 та Рис. 1.8, Maple-код у Додаток А).

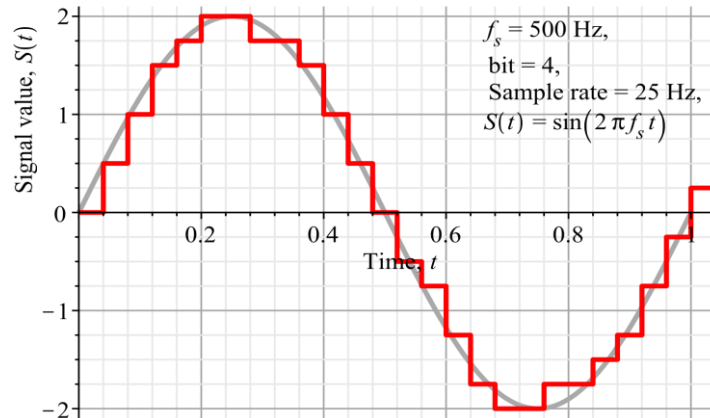


Рис. 1.8 – Цифровий (оцифрований) сигнал.

На Рис. 1.7 показаний процес перетворення аналогового сигналу в цифрову форму. Як бачимо, результатом такого перетворення став ступінчатий сигнал, складений із прямокутників, кожен з яких має ширину, рівну величині кроку дискретизації Δt , і висоту, рівну вимірюваному значенню амплітуди сигналу. Точність округлення залежить від вибраної кількості ($2N$) рівнів квантування, яка, в свою чергу, залежить від кількості бітів (N) відведених для запису значення амплітуди.

Чудовий приклад семплування (дискретизації) аудіосигналу при 40 кГц, 20 кГц, 10 кГц та 5 кГц можна побачити і почути з лекції класика теорії ЦОС – проф. А. Оппенгейма, а саме з його 1-ої лекції по DSP на OpenCourse MIT за посиланням [46] (час з 26:25 і до кінця).

Число N називають **розрядністю квантування** (маючи на увазі кількість розрядів, тобто бітів, в кожному слові), а отримані в результаті округлення значень амплітуди числа – **відліками** чи **семплами** (з англ. *sample* – замір).

Для того, щоб відновити вхідний неперервний сигнал з дискретизованого з малими похибками, необхідно раціонально вибрати крок дискретизації Δt . Тому при перетворенні аналогового сигналу в дискретний обов'язково виникає питання про величину кроку дискретизації. Очевидно, що точність відновлення аналогового сигналу по послідовності його дискретних відліків залежить від величини інтервалу дискретизації (кроку дискретизації, частоти дискретизації). Чим він коротший, тим менше буде відрізнятися вхідний сигнал від плавної кривої, яка проходить через точки відліків.

Однак зі зменшенням інтервалу дискретизації (збільшенням частоти дискретизації), істотно зростає складність і обсяг обчислень. З іншого боку, за надто великого інтервалу дискретизації зростає ймовірність спотворення або втрати інформації при відновленні аналогового сигналу.

1.3.2 Теорема Шеннона-Найквіста-Котельникова

Оптимальна величина інтервалу дискретизації встановлюється теоремою Котельникова, яка має важливе теоретичне та практичне значення: дає можливість правильно здійснити дискретизацію аналогового сигналу та визначає оптимальний спосіб його відновлення.

Теорема відліків Шеннона-Найквіста-Котельникова

(у вітчизняній літературі – теорема Котельникова) стверджує:

якщо неперервний сигнал $x(t)$ має спектр, обмежений частотою f_{max} , то він може бути однозначно і без втрат відновлений за своїми дискретними відліками, узятими з частотою дискретизації більшою, або рівною подвійній максимальній частоті сигналу $f_d \geq 2f_{max}$, або, по-іншому, за відліками, узятими з кроком дискретизації $\Delta t \leq \frac{1}{2f_{max}}$.

Теорему Котельникова можна сформулювати інакшим – зворотним способом:

«Для того, щоб відновити сигнал на прийомі без втрат, необхідно, щоб частота дискретизації була хоча б у два рази більша за максимальну частоту аналогового сигналу $f_d \geq 2f_{max}$ ».

Теорема відліків розглядає ідеальний випадок, коли сигнал почався нескінченно давно й ніколи не закінчиться, а також не має в часовій характеристиці точок розриву. Саме це має на увазі умова «має спектр, обмежений частотою f_{max} ».

Реальні сигнали завжди обмежені у часі, а інколи мають у часовій характеристиці розриви, відповідно, їх спектр не є обмеженим деякою максимальною частотою. У таких випадку повне відновлення сигналу теоретично неможливо й з теореми Котельникова виникають два такі наслідки:

1. будь-який аналоговий сигнал може бути відновлений з якою завгодно точністю за своїми дискретними відліками, узятими із частотою $f_d \geq 2f_{max}$, де f_{max} – максимальна частота, якою обмежений спектр реального сигналу;
2. якщо максимальна частота спектру сигналу перевищує половину частоти дискретизації, то способу відновити сигнал з дискретного в аналоговий без викривлень не існує.

Теорема була вперше сформульована Гаррі Найквістом в 1928 році у роботі «*Certain topics in telegraph transmission theory*». У 1933 році вона була опублікована та доведена В. О. Котельниковим в його роботі «Про пропускну здатність ефіру і дроту в електрозв'язку». Теорема є однією з основоположних в теорії і техніці цифрового зв'язку.

1.3.3 Приклади обробки цифрових сигналів

На Рис. 1.9 (а) (див. Додаток А) показаний сигнал як функція часу у вигляді амплітудно-модульованої (АМ) хвилі за параметрами Табл. 1.1, вигляд сигналу після дискретизації (Рис. 1.9 (в)) а також його спектр частот, отриманий шляхом цифрової обробки, зокрема перетворенням Фур'є (Рис. 1.9 б) та вбудованою в Maple 2021 командою **Periodogram** з пакету **SignalProcessing** (Рис. 1.9 г).

Табл. 1.1

Параметри моделі АМ-хвилі.		
	Несуча хвиля (Carrier wave)	Згасаюча хвиля, що модулює несучу
Частота, f	300 Гц	30 Гц
Амплітуда, U_{max}	2	1
Коефіцієнт згасання, δ	–	3
Рівняння, $U(t)$	$U_c(t) = U_{max c} \sin(2\pi f_c t + \varphi_{0c})$	$U_m(t) = U_{max m} e^{-\delta t} \sin(2\pi f_m t)$
Рівняння АМ-хвилі	$S_{AM}(t) = (U_{max c} + U_m(t)) \cdot \frac{U_c(t)}{U_{max c}}$	
Частота дискретизації	8000 Гц	

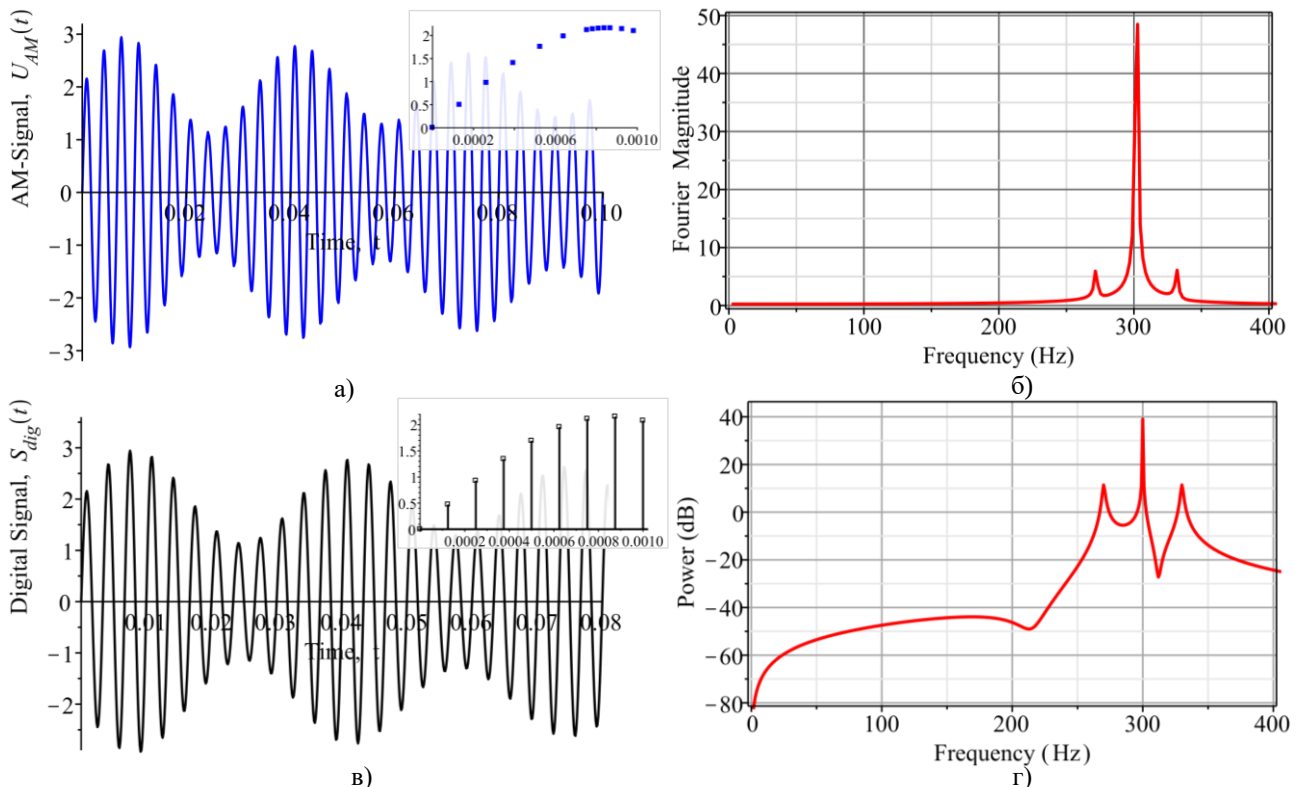


Рис. 1.9 – Цифровий АМ-модульований сигнал та його спектр частот:
а), б) неперервний сигнал (хвиля); в), г) дискретизований сигнал.

Максимальна частота в спектрі сигналу на Рис. 1.9 а дорівнює 300 Гц, отже, частота дискретизації, згідно з теоремою відліків, повинна бути не меншою ніж 600 Гц. Для моделі на Рис. 1.9 обрано частоту дискретизації 8 кГц.

Цифровою обробкою сигналів прийнято називати арифметичну обробку послідовностей рівновіддалених в часі відліків, тобто дискретизованих сигналів. Під цифровою обробкою розуміють також обробку одновимірних і багатовимірних масивів даних (наприклад, медичних зображень). ЦОС в ширшому значенні цього поняття означає виконання різних операцій над одновимірними і багатовимірними сигналами. До одновимірних відносять телефонні та радіосигнали, до багатовимірних – телевізійні сигнали, фотографії дослідницького характеру, медичні рентгенограми, електронно-мікроскопічні фотографії молекул, локаційні карти, дані томографії тощо. Цілі, переслідувані при обробці таких сигналів, різні.

Для систем обробки медичних зображень типовими завданнями є:

- поліпшення зображень,
- стискання інформації для передачі та зберігання,
- розпізнавання образів.

Характерним для систем обробки зображень є відновлення і поліпшення зображень за допомогою інверсної згортки, обробка масивів відліків за допомогою алгоритмів швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). На Рис. 1.10 демонструється застосування методу підвищення контрасту зображення за допомогою цифрових програмних фільтрів.



Рис. 1.10 – Застосування методу підвищення контрасту зображення.

При відновленні тривимірної структури об'єктів, одержуваних методами проникаючого випромінювання в дефектоскопії та медичній інтроскопії, також застосовуються методи просторово-частотної фільтрації. При цьому використовується поширений клас алгоритмів:

- перетворення контрастності,
- виділення контурів,
- статистична обробка зображень.

Для стискання інформації найбільш ефективні ортогональні перетворення Фур'є, Адамара, Уолша. Необхідна продуктивність комп'ютерів оцінюється величинами 100-1000 MIPS, тобто 10^8 - 10^9 операцій в секунду, типові масиви даних – (10^5 - 10^6) відліків.

При обробці цифрових звукових біомедичних сигналів використовуються алгоритми цифрової фільтрації і спектрального аналізу:

- обчислення дискретних та швидких перетворень Фур'є: ДПФ, ШПФ,
- алгоритми кореляційного аналізу,
- алгоритми зворотної згортки,
- спеціальні алгоритми лінійного передбачення.

У більшості випадків задовільні результати забезпечує формат даних з фіксованою комою, довжиною слова 16 біт, частотами сигналів від 4 до 20 кГц (інколи й до 40 кГц в разі обробки музики), необхідна продуктивність – до 10^7 операцій в секунду або 10 MIPS у комп'ютерній термінології.

Цифрова обробка сигналів здійснюється двома способами, які умовно називають **апаратним** та **програмним**. Програмна здійснюється за допомогою спеціальних програм на комп'ютерах з відносно великим об'ємом пам'яті, які реалізують пряме і зворотне ДПФ та дискретну згортку.

Резюмуючи наведене вище, можна сказати, що сутність ЦОС, як області науки, полягає у вирішенні на обчислювальних машинах (комп'ютерах) таких 4-ох основних задач:

1. представлення сигналів та зображень в зручній для сприйняття формі;
2. виділення із сигналів та зображень корисної інформації;
3. внесення в сигнали та зображення корисної інформації;
4. формування сигналів та зображень із заданими параметрами.

Фундаментальні переваги ЦОС є такими:

1. можливість реалізації складних методів та алгоритмів обробки сигналів та зображень, недоступних для аналогових пристроїв;
2. забезпечення високої точності обробки;
3. гнучкість і універсальність засобів, розвинений користувацький інтерфейс.

Головна проблема ЦОС полягає у підвищенні швидкодії при реалізації певного набору математичних операцій над БМС та біомедичними зображеннями (БМЗ). Цей набір, як правило, визначається проблемною орієнтацією засобів ЦОС. Для розв'язання цієї задачі комплексно застосовуються два напрямки:

- підвищення ефективності обчислювальних алгоритмів,
- вдосконалення архітектури комп'ютерних засобів.

1.4 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. Поясніть поняття інформації.
2. Що являють собою дані? В чому полягає відмінність між інформацією і даними?
3. Поясніть поняття сигналу. Як визначається сигнал з математичної точки зору?
4. Назвіть основні типи сигналів.
5. Дайте визначення біомедичного сигналу. Поясніть його відмінність від біологічного.
6. Яка медична інформація вважається об'єктивною, і яка – суб'єктивною?
7. Поясніть, що являє собою цифровий сигнал.
8. Що являють собою дискретні сигнали?
9. Дайте визначення ЦОС. Які операції над сигналами здійснюються під час ЦОС?
10. В чому полягає обробка біомедичних сигналів?
11. В чому полягає фільтрація сигналів?
12. Назвіть основні напрямки застосування ЦОС.
13. Поясніть процес дискретизації сигналу.
14. Дайте визначення частоти дискретизації.
15. Як здійснюється і в чому полягає квантування сигналу?
16. Який сигнал вважається цифровим?
17. Сформулюйте теорему Шеннона-Найквіста-Котельникова.
18. Поясніть, що являють собою одно- і двовимірні сигнали.
19. Які перетворення є найбільш ефективними для стиснення інформації?
20. Обґрунтуйте, що необхідно для здійснення обробки оцифрованих звукових БМС.
21. Які основні задачі вирішує ЦОС?
22. В чому полягають переваги ЦОС та її головна проблема?

ПИТАННЯ

- 1 Статистичні методи аналізу. Автокореляційний та крос-кореляційний аналіз.
- 2 Варіабельність ритмів: кардіоінтервалографія.

2.1 СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ. АВТОКОРЕЛЯЦІЙНИЙ ТА КРОС-КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ

Автоматичний аналіз процесів – обробка даних процесів, представлені у формі кривих, виконувана частково або повністю за алгоритмами, реалізованими на обчислювальній машині широкого призначення або спеціалізованому комп'ютері.

Об'єктом аналізу може бути будь-який з процесів, які протікають в організмі, лікувальній установі або в зовнішньому середовищі, представлений у вигляді графіків, кривих, числового ряду, карт розподілу біопотенціалів тощо. Графічними виразами медико-біологічних процесів є:

- електрокардіограми (ЕКГ),
- електроенцефалограми (ЕЕГ),
- електроміограма (ЕМГ),
- імпульсна активність (ІА) нервових клітин,
- графіки температури і таке інше.

Широко використовується автоматична побудова:

- гістограм,
- амплітудних розподілів,
- часових інтервалів,
- фаз,
- латентних періодів.

Застосовують також автокореляційний аналіз складних сигналів. Цей метод аналізу дозволяє виділяти на аналізованих сигналах випадкові та періодичні складові, навіть у тих випадках, коли на первинному графіку дослідник не бачить нічого, окрім безладно розподілених в часі хвиль та піків.

2.1.1 Статистичні характеристики

Пригадаємо декілька важливих визначень з теорії ймовірності та математичної статистики, які знадобляться для подальшого розгляду.

- ♦ **1.1** Подія, вибірка, випадкова величина та її ймовірність. Частотні розподіли та їх гістограми

Давайте пограємо у підкидання кістки, англ. *dice* (множина від *die* – гральна кість, кубик). Спочатку домовимося про зміст певних понять, якими будемо описувати процес. **Дослідом** (випробуванням [47], *experiment* або *trial*) буде підкидання кістки, а випадковою **подією** (наслідком випробування [47], *event*) – випадіння якоїсь однієї із 6-ти граней кубика (2-й стовпець в Табл. 2.1). Причому, що важливо, кожна з таких подій буде незалежною, оскільки випадіння грані, наприклад, з 2 точками ніяк не залежить від випадіння грані з 5 точками, або будь-якої іншої, оскільки матеріал у кубіку розподілений однорідно.

Число (кількість) білих точок на грані кубика d_i ($i = 1..6$), що випала в досліді, буде **значенням випадкової величини** (*random variable*), причому дискретної. Також домовимося у подальшому випадковій величині позначати великими літерами, а їх можливі значення – відповідними малими літерами. Тобто, в нашій грі D (від *die*) – кількість точок на грані кубика, що випала у досліді з його підкидання, d_i – всі можливі значення від 1-го до 6-ти. Всі можливі значення d_i утворюють множину D .

Представлена в Табл. 2.1 комбінація кубиків є вибіркою з 10-ти випробувань і є однією з багатьох можливих реалізацій дослідів з підкидання.

Зверніть увагу на результати серії дослідів з підкидання в Табл. 2.1: в жодному з 10 не випала грань з 4 білими точками.

Табл. 2.1

Події та їхні результати у грі в кістки.			
Номер дослідів	Випадкова подія	Значення випадкової величини, d_i	Ймовірність події в серії з 10-ти дослідів
1		2	$\frac{1}{10}$
2		3	$\frac{1}{10}$
3		1	$\frac{1}{10}$

Номер досліджу	Випадкова подія	Значення випадкової величини, d_i	Ймовірність події в серії з 10-ти дослідів
4		2	$\frac{1}{10}$
5		5	$\frac{1}{10}$
6		6	$\frac{1}{10}$
7		2	$\frac{1}{10}$
8		2	$\frac{1}{10}$
9		2	$\frac{1}{10}$
10		6	$\frac{1}{10}$

Підсумуємо кількість появ N_i значень d_i випадкової величини (див. Табл. 2.1) у грі з підкидання кістки та представимо їх у Табл. 2.2. Також визначимо **ймовірності** $P(d_i)$ (*probability*) відповідних ВВ у вибірці з 10 випробувань.

Табл. 2.2

Результати 10-ти дослідів з підкидання кубика.

Значення ВВ d_i , т.т. кількість білих точок на грані, що випала	1	2	3	5	6
Кількість випадів N_i в серії з $N = 10$ дослідів,	1	5	1	1	2
Ймовірність ВВ d_i в серії з 10-ти дослідів, $P(d_i) = \frac{N_i}{N}$	$P(1) = \frac{1}{10}$	$P(2) = \frac{5}{10}$	$P(3) = \frac{1}{10}$	$P(5) = \frac{1}{10}$	$P(6) = \frac{2}{10}$
Ймовірність події в 1-у досліді, т.т. випадіння 1-ї з 6-ти граней кубика з даною кількістю білих точок в експерименті з 1-го підкидання (також за умови $N \rightarrow \infty$)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

За результатами 10-ти дослідів побудуємо гістограму, в якій область значень випадкової величини (вісь OX) розбивають на однакові інтервали (біни, *bins*), а по осі OY відкладають N_i – кількість (**частоту**) попадань випадкової величини в i -й інтервал (Рис. 2.1 а). Графіки на Рис. 2.1 (Maple-код див. у Додаток Б) представляють собою так звані **частотні розподіли**, тобто частоту виникнення різних результатів у вибірці.

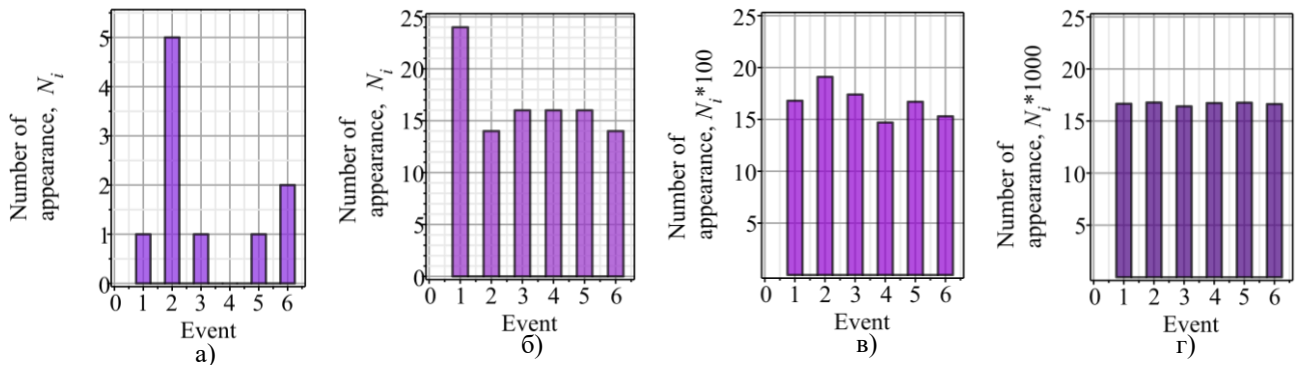


Рис. 2.1 – Гістограми (частотні розподіли) для чотирьох різних вибірок:
а) 10 дослідів; б) 100 дослідів; в) 1000 дослідів; г) 100 000 дослідів.

Визначимо деякі статистичні характеристики результатів дослідів за різної їх загальної кількості та зведемо у Табл. 2.3.

Табл. 2.3

Статистичні характеристики чотирьох різних вибірок.				
Кількість випробувань	10	100	1000	100 000
Середнє випадкової величини $\bar{D}$	3.10	3.28	3.41	3.50
Стандартне відхилення σ (standard deviation) або середнє квадратичне відхилення	1.85	1.76	1.70	1.71

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^N d_i \cdot P(d_i) \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N (d_i - \bar{d})^2 \cdot P(d_i)} \quad (2.2)$$

В Табл. 2.3 **середнє** $\bar{D}$ (*mean*, або **середнє арифметичне**, *arithmetic mean*) випадкової величини для $N = 10$ розраховується так:

$$D = E[D] = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{5}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{2}{10} = 3.1$$

♦ 1.2 Закон великих чисел. Математичне сподівання. Нормовані гістограми

Якщо підкинути гральну кістку набагато більше за 10 разів, і розрахувати середнє всіх результатів, то зі збільшенням N , середнє буде майже напевне збігатися зі значенням так званого сподівання (*expectation*, *expected value*). Цей факт відомий як Закон великих чисел [48].

Нехай дискретна випадкова величина X може набувати значення $x_1, x_2, \dots$, відповідно з ймовірностями $P(x_1), P(x_2), \dots$, причому $\sum_x P(x) = 1$. Тоді за визначенням Чебишева [49]:

Математичне сподівання будь-якої випадкової величини – сума всіх можливих для неї значень, помножених на їхні ймовірності:

$$\mu = E(X) = \sum_x x \cdot P(x) \quad (2.3)$$

де μ – *середнє значення* випадкової величини X , областю можливих значень якої є множина $X = x$;

E – *оператор* математичного сподівання (*Expected value*);

$E(X)$ – математичне сподівання величини X .

Формула (2.3) має такий самий вигляд, як і (2.1), оскільки у прикладі з підкиданням кістки ВВ приймає ряд дискретних значень. Для неперервної випадкової величини математичне сподівання визначається інтегралом (див. п. ♦ 1.4).

Величина $P(d_i)$ в досліді з кидання кубика показує, у скількох випадках з N можливих випадатиме d_i (певне число точок на грані) і при $N \rightarrow \infty$ буде дорівнювати $P(D)$ – ймовірності отримати D (див. останній рядок Табл. 2.2).

Таким чином, при $N \rightarrow \infty$ значення ймовірностей випадкових величин по всій вибірці прямують до своїх межових значень, які власне і будуть ймовірністю події. В цьому можна переконатися, якщо порівняти гістограми на Рис. 2.1 а–г: чим більша кількість випробувань, тим більш рівномірним стає *розподіл* кількості випадінь певної грані кубика.

На Рис. 2.2 наведені нормовані гістограми тих, що показані на Рис. 2.1 (Додаток Б). Однак, на Рис. 2.2 по вертикальній осі відкладені значення ймовірностей випадкових величин $P(d_i)$. У термінах статистики: на графіках Рис. 2.2 представлені відносні частотні розподіли, для яких кожне значення розділене (*нормоване*) на кількість результатів у вибірці, тобто на розмір вибірки.

В нашому прикладі всі грані кубика є рівноймовірними, тому при $N \rightarrow \infty$ ймовірності випадіння однієї з 6-ти можливих граней кубика з певною кількістю білих кружків прямуватиме до $\frac{1}{6} = 0.167$ (див. останній рядок Табл. 2.2).

Для прикладу послідовності десяти випадінь гральної кістки (Табл. 2.1) середнє значення дорівнює $E(D) = 3.1$ (Табл. 2.3), що відрізняється від математичного сподівання $E(D) = 3.5$ на число 0.4. Зближення є відносно повільним: ймовірність, що середнє знаходиться в межах 3.5 ± 0.1 , дорівнює 21.6% для 10-ти спроб, 46.1% для 100 спроб і 93.7% для 1000 спроб (Табл. 2.3) [49]. Середні значення для довших послідовностей кидання гральної кістки при $N \rightarrow \infty$ збігаються до математичного сподівання із значенням в 3.5. Тобто, можна сказати, що ряд середніх значень у досліді з підкидання кістки при $N \rightarrow \infty$ є збіжним.

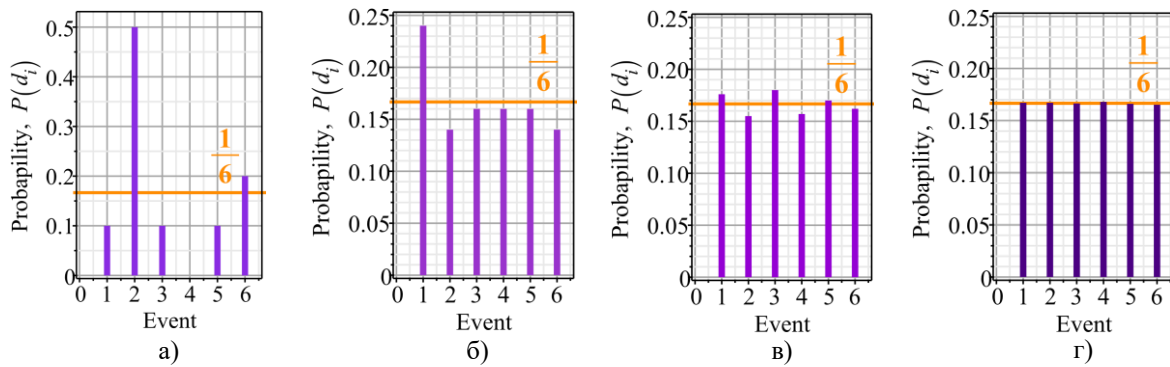


Рис. 2.2 – Нормовані гістограми для чотирьох вибірок:
а) 10 дослідів; б) 100 дослідів; в) 1000 дослідів; г) 100 000 дослідів.

♦ 1.3 Стандартне відхилення. Дисперсія

Для наочної характеристики ступеня розкиду значень випадкової величини відносно її математичного сподівання μ Карл Пірсон у 1894 році запропонував використовувати стандартне відхилення (*standard deviation*), яке ще називають **середнім квадратичним відхиленням** [50] (див. Табл. 2.3).

Стандартне відхилення – показник розсіювання (розкиду) значень випадкової величини відносно її математичного сподівання μ , тобто центру розподілу:

$$\sigma = \sqrt{E[(X - \mu)^2]} \quad (2.4)$$

Для дискретної ВВ стандартне відхилення розраховується за формулою, аналогічною (2.2) [50]:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N P(x_i) \cdot (x_i - \mu)^2} \quad (2.5)$$

Великі значення σ , співставні з величиною μ , означають, що точки можуть бути розподілені далеко від середнього, відповідно, малі значення σ свідчать про те, що точки зосереджені близько до середнього значення вибірки (див., наприклад, графік з прикладом вибірок двох сукупностей з однаковим середнім, але з різними стандартними відхиленнями у [50]).

У 1918 році англійський статистик Рональд Фішер у якості міри розсіяння значень випадкової величини відносно середнього значення розподілу запропонував використовувати **дисперсію** (*variance* – варіація) – квадрат стандартного відхилення σ^2 [51]. Іноді дисперсію називають середньоквадратичним відхиленням. Однак, часті непорозуміння під час використання термінології призвели до того, що у сучасній літературі, в основному, можна зустріти термін «дисперсія».

♦ 1.4 Розподіл ймовірності. Функція розподілу. Густина ймовірності

Розподіл ймовірності (*probability distribution*) – закон (функція, правило, формула, таблиця, графік і таке інше), що описує область значень випадкової величини X та відповідні ймовірності появи цих значень $P(x)$.

Математичний опис розподілу ймовірностей відрізняється для дискретних (рядів, масивів а т. і.) і неперервних випадкових величин. Розподіл ймовірностей величини X (дискретної або неперервної) може бути однозначно описаний своєю функцією розподілу ймовірностей $F(x)$, яка визначається як:

Функція розподілу (*distribution function*) – визначає ймовірність того, що X прийме значення менше або рівне x : $F(x) = P(X \leq x)$ (див. [52], [53]).

Приклад відносного частотного розподілу ймовірності дискретної випадкової величини за великих значень N можна бачити на гістограмах в) та г) Рис. 2.2. Але навіть за $N \rightarrow \infty$ розподіл все одно буде залишатися дискретним, оскільки в нашій грі ВВ приймає тільки 6 можливих значень.

Якщо ж кількість можливих значень ВВ буде набагато більшою за 6, або навіть такою, що прямує до нескінченності, то можна говорити про неперервну ВВ. У такому разі функція розподілу неперервної ВВ за своєю суттю буде межею, до якої прямує розподіл ймовірності $P(X \leq x)$, коли розмір вибірки прямує до розміру генеральної сукупності, тобто $x \rightarrow \infty$. Причому $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ та $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ (див. [52], [53]).

Отже, функція розподілу дискретної ВВ зводиться до простого сумування ймовірностей ВВ:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i) \quad (2.6)$$

Для неперервної ВВ не існує ряду розподілу, як то було для дискретної ВВ в Табл. 2.2. Тому для *неперервної* ВВ ймовірність того, що X потрапить у нескінченно малий інтервал $[x, x + dx]$, визначатиметься деякою функцією $f(x)dx$, де $f(x)$ – **функція густини ймовірності** або просто густина ймовірності [54].

Густина ймовірності (*probability density*) $f(x)$ *неперервної* випадкової величини X – перша похідна від інтегральної функції розподілу ймовірності $F(x)$, невід’ємна за будь-яких x і нормована:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad F(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (2.7)$$

Тоді функція розподілу неперервної ВВ буде мати такий вигляд [54]:

$$F(a \leq X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.8)$$

Для неперервної ВВ математичне сподівання визначається функцією густини ймовірності (2.7) і є інтегралом [49]:

$$\mu = E(X) = \int_x x \cdot f(x)dx \quad (2.9)$$

Так само стандартне відхилення для неперервної ВВ є коренем квадратним з інтегралу [50]:

$$\sigma = \sqrt{\int_x (x_i - \mu)^2 \cdot f(x)dx} \quad (2.10)$$

♦ 1.5 Нормальний розподіл (розподіл Гауса)

Виберемо 1000 чоловіків і побудуємо гістограму їхнього зросту як на Рис. 2.3. Графік має пік в точці середнього зросту в групі (трохи більше 175 см), а при цьому спостерігається деякий розкид навколо середнього. Причому, більша частина значень, близьких до середнього, концентрується поблизу центру, а лише незначна частина рівномірно розподіляється вліво та вправо від нього.

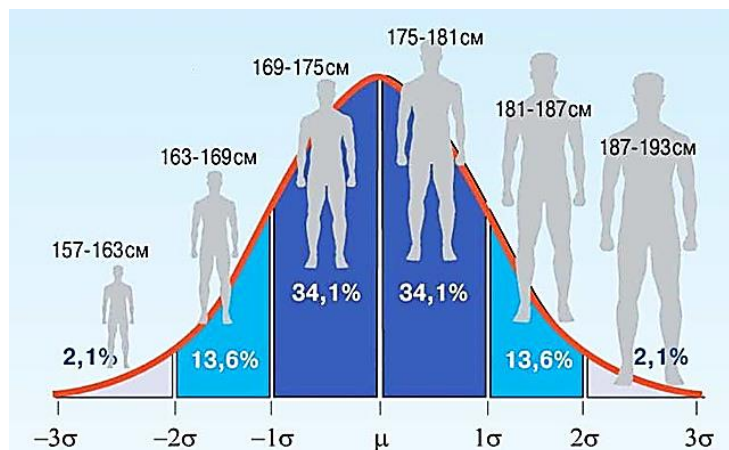


Рис. 2.3 – Нормований нормальний розподіл зросту чоловіків з параметрами: $\mu = 0$, $\sigma = 1$ [55].

Крива вигляду, як на Рис. 2.3, отримала назву **нормального розподілу**, або **розподілу Гауса** [56]. На гістограмі Рис. 2.3 видно, що 68% всіх значень зросту знаходиться на відстані не більше одного стандартного відхилення σ від середнього, тобто, в діапазоні від -1σ до $+1\sigma$. Отже, 68% значень лежать в діапазоні $\pm 1\sigma$ (стандартного відхилення від середнього). Подивимось на ширший діапазон, тобто 95% – значення зросту знаходяться на відстані не більше 2-х стандартних відхилень, тобто у діапазоні від -2σ до $+2\sigma$. Іншими словами, діапазон $\pm 2\sigma$ містить 95% значень. Або можна сказати так: при *нормальному розподілі* значення менші -2σ або більші за $+2\sigma$ складають менше 5% від усіх відносних частот вибірки.

Для розуміння аналітичного вигляду (формули) закону нормального розподілу неперервної величини, графік якого виглядає подібно до Рис. 2.3, простіше прослідкувати за історією його появи. У 1738 році ґрунтовну роботу з апроксимації розподілу (точніше, біноміального розподілу) випадкової величини надрукував Абрахам де Муавр [57]. Він вперше увів функцію нормального (нормалізованого) розподілу для його формалізації.

Отже, **формула нормального розподілу** задається тільки двома параметрами: середнім значенням μ і стандартним відхиленням σ [56]:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.11)$$

Детальніша інформація про нормальний розподіл в Maple 2021 розміщена в розділі Help у пункті **Statistics, Distribution**, create new distribution або за посиланням **Statistics [Distribution]** [59].

> ?Statistics [Distribution] ;

♦ 1.6 Коефіцієнт асиметрії

Дещо розширене визначення коефіцієнту асиметрії, виходячи з [60], адаптоване під задачі цього навчального курсу є таким:

Коефіцієнт асиметрії, (skewnes) – числова характеристика розподілу ймовірностей дійсної випадкової величини, яка показує ступінь асиметричності ряду або густини розподілу ймовірності даної випадкової величини відносно її математичного сподівання.

Коефіцієнт **додатний**, якщо довша частина розподілу знаходиться праворуч від його моди, і **від'ємний**, якщо навпаки, «довша» частина знаходиться ліворуч від моди. Коефіцієнт асиметрії **нормального розподілу** є нульовим в силу симетрії цього розподілу.

Сенс коефіцієнта асиметрії полягає в наступному. У разі позитивного значення коефіцієнта (позитивного скося) найвищі значення (правий «хвіст») у масиві даних є більш ймовірними, ніж найнижчі. Відповідно, в разі негативного коефіцієнта асиметрії більш ймовірними будуть найнижчі значення. Наприклад, в економіці коефіцієнт асиметрії дозволяє зробити висновки щодо прибутків: під час дослідження прибутків підприємства за деякий період часу найвищі прибутки вважаються більш ймовірними за найнижчі при позитивному коефіцієнті асиметрії, найнижчі відповідно – при негативному [61].

Як правило, значення коефіцієнта асиметрії від -1 до $+1$ вважаються добрими, значення від -2 до $+2$ зазвичай вважається прийнятним [62]. Значення менші -2 та більші $+2$ вважаються показниками суттєвого відхилення від ненормального.

♦ 1.7 Коефіцієнт ексцесу

Наведемо визначення ексцесу, виходячи з [63]:

Коефіцієнт ексцесу (kurtosis) – кількісна міра гостроти піку розподілу ймовірностей дійсної випадкової величини, яка характеризує «крутість» вершини ряду або густини розподілу ймовірності даної випадкової величини відносно нормального розподілу.

Цей коефіцієнт характеризує «гостроту», тобто, стрімкість зростання кривої розподілу у порівнянні з нормальною кривою Гауса, для якої ексцес вважається нульовим. Позитивний коефіцієнт ексцесу характеризує розподіли з гострішим, ніж у нормального, піком, негативний – для більш плоских вершин розподілу, ніж у нормального. Так, наприклад, економічний сенс цієї характеристики полягає в наступному [61]: якщо дві фінансові операції мають симетричні розподіли доходів і однакові середні, менш ризикованою вважається інвестиція з більшою величиною ексцесу.

Інтерпретація значень асиметрії та ексцесу під час порівняння рядів даних випадкових величин, навіть різних інтервалів ряду однієї величини, – є, певною мірою, творчістю дослідника і суттєво залежить від такого раціонального фактору, як глибина досвідченості та обізнаності дослідника в певній темі, та ірраціонального фактору – його інтуїції.

За аналогією з коефіцієнтом асиметрії загальне правило для ексцесу полягає в тому, що при значеннях, більших за $+2$, розподіл надто гострий. Значення ексцесу, менші за -2 , вказують на надто плоский розподіл. Коли асиметрія та ексцес близькі до 0 , розподіл випадкової величини вважається нормальним [62].

| 2.1.2 Статистичний аналіз електроміограм

Розглянемо статистичні методи аналізу на прикладі електроміограм [5], [6]. Електронейроміографія (ЕНМГ), або «клінічна електроміографія» – метод дослідження нервової системи шляхом реєстрації електричної активності м'язів та викликаних різними стимулюючими факторами електричних потенціалів м'язів і периферичних нервів.

На Рис. 2.4 представлена електроміограма практично здорового пацієнта (див. ∞ Практика 2). Сигнал дискретизований у часі, тобто вимірювався через рівні проміжки часу – **відліки (samples)**. Автоматичне визначення статистичних характеристик сигналу представлено у Табл. 2.4. Існує багато програмних продуктів для визначення статистичних характеристик часових рядів. Результати Табл. 2.4 отримані в математичному середовищі Maple 2021 за допомогою команди **DataSummary** програмного пакету **Statistics**.

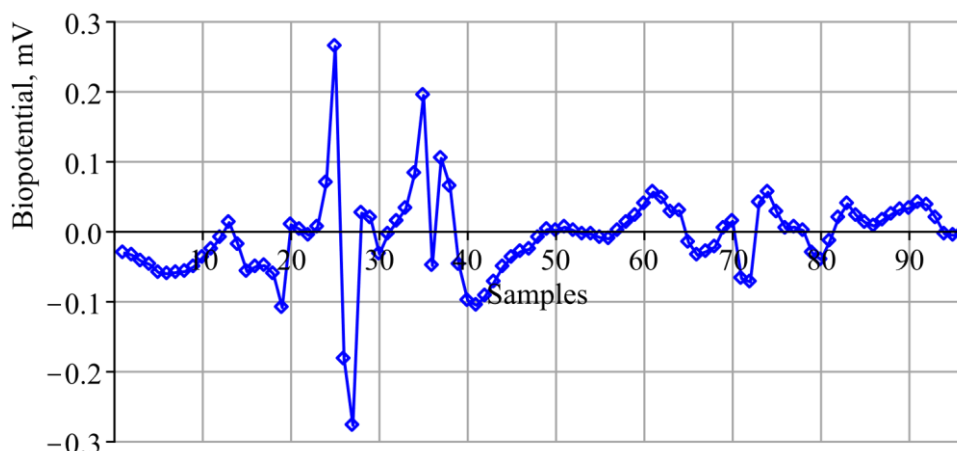


Рис. 2.4 – Електроміограма практично здорового пацієнта.

Статистичні характеристики електроміограми Рис. 2.4.

Параметр	Мат. сподівання	Станд. відхилення	Екссес	Асиметрія	Максимум	Мінімум
Значення	-0.007	0.063	9.51	0.107	0.265	-0.277

Відносно велике значення коефіцієнту екссесу (9.51) для часового ряду ЕМГ свідчить про відмінність розподілу величин біопотенціалів ЕМГ на Рис. 2.4 від нормального розподілу Гауса (Рис. 2.5, див. [↔ Практика 2](#)).

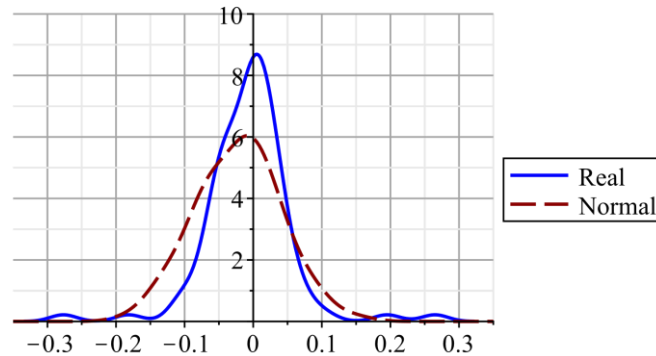


Рис. 2.5 – Розподіли величин біопотенціалів ЕМГ здорового пацієнта: реальний та нормальний розподіли Гауса.

Рис. 2.5 показує **розподіл густини ймовірності** окремих результатів (піків) міограми *здорового* пацієнта (суцільна крива) у порівнянні з *нормальним розподілом Гауса* (пунктирна крива) за умови рівного математичного очкування та стандартного відхилення обох розподілів. З графіку Рис. 2.5 видно, що розподіл величин біопотенціалів на міограмі Рис. 2.4 крутіший та вузьчий від нормального розподілу. Відмінність розподілів компонент біомедичних сигналів від нормального розподілу є загальною тенденцією.

На Рис. 2.6 представлено порівняння нормального розподілу (суцільна крива) з розподілом потенціалів ЕМГ хворого на *нейропатію* (пунктирна лінія). Відмінність розподілу ймовірностей сигналів міограми від нормального розподілу з таким самим математичним сподіванням та стандартним відхиленням в цьому випадку є значно більш виразною, ніж для здорового пацієнта.

Рис. 2.7 показує таку саму істотну відмінність розподілу густини ймовірності в міограмі здорового пацієнта (суцільна лінія), який є помітно вузьчим та вищим від аналогічного розподілу для хворого на нейропатію (пунктирна лінія).

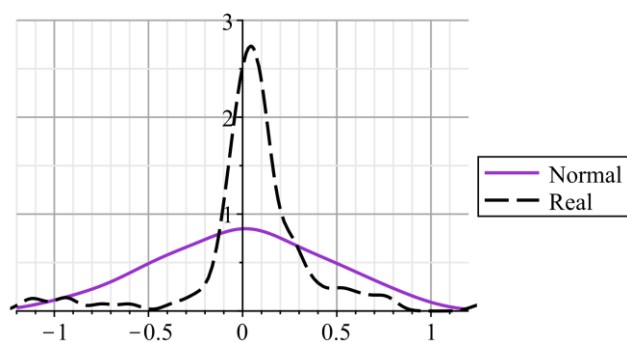


Рис. 2.6 – Нормальний та реальний розподіли потенціалів ЕМГ хворого на нейропатію.

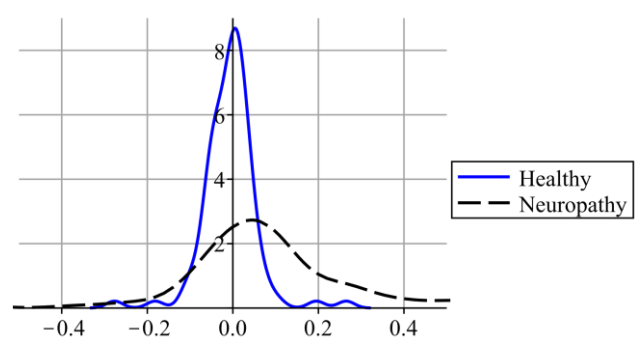


Рис. 2.7 – Розподіли потенціалів ЕМГ здорового пацієнта та хворого на нейропатію.

Як видно, побудова розподілів ймовірностей сигналів на міограмах та їх порівняльний аналіз є корисними методами виявлення відмінностей в сигналах.

З інших розповсюджених методів статистичної обробки сигналів варто розглянути **метод статистичного згладжування часових рядів даних** (англ. «*data smoothing*») для виявлення трендів. Ідея методу, який отримав назву «**метод рухливого середнього**» (*moving average*), доволі проста: результати вимірювань об'єднують у невеликі рівні групи (від 3 результатів і більше) і в кожній такій групі знаходять середнє значення, або, інколи, медіану, якими і замінюють кожен результат.

Сутність методики демонструється на Рис. 2.8 (Maple-код у Додаток Б), де результати певних вимірювань (крива 1) групуються по троє і показано ковне розбиття на такі групи. Саме тому метод згладжування даних інколи ще називають «**методом ковзного середнього**». Зверніть увагу: інтервали групування перекриваються, а

не припасовані одне до одного. Крива 1 – результати до згладжування, крива 2 – після згладжування, 3 – інтервали групування.

Як видно з Рис. 2.8, згладжування результатів значно зменшує висоту «піків» на первинній кривій, отже, при цьому частина початкової і кінцевої інформації втрачається. Згладжена крива залишає лише тренд первинної залежності, нівелюючи коливання навколо трендової лінії.

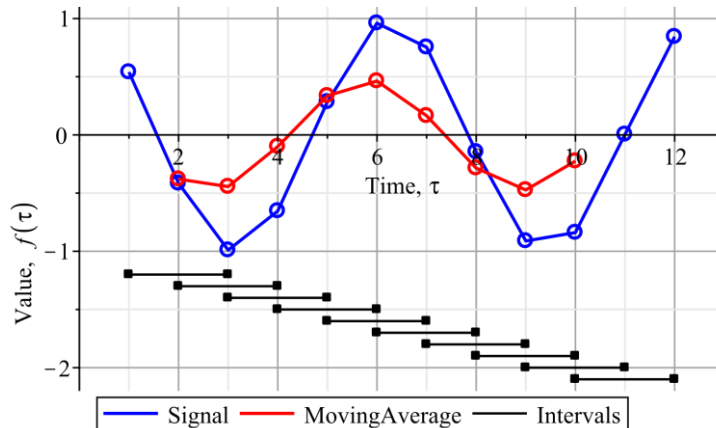


Рис. 2.8 – Застосування до сигналу методу ковзного середнього.

2.1.3 Кореляція, автокореляція та крос-кореляція

Кореляція, і її окремий випадок для центрованих сигналів – **коваріація** (*covariance*), є методом аналізу сигналів. Цей математичний апарат знайшов застосування в обробці зображень у сфері комп'ютерного зору або дистанційного зондування з супутників, у яких порівнюються дані з різних зображень, у радарних або гідроакустичних установках для дальнометрії та місцевизначення, у яких порівнюються передані та відбиті сигнали.

Кореляція (*correlation* – взаємозв'язок) – статистичне дослідження (стохастичної) залежності між випадковими величинами, дозволяє визначити ступінь незалежності одного процесу від іншого або встановити подібність одного набору даних до іншого.

У найпростішому випадку кореляція використовується для дослідження двох вибірок, тобто наборів даних, у загальному – багатовимірних комплексів, груп деяких параметрів або об'єктів [64].

В загальному вигляді гіпотеза про наявність кореляції передбачає, що зміна значення змінної А відбудеться одночасно з пропорційною зміною значення В. Мірою залежності між експериментальними наборами даних є числа – коефіцієнти зв'язку [64]. Визначення сили та напрямку взаємозв'язку між змінними є однією з важливих проблем аналізу даних. В загальному випадку для цього може бути застосований метод **кореляційного аналізу** [65]. Однак, наявність кореляційного зв'язку не означає існування причинно-наслідкового зв'язку між досліджуваними ознаками. Зв'язок може бути зумовлений тим, що обидві ознаки мають причинно-наслідковий зв'язок з певним іншим фактором ([66], с. 101).

Кореляційний аналіз тісно пов'язаний із регресійним [65]. Методи кореляційного аналізу дозволяють перевіряти наявність значущого зв'язку між досліджуваними змінними до здійснення регресійного аналізу. Але при цьому необхідно враховувати, що звичайні методи кореляційного аналізу дають змогу перевіряти лише гіпотезу про наявність лінійного зв'язку. Якщо зв'язок є, але він нелінійний, висновки, отримані за допомогою кореляційного аналізу, можуть бути помилковими [66], стор. 196.

В якості числової характеристики ступеня взаємозв'язку між змінними використовуються кореляційний момент та коефіцієнт кореляції або кореляційна функція. В силу безрозмірності коефіцієнт кореляції використовується частіше.

Кореляція може бути лінійною або нелінійною, відштовхуючись від типу залежності, яка фактично існує між змінними. Досить часто на практиці розглядають тільки лінійну кореляцію (взаємозв'язок), але більш глибокий аналіз потребує використання для дослідження процесів нелінійних залежностей. Складну нелінійну залежність можна спростити, але знати про її існування необхідно для того, щоб побудувати адекватну модель процесу [64].

На Рис. 2.9 представлена доволі тісна позитивна кореляція поміж діастолічним тиском (ДТ) крові та частотою пульсу (ЧП) пацієнта.

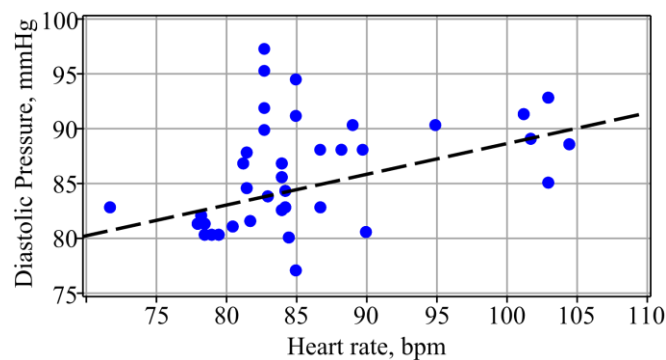


Рис. 2.9 – Дані вимірювань ДТ та пульсу (точки) та пряма лінійної інтерполяції (штрих-пунктирна лінія).

Кореляція є невід’ємною частиною процесу згортки [43].

Автокореляційна функція (АФ) – це кореляція функції з самою собою зміщеною на певну величину незалежної змінної (таке зміщення називають лагом).

Автокореляція використовується для знаходження закономірностей у ряді даних (наприклад, часовому), зокрема таких як прихована періодичність. Часто застосовується у статистиці та обробці сигналів для аналізу функцій або рядів даних [67].

Математично автокореляційна функція визначається так:

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t - \tau)dt \quad (2.12)$$

Фактично АФ є згортою зі своєю копією, зсунутою по осі часу на певний лаг τ . Згортка, по суті, та ж кореляція двох послідовностей даних, при обчисленні якої одна з послідовностей обернена в часі. Це означає, що для обчислення кореляції та згортки можуть використовуватися ті ж самі алгоритми.

Графік автокореляційної функції можна отримати, відклавши по осі ординат коефіцієнт кореляції двох функцій (базової та функції, зсунутої на величину τ) а по осі абсцис величину τ . Якщо вхідна функція **суворо періодична**, то на графіку автокореляційної функції теж буде **суворо періодична** функція. Отже, з графіку автокореляційної функції можна судити про *періодичність* базової функції, а отже і про її частотні характеристики. Це застосовується для аналізу складних коливань.

Автокореляційна функція стаціонарних процесів має такі **властивості**:

1. Вона є парною, тобто:

$$R_f(\tau) = R_f(-\tau) \quad (2.13)$$

2. Абсолютне значення автокореляційної функції для будь-якого значення аргументу не перевищує її значення для аргументу $\tau = 0$:

$$R_f(\tau) \leq R_f(0) \quad (2.14)$$

3. Для стаціонарних випадкових процесів має місце таке співвідношення:

$$R_f(\tau > 0) = 0 \quad (2.15)$$

Використання автокореляційної функції є потужним засобом виділення періодичних компонентів вхідного сигналу, який аналізується. При цьому можна знаходити деякі числові величини, які характеризують сигнал, що обробляється цим методом, а саме:

1. середню частоту (або середній період) періодичних складових;
2. періодичність процесу – коефіцієнт відношення потужності (середньої амплітуди) періодичної складової сигналу до потужності випадкової складової;
3. стійкість періодичності сигналу – характерний час згасання осциляцій автокореляційної функції.

На Рис. 2.10 показана нормована АФ ($R_f(0) = 1$) сигналу ЕМГ здорового пацієнта, представленого вище на Рис. 2.4 (див. [∞ Практика 2](#)).

АФ на Рис. 2.10 свідчить про можливий невеликий внесок (не більше 15%) в сигнал відносно повільно згасаючих періодичних процесів (з періодом приблизно 12-13 відліків). У той же час в первинному сигналі домінує випадкова компонента (приблизно 85%). Періодичні процеси в міограмі здорового пацієнта є відносно стійкими: на корелограми, тобто графіку автокореляційної функції, простежується не менше 4-5 періодів основних коливань.

Корелограма хворого на нейропатію представлена на Рис. 2.11. Вона суттєво відрізняється від корелограми здорової людини. По-перше, період основних коливань у цьому випадку помітно коротший (приблизно 5-6 відліків), по-друге, основні коливання з коротким періодом виразно модульовані більш довгими хвилями. По-третє, стійкість періодичності в цьому випадку вища, а час згасання коливань довший, ніж для здорової людини (див. Рис. 2.10).

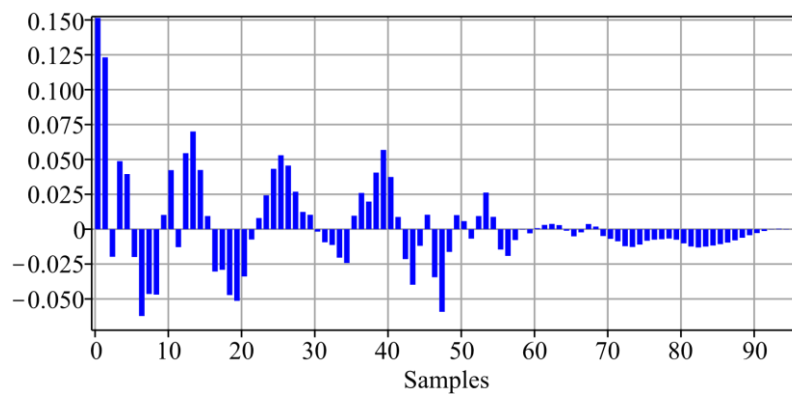


Рис. 2.10 – Автокореляційна функція міограми здорового пацієнта.

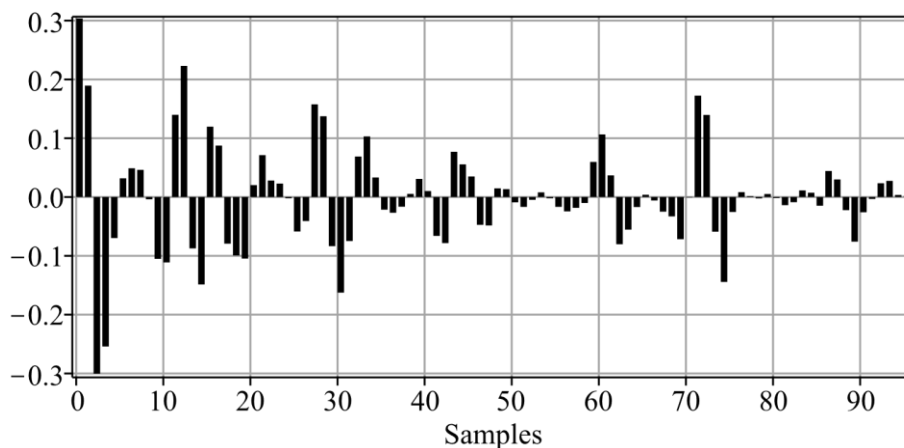


Рис. 2.11 – АФ міограми пацієнта хворого на нейропатію.

Внесок періодичних процесів в цьому випадку такий самий (приблизно 15%), як і для здорової людини, отже, в міограмі хворого на нейропатію також домінують випадкові компоненти.

Крос-кореляційна функція (або функція взаємної кореляції, англ. *cross-correlation*) оцінює кореляцію (зв'язок) поміж двома різними сигналами у вигляді послідовностей [68]. При корелюванні рядів динаміки часто має місце взаємний вплив процесів за умови зсуву тимчасових серій одна щодо одної на деякий часовий проміжок (лаг k), тобто вплив одного явища на інше проявляється з деяким запізненням чи випередженням [69]. В більшості випадків не можна просто судити про наявність тимчасового лага і, тим більше, про конкретну його довжину.

У деяких випадках наявність тимчасового лага є очевидним: наприклад, у ланцюзі «хижак – жертва» спалах популяції хижака відбувається через певний проміжок після спалаху популяції жертви, після чого відбувається зниження чисельності з тим самим тимчасовим лагом. Приблизно так само й у розвитку хвороб: прояв симптомів відбувається через деякий час, наприклад, після досягнення певного рівня активності вірусу, або іншого патогену, тобто, коли організм вже не здатен подолати хворобу самотужки.

2.2 ВАРІАБЕЛЬНІСТЬ РИТМІВ: КАРДІОІНТЕРВАЛОГРАФІЯ

Кардіоінтервалографія (КІГ) – метод кількісних оцінок варіабельності серцевих ритмів (ВСР) [70]. Вихідним сигналом для КІГ є ЕКГ, фрагмент якої схематично зображений на Рис. 2.12, з якого видно, що часові інтервали поміж так званими R-зубцями ЕКГ не є однаковими: стрілками відмічені два явно не рівних за протяжністю в часі інтервали.

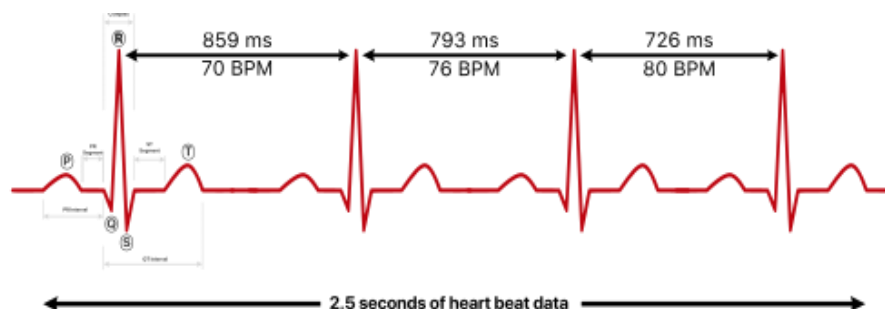


Рис. 2.12 – Варіабельність серцевого ритму [71].

Послідовно вимірюючи певну кількість таких інтервалів (зазвичай, це не менше 100 інтервалів, або більше) і відкладаючи їх довжину в часі на вертикальній осі ординат а номер інтервалу на горизонтальній осі абсцис можна отримати реальні КІГ, схожі на ту, яка представлена на Рис. 2.13.

Варіабельність ритму, зокрема серцевого, оцінюється такими цифровими показниками, які отримуються після статистичної обробки КІГ:

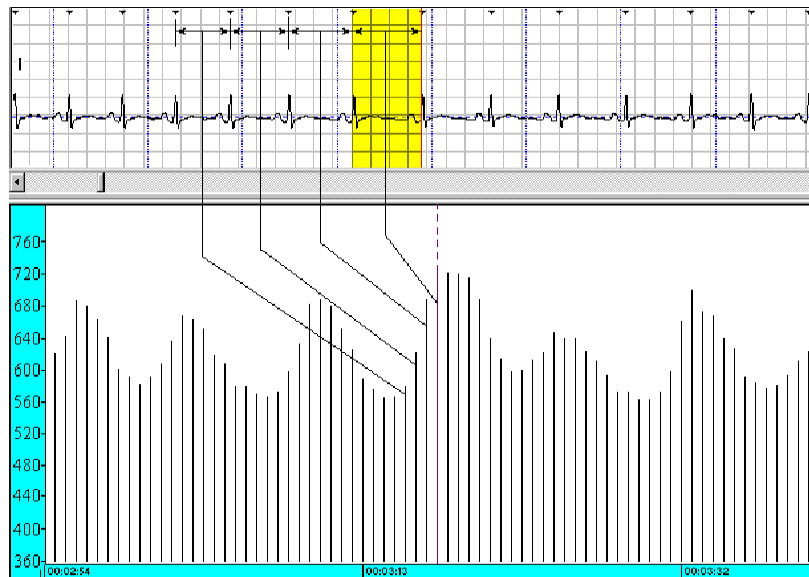


Рис. 2.13 – Кардіоінтервалограма (внизу) та відповідність її піків часовим інтервалам серцевого ритму [72], [73].

- Мода кардіоінтервалів (МО) – найбільш часто переставлене в отриманому статистичному ряді значення довжини кардіоінтервалу. МО вказує на найбільш ймовірний рівень функціонування синусного вузлу серця. За симетричного розподілу (симетричній гістограмі, як на Рис. 2.5) МО збігається з математичним сподіванням (M , середнім значенням) кардіоінтервалу.
- Амплітуда моди (АМО) – числовий показник КІГ, який дорівнює числу кардіоінтервалів, котрі потрапляють у той проміжок часу, що відповідає МО. Краще всього нормувати цей показник, вказуючи не кількість кардіоінтервалів, а їх долю (відносну кількість). Нормована АМО лежить в межах: $0 < AMO < 1$, або може бути представлена у відсотках (від 0 до 100 %). АМО відображає ефект стабілізації в центральному управлінні серцевим ритмом (СР) і залежить від зовнішніх впливів.
- Варіаційний розмах (Δx) – показник, який відображає ступінь варіабельності величин кардіоінтервалів (тобто ширину основи гістограми). Обчислюється за такою формулою:

$$\Delta x = X_{max} - X_{min} \quad (2.16)$$

де X_{max}, X_{min} – значення максимального та мінімального діапазонів гістограми відповідно (її крайні і проміжки часу).

Перелічені показники відносять до так званих *первинних* показників. *Вторинними* показниками КІГ називають такі параметри як-от:

1. *Індекс вегетативної рівноваги (ІВР)* – вказує на співвідношення симпатичного та парасимпатичного відділів нервової системи:

$$ІВР = \frac{АМО}{\Delta x} \quad (2.17)$$

2. *Показник адекватності процесів (ПАПР)* – показує відповідність поміж активністю симпатичного відділу нервової системи та провідним рівнем функціонування синусного вузлу. Порівнюючи ПАПР з частотою пульсу, можна судити про надлишковість або недостатність централізованого керування серцевим ритмом (СР):

$$ПАПР = \frac{АМО}{МО} \quad (2.18)$$

3. *Вегетативний показник ритму (ВПР)* – дозволяє судити про вегетативний баланс з точки зору активності автономного контуру регулювання. Розрахунок здійснюють за формулою:

$$ВПР = \frac{1}{МО \cdot \Delta x} \quad (2.19)$$

4. *Індекс напруженості (ІН)* регуляторних систем обчислюють так:

$$ІН = \frac{АМО}{2МО \cdot \Delta x} \quad (2.20)$$

Збільшення симпатичного тону нервової системи призводить до зростання АМО та зменшенню МО, отже, зростає індекс напруженості ІН. Посилення парасимпатичних впливів, навпаки, сприяє зменшенню АМО та

збільшенню МО, отже, знижує індекс напруженості. Для здорових людей в стані фізичного та психічного спокою ІН перебуває в інтервалі від 80 до 140.

Як видно з виразів (2.17)-(2.20), всі вторинні показники розраховуються з використанням первинних показників КІГ.

Статистичним стандартом автоматичної обробки КІГ є визначення трьох таких показників:

1. SDNN – стандартне відхилення для всієї сукупності інтервалів, відображає всі періодичні складові варіабельності за час запису кардіоінтервалограми, іншими словами – він є інтегральним показником ВСР;
2. RMSSD – квадратний корінь з суми квадратів різностей між сусідніми інтервалами, показник є порівняльною оцінкою величин інтервалів.
3. pNN50 – цей параметр дорівнює відношенню кількості тих інтервалів, які відрізняються один від одного більше, ніж на 50 мс, до повного числа інтервалів кардіоінтервалограми.

Для аналізу ВСР користуються також **геометричними методами** [70]:

- гістограми (Рис. 2.1, Рис. 2.2, Рис. 2.14);
- скатерограми (Рис. 2.15).

Один з них полягає в побудові закону розподілу довжини інтервалів як випадкових величин. Такий розподіл відображається у вигляді **гістограми** (Рис. 2.14). По горизонтальній осі відкладаються довжини інтервалів з певним кроком (зазвичай, 50 мс), а по вертикальній кількість (або доля) таких інтервалів від загальної їх кількості.

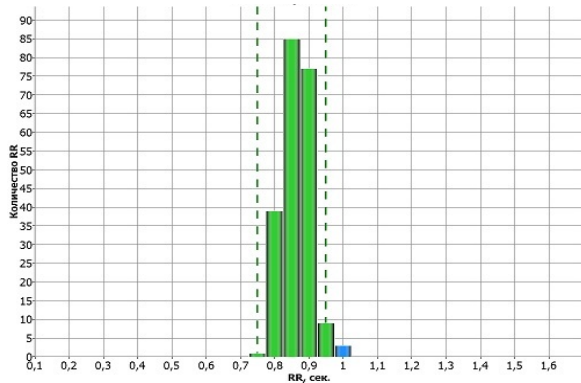


Рис. 2.14 – Гістограма [70].

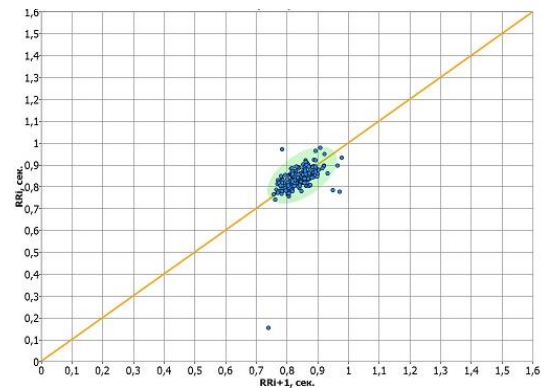


Рис. 2.15 – Скатерограма [70].

Якби всі інтервали були рівної довжини, то пара сусідніх інтервалів не відрізнялася б довжиною. Відкладаючи по вертикальній осі довжину попереднього інтервалу, а по горизонтальній – довжину наступного, ми отримували б одну й ту саму точку на площині, яка лежала б на бісектрисі кута поміж осями десь у центрі графіку. Втім, сусідні інтервали в реальних парах відрізняються, тому замість однієї точки ми отримуємо приблизно таку еліпсоїдальну хмарку точок, як на Рис. 2.15, який представляє так звані **скатерограми**.

2.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. Наведіть приклади методів візуалізації результатів автоматичного аналізу процесів.
2. Поясніть сутність методу автокореляційного аналізу.
3. Дайте визначення таких понять математичної статистики: дослід, випадкова подія, значення випадкової величини, вибірка, ймовірність випадкової величини, частота випадкової величини.
4. Поясніть призначення частотних розподілів.
5. Що стверджує Закон великих чисел? Для чого він використовується?
6. Запишіть формулу і дайте визначення математичного сподівання.
7. Дайте визначення стандартного відхилення і дисперсії випадкової величини. Запишіть та поясніть відповідні формули.
8. Поясніть, в чому полягає перевага відносних частотних розподілів.
9. Поясніть, в чому полягає відмінність між математичним сподіванням неперервної та випадкової величин.
10. Запишіть формули для середнього квадратичного відхилення дискретної та випадкової величини, та поясніть величини, що входять до них.
11. Дайте визначення розподілу ймовірності. Як здійснюється математичний опис розподілу ймовірності дискретної та неперервної величин?
12. Поясніть зміст функції розподілу. Як визначається функція розподілу дискретної та неперервної випадкових величин?
13. Дайте визначення густини розподілу неперервної випадкової величини.
14. Запишіть формулу нормального розподілу та поясніть зміст величин.
15. Поясніть на прикладі, що являє собою нормальний розподіл.
16. В чому полягають особливості кривої нормального розподілу?

17. Назвіть дискретні та неперервні розподіли. Поясніть особливості найбільш важливих з них та сфери їх використання.
18. Дайте визначення та поясніть зміст коефіцієнта ексцесу.
19. Дайте визначення та поясніть зміст коефіцієнта асиметрії.
20. Поясніть зміст та призначення методу статистичного згладжування часових рядів даних. Які методи згладжування вам відомі?
21. Що являє собою тренд?
22. Поясніть зміст терміну «кореляція» та його призначення у ЦОС.
23. Як визначається коефіцієнт кореляції?
24. Поясніть поняття згортки. Як вона здійснюється?
25. Дайте визначення автокореляційної функції.
26. Яке призначення корелограми?
27. Поясніть зміст крос-кореляційної функції.
28. Поясніть зміст поняття варіабельності.

ПИТАННЯ

- 1  Спектральні методи аналізу сигналів.
- 2  Перетворення Фур'є та їх різновиди.

3.1 СПЕКТРАЛЬНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ СИГНАЛІВ

Як вам вже відомо з п. 2.1, об'єктом аналізу як такого може служити будь-який із процесів, представлених у вигляді:

- графіка,
- кривої,
- числового ряду,
- карти розподілу тощо.

Сигнали несуть вичерпну інформацію про фізичні процеси, що відбуваються в досліджуваному об'єкті. **Спектральний аналіз (СА)** являє собою потужний математичний апарат, який дозволяє досліджувати структуру сигналів. Тому СА знаходить широке застосування у різних областях науки і техніки:

- медицині,
- машинобудуванні,
- системах керування,
- сейсмології,
- астрономії,
- економіці,
- метеорології,
- акустиці тощо.

СА розглядає проблему визначення спектрального вмісту (тобто розподілу потужності по частоті) часового (і не тільки) ряду на основі кінцевого набору вимірювань за допомогою певних методів [74]. Історія спектрального аналізу як загальноприйнятої дисципліни почалася більше століття тому з роботи Шустера щодо виявлення циклічної поведінки в часових рядах. Історичний погляд на події в цій галузі можна знайти в [75].

Спектр (лат. *spectrum* від лат. *specter* – бачення, примара) у фізиці – розподіл значень фізичної величини (зазвичай, енергії, частоти або маси). Найчастіше під спектром розуміють електромагнітний спектр – це спектр частот (або, що те ж саме, енергій квантів) електромагнітного випромінювання. У науковий обіг термін «спектр» ввів ще Ісаак Ньютон у 1671–1672 роках для позначення багатobarвної смуги, схожої на веселку, яка отримується під час проходження сонячного променя крізь трикутну скляну призму.

Задачі СА сигналів вирішують багато методів, класифікація деяких з них наведена на Рис. 3.1. Детально методи СА описані в [74].

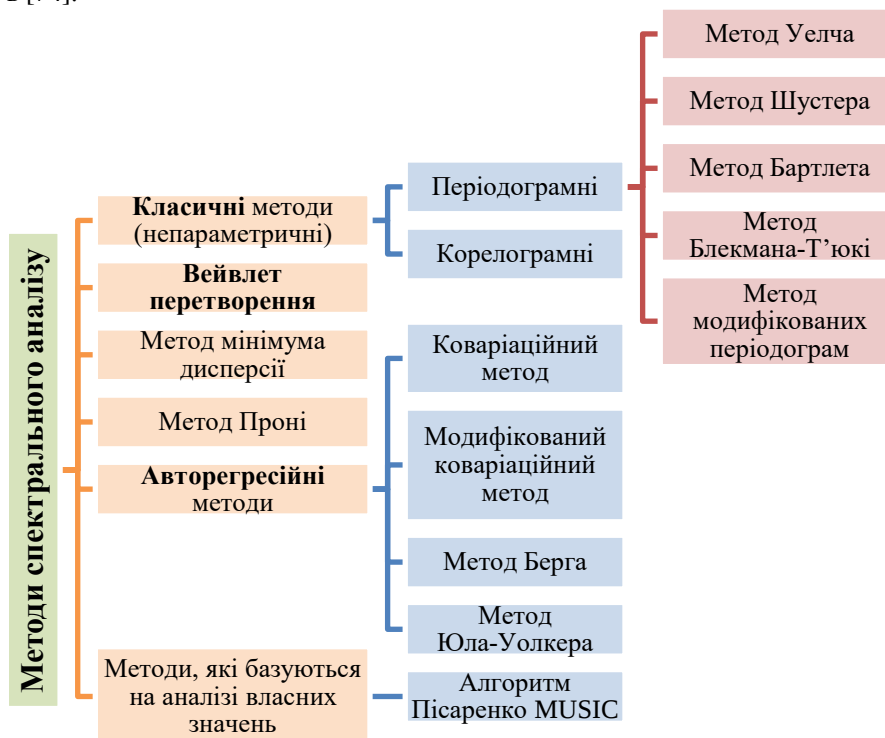


Рис. 3.1 – Класифікація деяких відомих методів СА.

3.1.1 Фур'є-аналіз

В задачах СА до недавнього часу найбільш широко використовувалося перетворення Фур'є. У межах Фур'є-аналізу сигнал розкладають на періодичні гармонічні компоненти (хвилі), локалізовані по частотах і делокалізовані у часі:

$$\{\sin(n\pi x), \cos(n\pi x)\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

які слугують ортонормованими базисними функціями для розкладання сигналів. Ґрунтовно про ПФ можна почитати, наприклад, у: [76], с. 7-8; [8], с. 25-27; [39], с. 134 та в перекладі [77]. На Рис. 3.2 (Maple-код у Додаток В) показано сигнал в часовому представленні, на Рис. 3.3 наведено частотний спектр сигналу, який є його Фур'є-образом (див. Додаток В).

Такий метод СА є найбільш придатним для періодичних, або майже періодичних, тобто стаціонарних функцій часу, або координат.

Головний недолік методу СА полягає в тому, що гармонічні функції мають однакові характеристики на всьому часовому проміжку їх визначення (тобто, по всій часовій осі). У той же час, більшість досліджуваних біомедичних сигналів є нестационарними і неперіодичними. Це означає, що їх частотне наповнення неперервно змінюється, відбиваючи динамічні фізичні процеси, що проходять в досліджуваному об'єкті. Тому локальні особливості таких сигналів будуть практично непомітні в спектрі, отриманому за допомогою ПФ.

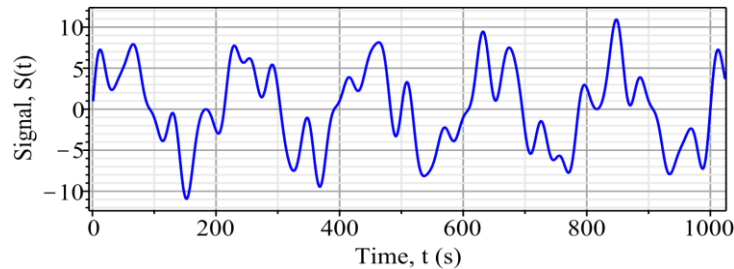


Рис. 3.2 – Деякий сигнал як функція часу.

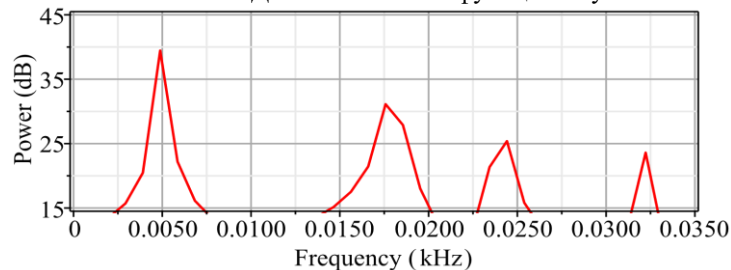


Рис. 3.3 – Частотний спектр сигналу з Рис. 3.2.

3.1.2 Вейвлет-аналіз

Вейвлети (від англ. *wavelet* – хвилька) – потужний інструментарій, який може вживатися у галузі обробки сигналів і стискання даних. Вейвлет-перетворення є чудовою альтернативою для перетворення Фур'є у багатьох ситуаціях, особливо для нестационарних та неперіодичних сигналів.

Для вейвлет-аналізу, як альтернативної методики спектрального аналізу, характерним є те, що сигнал розкладають на компоненти (базисні функції), добре локалізовані як у часі, так і у частотних діапазонах (Рис. 3.4, Рис. 3.5).

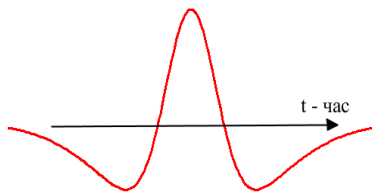


Рис. 3.4 – Вейвлет DOG як функція часу.

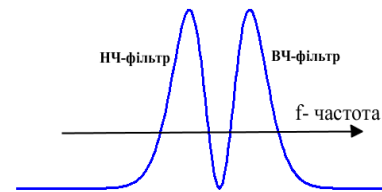


Рис. 3.5 – Вейвлет DOG у частотному представленні.

Вейвлети – це перенесені (b) та масштабовані (a) копії, так звані «дочірні» вейвлети, деякої швидко змінної функції (так званого «материнського» вейвлета $\psi(t)$, Рис. 3.4), середнє значення якої є нульовим:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.2)$$

На Рис. 3.4 наведено вейвлет DOG (Difference of Gaussians) в часовому представленні (як функція часу). На Рис. 3.5 представлений той же вейвлет (DOG) у частотному представленні (Фур'є-образ вейвлета, як функції частоти).

Ідея вейвлет-перетворення полягає в розкладанні сигналу за базисною системою функцій, котрі мають локальний сплеск і швидко убувають на нескінченності (Рис. 3.4). Зверніть увагу: всі вейвлети у частотному діапазоні виглядають так само, як на Рис. 3.5 виглядає DOG-вейвлет: набором з двох частотних фільтрів – НЧ та ВЧ – з вузькими смугами пропускання. Саме тому вейвлет-перетворення особливо придатні для випадків, коли сигнали, які потрібно аналізувати, неперіодичні та нестационарні.

Завдяки придатності до аналізу нестационарних сигналів вейвлет-перетворення стало потужною альтернативою перетворенню Фур'є в низці медичних програм. Вейвлет-методи використовуються для розпізнавання і виявлення ключових діагностичних ознак, а також для стискання БМС та БМЗ з мінімальними втратами діагностичної інформації. Зокрема, є наукові повідомлення, що вейвлет-перетворення дозволяє не тільки діагностувати

такі патології, як коронарна хвороба серця, нерегулярні серцеві скорочення тощо, але й дозволяє передбачати припадки у епілептичних хворих.

Навіть у тих випадках, коли діагностика може бути успішно проведена без використання комп'ютерних методів, цифрова обробка БМС та вивчення їх частотних спектрів може підвищити ефективність і надійність роботи діагностів.

3.2 ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ТА ЇХ РІЗНОВИД

Найбільш часто для спектральної обробки використовується спектр Фур'є, одержуваний на основі базису з гармонічних функцій – так зване **розкладання Фур'є**, або **перетворення Фур'є** (див. п. 3.1.1).

Основний зміст ПФ в тім, що вхідний сигнал довільної форми, яку неможливо описати аналітично, представляється у вигляді неперервної, або дискретної сукупності синусів або косинусів з різною частотою та амплітудою (див. (3.1)). Іншими словами, складна функція перетворюється в множину більш простих гармонічних функцій. Кожна синусоїда (або косинусоїда) з певною частотою та амплітудою, отримана в результаті розкладання Фур'є, називається спектральною складовою, або гармонікою первинного сигналу. Спектральні складові створюють **спектр Фур'є**.

Візуально спектр Фур'є представляється у вигляді графіка, на якому по горизонтальній осі відкладається частота, а по вертикалі – амплітуди окремих спектральних складових. Отже, кожна спектральна складова може бути представлена у вигляді відліку, положення якого по горизонталі відповідає її частоті, а висота – її амплітуді. Гармоніка з нульовою частотою називається постійною складовою.

3.2.1 Неперервне перетворення Фур'є

Неперервне перетворення Фур'є (НПФ) – інтегральне перетворення однієї комплекснозначної функції дійсної змінної $f(t)$ на іншу $F(\omega)$. Перетворення розкладає функцію $f(t)$ на осциляторні функції. Використовується для того, щоби розрахувати спектр частот сигналів змінних у часі (таких як мова або електрична напруга). Перетворення названо на честь французького математика Жана Батиста Жозефа Фур'є, який ввів поняття у 1822 році.

ПФ функції $f(t)$ математично визначається як комплексна функція $F(i\omega)$, яка задається інтегралом (див., наприклад, [8], с. 32; [11], с. 19; [78], с. 24):

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (3.3)$$

Обернене ПФ задається інтегральним виразом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) \exp(i\omega t) d\omega = f(t) \quad (3.4)$$

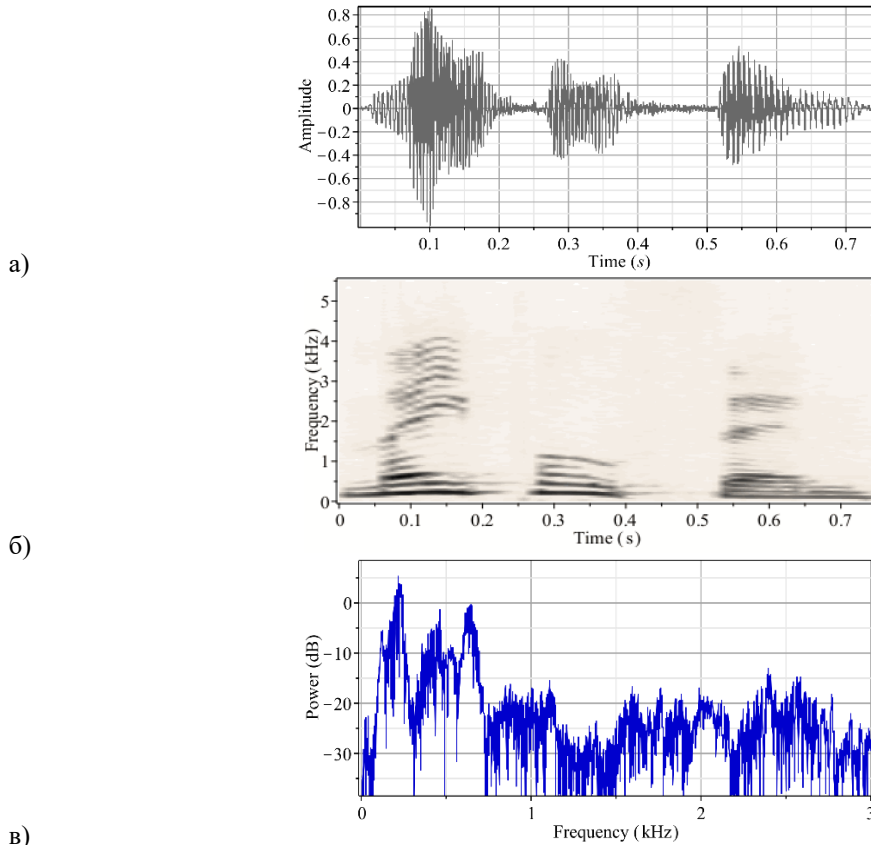


Рис. 3.6 – Звуковий сигнал (а), його спектрограма (б) та Фур'є-спектр (в).

Пряме (3.3) та обернене (3.4) НПФ в різних джерелах можуть відрізнятися масштабними коефіцієнтами перед інтегралами та/або знаком експоненти.

Інтегральне НПФ використовують для неперервних аналогових сигналів. Зокрема, на

Рис. 3.6 показаний приклад такого звукового сигналу, заданого як функція часу (а), спектрограма цього сигналу (б) та його Фур'є-спектр або *Фур'є-образ* (в), заданий як функція частоти. Звуковий сигнал узятий з прикладів до довідникової системи Maple і відповідає голосу чоловіка, який промовляє «MapleSim» [79]. З порівняння першого рисунку (

Рис. 3.6 а) та другого (

Рис. 3.6 б) видно, що в голосі чоловіка на початку промови наявна більша кількість складових з різними частотами, аніж у подальшому промовлянні.

Як видно зі спектру сигналу

Рис. 3.6, він складається з набору різних частот в діапазоні від 0 до 2 кГц. Втім, серед них найбільшу амплітуду має гармонійна складова з частотою приблизно 450 Гц.

3.2.2 Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ, *Discrete Fourier Transform*) – це математична процедура, яка використовується для визначення гармонічного, або частотного складу дискретних сигналів (див. [80], с. 63). ДПФ є однією з найбільш розповсюджених і потужних процедур цифрової обробки сигналів. ДПФ дозволяє аналізувати, перетворювати і синтезувати сигнали такими способами, які неможливі при неперервній (аналоговій) обробці.

Пряме ДПФ можна задати таким виразом:

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(\frac{-2\pi i k n}{N}\right), \text{ або} \\ F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(\cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \right), \\ k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обернене перетворення у вигляді:

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right), \text{ або} \\ f_n &= \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(\cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \right), \\ n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

де N – кількість відліків у сигналі, а також кількість компонентів в розкладанні Фур'є;

f_n – вимірне значення сигналу під час n -го відліку; F_k – комплексні Фур'є-амплітуди сигналу; $k = 0, 1, \dots, N-1$ – індекс частоти.

Частота k -ї компоненти (гармоніки) сигналу дорівнює $\frac{k}{T} = \frac{k}{N\tau}$, де $T = N\tau$ – повний період часу за який проведено вимірювання, а τ – інтервал часу між двома послідовними відліками.

Перетворення (3.5) розкладає сигнал на гармонічні складові з частотами від N коливань за період до 1 коливання за період. Оскільки частота дискретизації (величина обернена $\tau = \frac{T}{N}$) сама по собі дорівнює $\frac{N}{T}$, то гармоніки більш високої частоти, ніж половина цієї частоти $\frac{N}{2T}$, не можуть бути коректно відображені згідно теореми відліків Котельникова. Це, зокрема, призводить до того, що друга половина з отриманих в результаті ДПФ комплексних амплітуд F_k з індексами $k > \frac{N}{2}$ є дзеркальним відображенням першої половини комплексних амплітуд ($0 > k > \frac{N}{2}$) і жодної додаткової інформації не дають. Отже, її не відображаються на спектрах ДПФ.

На Рис. 3.7 представлений в якості прикладу дискретний спектр Фур'є для річних коливань кількості плям на Сонці (див. [☞ Практика 3](#)). Найбільша амплітуда, відмічена на рисунку колом, відповідає частоті 0.0936 1/рік, що відповідає основному періоду коливань приблизно в 10.7 років. Такий період добре узгоджується (різниця менше 3%) з так званим періодом циклу Швабе – 11 років. Одинадцятирічний цикл Швабе вважається *найбільш коротким* основним періодом сонячної активності.

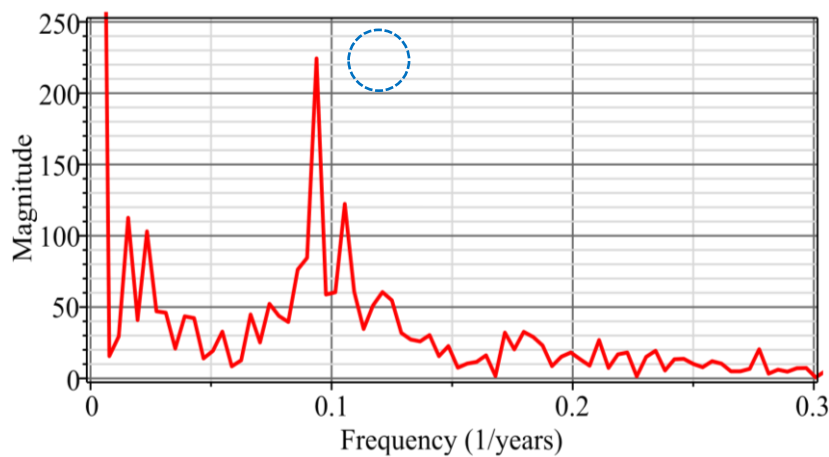


Рис. 3.7 – Дискретний спектр Фур'є для річних коливань кількості плям на Сонці.

Швидке перетворення Фур'є (ШПФ, часто FFT від англ. *Fast Fourier Transform*) – швидкий алгоритм обчислення, тобто один з різновидів дискретного перетворення Фур'є. Якщо для прямого обчислення ДПФ з N точок даних потрібно N^2 арифметичних операцій, то ШПФ дозволяє обчислити такий самий результат використовуючи $(N \cdot \log N)$ операцій.

Алгоритм ШПФ часто використовується у цифровій обробці сигналів для перетворення дискретних даних з часового у частотний діапазон. Також ШПФ дозволяє виявляти домінуючий цикл (цикли) в числовому ряду даних.

ШПФ широко застосовується у ЦОС:

- з метою корекції спектрального складу сигналів,
- для очищення сигналів від завад та шумів.

Класичним алгоритмом застосування ШПФ є така послідовність дій:

1. проведення прямого перетворення ШПФ;
2. корекція сигналу у частотній області, наприклад очищення від шумів;
3. повернення його у часову область шляхом зворотного ШПФ.

Для забезпечення збереження низькочастотних складових первинного сигналу тривалість вибірки прямого перетворення мусить бути більшою за період найбільш низькочастотних складових, що становить для сигналів біологічного походження приблизно 1-10 секунд.

Рис. 3.8 зображує частотний спектр отриманий методом ШПФ для кардіоінтервалограм (див. п. 2.2 та [Прак-тика 6](#)) [81].

У відповідності зі «Стандартом вимірювання, фізіологічної інтерпретації та клінічного використання варіабельності серцевого ритму» прийнята угода про розподіл всього вимірюваного діапазону на чотири інтервали [82]–[84]:

1. ультранизькі частоти (< 0.003 гц);
2. дуже низькі частоти (0.003-0.04 гц);
3. низькі частоти (0.04-0.15 гц);
4. високі частоти (0.15-0.4 гц).

Клінічне значення визначено переважно для останніх трьох інтервалів. На Рис. 3.8 частотні спектри КІГ в цих інтервалах позначені різними кольорами.

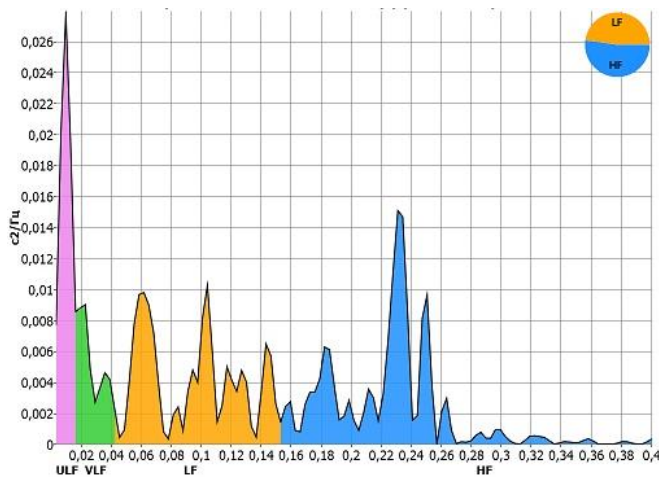


Рис. 3.8 – Спектральний аналіз серцевого ритму [81].

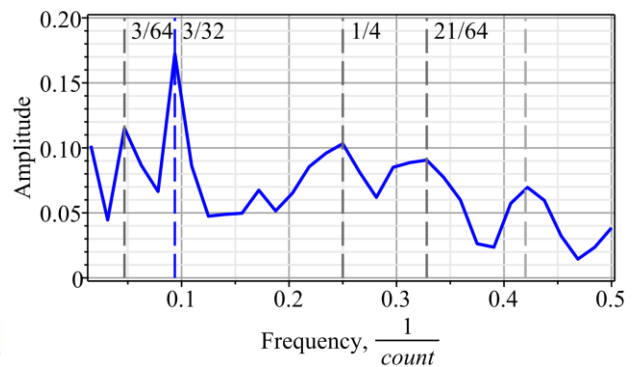


Рис. 3.9 – Фур'є-спектр ЕМГ здорового пацієнта (Практика 2).

Інша ілюстрація (Рис. 3.9) показує отриманий за методом ШПФ частотний спектр ЕМГ здорового пацієнта, яка розглядалася в попередній лекції (див. п. 2.1). Як видно зі спектру, основною частотою ЕМГ здорового пацієнта є частота $3/32 \approx 0.094$, що відповідає головному періоду коливань приблизно в 11 відліків. Ця величина цілком узгоджується з періодом, визначеним в попередній лекції з аналізу автокореляційної функції сигналу: приблизно (12-13) відліків.

3.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. Дайте визначення спектра.
2. Поясніть в чому полягає спектральний аналіз.
3. Поясніть на схемі, як класифікують методи спектрального аналізу.
4. В чому полягає Фур'є-аналіз?
5. Обґрунтуйте, для яких сигналів найбільш придатний метод СА.
6. В чому полягають переваги і недоліки методу СА?
7. Поясніть сутність методу вейвлет-аналізу.
8. Що являють собою «дочірній» та «материнський» вейвлет?
9. Поясніть відмінність між часовим та частотним представленням DOG-вейвлета.
10. Сформулюйте ідею вейвлет-перетворення.
11. Поясніть, в чому полягає перетворення Фур'є.
12. Запишіть формулу прямого НПФ та поясніть її. В чому полягає її відмінність від оберненого НПФ?
13. Запишіть формулу ДПФ та поясніть його зміст і призначення.
14. В чому полягає зміст і призначення ШПФ? Поясніть відмінність ШПФ від ДПФ.
15. Де в ЦОС знаходиться застосування ШПФ?
16. Поясніть алгоритм застосування ШПФ.

ПИТАННЯ

- 1 🔗 Перетворення Лапласа та передавальні функції приладів.
- 2 🔗 Амплітудно-частотні характеристики та діаграми Найквіста.

4.1 ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ПРИЛАДІВ

Перетворення Лапласа (ПЛ) – це інтегральне перетворення, що зв'язує функцію $F(s)$ комплексної змінної $s = \sigma + i\omega$, так зване зображення, з функцією дійсної змінної $f(t)$ – оригіналом [11], [80]:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-st) dt \quad (4.1)$$

З його допомогою досліджуються властивості динамічних систем і розв'язуються диференціальні та інтегральні рівняння.

Однією з важливих особливостей ПЛ, які зумовили його широке розповсюдження в наукових та інженерних розрахунках, є те, що багатьом співвідношенням і операціям над оригіналам відповідають простіші співвідношення над їх зображеннями. Наприклад, згортка двох функцій, яка з математичної точки зору є інтегралом від добутку двох функцій, – зводиться в просторі зображень до операції їх множення, а лінійні диференціальні рівняння стають алгебраїчними.

Зображення функції за Лапласом являє собою комплексну площину, де по осі дійсних чисел відкладаються значення змінної σ , а по осі уявних чисел – величини змінної ω . Кожна точка такої площини представляє комплексну змінну $s = \sigma + i\omega$ функції-образу $F(s)$ і може представлятися в алгебраїчній, або полярній нотації. Також позначення s називають оператором Лапласа ([85], стор. 95, [86], стор. А.4.4).

Для того, щоб знайти зображення за Лапласом $F(s)$, первинний сигнал $f(t)$ множиться на експоненту $\exp(-\sigma t)$ [87]. Якщо дійсна змінна $\sigma > 0$ позитивна, то експоненти зростають, якщо $\sigma < 0$ – навпаки, згасають. Позитивним значенням змінної σ відповідає права напівплощина, негативним – ліва. Для кожного з таких добутків з різними значеннями σ знаходять перетворення Фур'є і розташовують уздовж осі уявних чисел – осі частот. Верхня та нижня напівплощини виглядають дзеркальними відображеннями, якщо первинний сигнал є дійсною функцією (Рис. 4.1, Maple-код див. у Додаток Г). На Рис. 4.1 представлені перетворення Фур'є (б) та Лапласа (в) для вхідного сигналу $f(t)$ у вигляді прямокутного імпульсу обмеженої амплітуди та довжини у часі (Рис. 4.1 а).

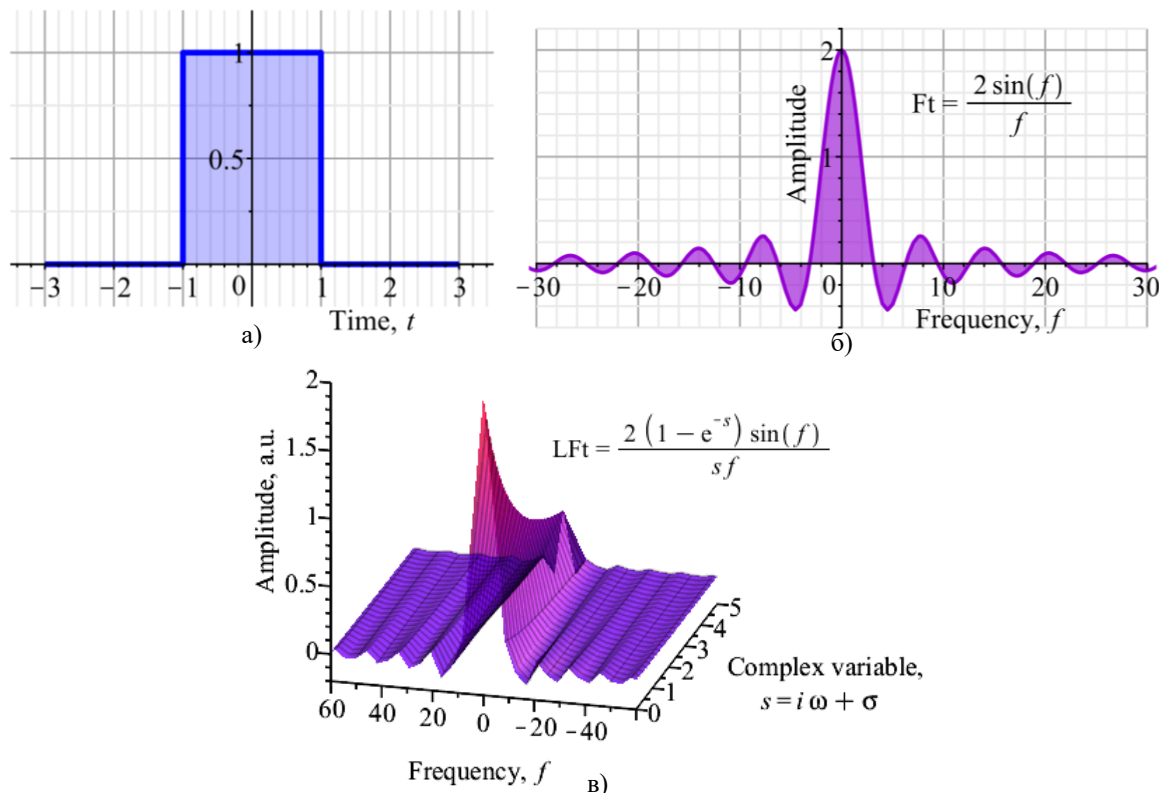


Рис. 4.1 – Перетворення прямокутного сигналу: а) одиничний імпульс; б) результат перетворення Фур'є; в) результат перетворення Лапласа.

На практиці обчислення інтегралу (4.1) здійснюється, як і зворотне перетворення, спеціальними програмними засобами інтегральних перетворень. В Maple 2021 інтегральне перетворення Лапласа знаходиться в одному програмному пакеті з перетворенням Фур'є.

Інколи, в простіших випадках, для ПЛ користуються готовими таблицями [87], які дозволяють визначити **Лаплас-зображення** $F(s)$ по відомому оригіналу $f(t)$, або навпаки (Табл. 4.1). Наприклад, для таких сигналів (оригіналів) як короткий імпульс (*функція Дірака*, $\delta(t)$), одинична сходинка (*функція Хевісайда*, $1(t)$) та експонента ($\exp(-at)$) Лаплас-зображення визначаються так:

$$\hat{L}\{\delta(t)\} = 1; \quad \hat{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}; \quad \hat{L}\{\exp(-at)\} = \frac{1}{s+a} \quad (4.2)$$

Табл. 4.1

Деякі функції-оригінали та їх Лаплас-зображення.

Функція-оригінал	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}$	te^{-at}	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$	$\cos \omega t$	$-\frac{1}{\beta} e^{-at} \sin \beta t$
ЛЗ функції	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$

4.1.1 Динамічні системи

З математичної точки зору та з позицій теорії автоматичного керування всі вимірювальні прилади, зокрема й медичні, є динамічними системами. **Динамічна система** – це система, яка описується лінійними й нелінійними диференціальними та/або алгебраїчними рівняннями, можливо, що й високого порядку.

Узагальнено, зв'язок між входом і виходом динамічної системи можна представити у такому вигляді: нехай $x(t)$ – вхідна векторна величина, $y(t)$ – вихідна векторна величина (функція часу), $\hat{H}$ – оператор динамічної системи, який встановлює відповідності (однозначні) між входом $x(t)$ й виходом $y(t)$:

$$y(t) = \hat{H}x(t) \quad (4.3)$$

Оператор $\hat{H}$ розуміється в глобальному змісті, тобто символом $\hat{H}$ позначається вся сукупність математичних дій, які потрібно виконати, щоб по даній вхідній функції $x(t)$ знайти результат – вихідну функцію $y(t)$.

Оператор динамічної системи $\hat{H}$ є вичерпно повною її характеристикою. Під поняттям оператора $\hat{H}$ поєднуються будь-які математичні дії:

- всі алгебраїчні дії,
- диференціювання,
- інтегрування,
- зрушення в часі,
- рішення диференціальних, інтегральних алгебраїчних і будь-яких інших функціональних рівнянь,
- будь-які логічні дії (наприклад, виконання складних алгоритмів).

Задати оператор системи – задати сукупність (програму) дій, які потрібно здійснити над вхідною функцією, щоб одержати вихідну функцію.

4.1.2 Передавальна та імпульсно-перехідна функції

Здійснимо ПЛ над обома частинами рівняння (4.3). Тоді його можна переписати у такому вигляді:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\hat{L}\{y(t)\}}{\hat{L}\{x(t)\}} \quad (4.4)$$

Функція комплексної змінної $H(s)$ є Лаплас-зображенням оператора динамічної системи і дорівнює відношенню ЛЗ вихідного $Y(s)$ та ЛЗ вхідного $X(s)$ сигналів. Функція $H(s)$ має назву **передавальної функції** (*transfer function*) динамічної системи і вона так само повно описує певну динамічну систему, як і оператор системи.

Перепишемо вираз (4.4) у такому вигляді:

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) \quad (4.5)$$

З рівняння (4.5), яке є основним рівнянням аналізу систем у комплексній площині $s = \sigma + i\omega$, випливає, що перетворення Лапласа, тобто ЛЗ вихідного сигналу $Y(s)$, дорівнює ПЛ вхідного сигналу $X(s)$, помноженого на передавальну функцію системи $H(s)$.

Якщо у виразі (4.4) формально покласти, $\hat{L}\{x(t)\} = \hat{L}\{\delta(t)\} = 1$, як це виникає з (4.2), то вираз (4.4) отримає таку просту форму:

$$H(s) = Y(s)|_{x(t)=\delta(t)} = \hat{L}\{y(t)\}|_{x(t)=\delta(t)} \quad (4.6)$$

Отже, передавальна функція системи $H(s)$ є лаплас-зображенням її відгуку (вихідного сигналу $Y(s)$) за умови, що на її вхід подано короткий імпульс – функцію Дірака у вигляді дельта-функції $\delta(t)$. Оригінал передавальної функції $\hat{L}^{-1}\{H(s)\} = y(t)|_{x(t)=\delta(t)}$ називають **функцією імпульсного відгуку** (англ. *impulse response function*) системи [88], або **імпульсною перехідною функцією**, приклад якої наведений на Рис. 4.2.

Для стаціонарних динамічних систем із зосередженими параметрами, до яких відносяться і прилади, передавальна функція завжди може бути представлена у вигляді дрібно-раціональної функції комплексної змінної:

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (4.7)$$

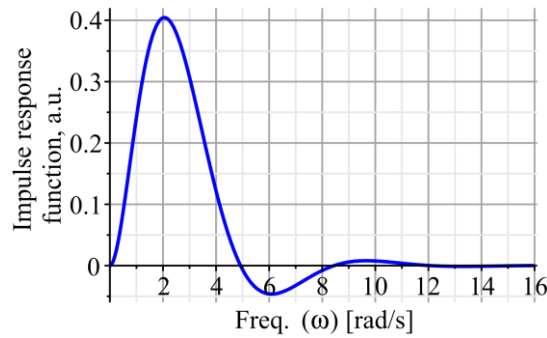


Рис. 4.2 – Імпульсна перехідна функція НЧ-фільтру Баттерворта 3-го порядку.

Деякі важливі властивості передавальної функції є такими:

1. Знаменник та чисельник передавальної функції (4.7) є характеристичними поліномами динамічної системи. Зокрема динамічну систему можна задати полюсами та нулями передавальної функції.
2. Полюси передавальної функції – це корені поліному в знаменнику (4.7), нулі – корені поліному в чисельнику (4.7). Нулі та полюси передавальної функції відіграють важливу роль для опису системи: в нулях передавальна функція, а отже, й вихідний сигнал, є нульовими, а з наближенням до полюсів, навпаки, необмежено зростають.
3. Якщо хоча б один з полюсів передавальної функції має позитивну дійсну частину, то вона необмежено зростає в часі, а система є нестійкою.
4. Лише за умови, що всі полюси мають негативні дійсні частини – передавальна функція стаціонарна, а система є стійкою.
5. У фізично реальних системах порядок поліному чисельника (4.7) не може перевищувати порядку полінома знаменника: $m \leq n$.

Медичні прилади, зокрема, зазвичай описуються передавальними функціями невисокого порядку: $n \leq 3$

4.2 АФЧХ ТА ДІАГРАМИ НАЙКВІСТА

Амплітудно-фазова частотна характеристика динамічної системи (АФЧХ) яку ще називають **діаграмою Найквіста** (Nyquist plot) або годографом (Рис. 4.3), – зручний спосіб представлення частотного відгуку системи на періодичний вхідний сигнал (див.  Практика 4). АФЧХ є комплексною функцією, яку формально можна отримати з передавальної функції (4.5), якщо замінити її комплексну змінну $s = \sigma + i\omega$ на змінну $i\omega$, тобто покладаючи $\sigma = 0$:

$$W(\omega) = H(s)|_{s=i\omega} \quad (4.8)$$

З іншого боку, виходячи з (4.4) і того факту, що за умови $\sigma = 0$ ($s = i\omega$) перетворення Лапласа переходить в перетворення Фур'є, маємо для функції (4.7) визначення як відношення ПФ вихідного та вхідного сигналів:

$$W(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\hat{F}\{y(t)\}}{\hat{F}\{x(t)\}} \quad (4.9)$$

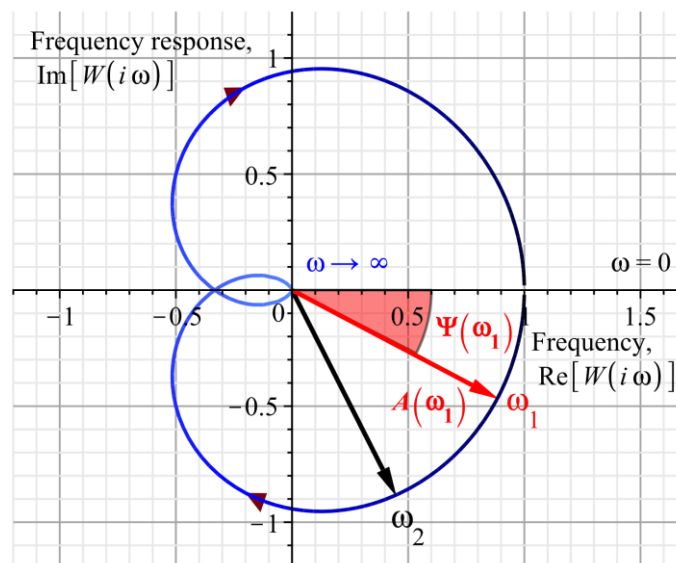


Рис. 4.3 – АФЧХ (діаграма Найквіста) фільтру Баттерворта 3-го порядку нижніх частот (див. Рис. 4.2).

Оскільки функція $W(\omega)$ (АФЧХ) є комплексною функцією, то її можна зобразити в полярній формі:

$$W(\omega) = \text{abs}(W) \cdot \exp(\arg(W)) \quad (4.10)$$

де $A(\omega) = \text{abs}(W)$, $\Psi(\omega) = \arg(W)$ – відповідно модуль та аргумент комплексної функції, обидва, звісно, є дійсними функціями частоти (Рис. 4.3).

Функцію (4.10) зображують в полярній системі координат на комплексній площині, причому її модуль $A(\omega)$ дорівнює довжині радіус-вектора, тоді як аргумент $\Psi(\omega)$ – полярному куту. Лінія, яку утворює кінець радіус-вектора під час зміни частоти в діапазоні $\omega \in [0, \infty]$, має назву годографа або діаграми Найквіста (Рис. 4.3).

Модуль АФЧХ $[\text{abs}(W)]$ у (4.10) отримав назву **амплітудно-частотної характеристики** (АЧХ) динамічної системи і позначається $A(\omega)$, тоді як *аргумент* $[\arg(W)]$ називається **фазово-частотною характеристикою** (ФЧХ), яка в свою чергу позначається $\Psi(\omega)$. АЧХ та ФЧХ характеризують наступне:

1. АЧХ, амплітудно-частотна характеристика $A(\omega)$ – функція частоти, яка показує коефіцієнт підсилення (або послаблення) амплітуди вхідного гармонічного сигналу з частотою $\omega \in [0, \infty]$ на виході системи;
2. ФЧХ, фазово-частотна характеристика, $\Psi(\omega)$ – функція частоти, яка показує зміну фази вхідного гармонічного сигналу на виході системи.

Коефіцієнт підсилення, або АЧХ, може змінюватися на декілька порядків в залежності від частоти, яка також може змінюватися на порядки.

4.2.1 Графіки Бode

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) є представленням частотного відгуку лінійної стаціонарної системи в логарифмічному масштабі, що дозволяє вирішити проблему наочного графічного зображення коефіцієнту підсилення системи. Графіки ЛАЧХ та ФЧХ, які розглядаються парою, отримали назву графіків Бode (Рис. 4.4) для динамічної системи [89]. Зокрема, на Рис. 4.4 представлена пара графіків Бode для фільтру Бесселя третього порядку ($n = 3$).

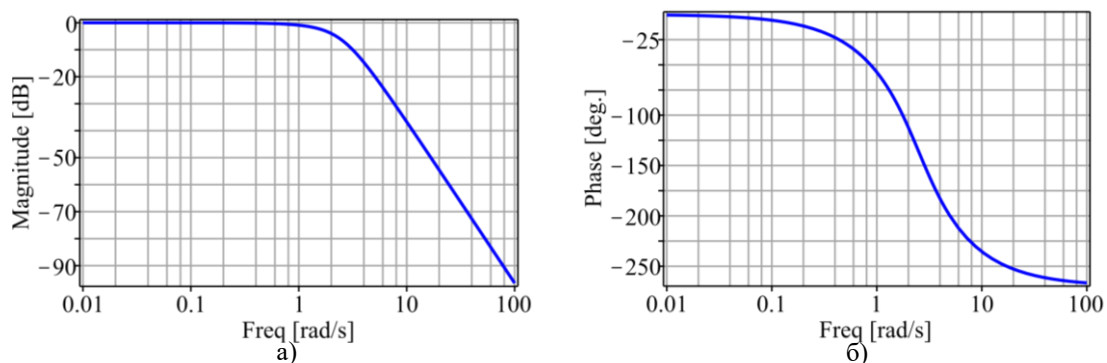


Рис. 4.4 – Графіки Бode для фільтру Бесселя 3-го порядку нижніх частот: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.

Логарифмічний коефіцієнт підсилення вимірюють в спеціальних одиницях – Белах. Один Бел поділяють на 20 децибелів: 1 Б = 20 дБ. Один Бел відповідає підсиленню в 10 разів, тобто на порядок. Наприклад, коефіцієнт підсилення у 2 Бела = 40 децибел відповідає підсиленню вхідного сигналу в 100 разів.

Від'ємні значення логарифмічного коефіцієнту підсилення відповідають послабленню сигналу, зокрема (-20) децибел означає послаблення сигналу в 10 разів. Нульовий логарифмічний коефіцієнт (0 децибел) вочевидь відповідає коефіцієнту підсилення, який дорівнює одиниці. Такий сигнал не підсилюється і не послабляється системою. У логарифмічній шкалі посиленню в два рази відповідає 6 децибел, в 5 разів – відповідно 14 децибел.

З графіку Рис. 4.4 а видно, що логарифмічний коефіцієнт підсилення є нульовим для діапазону частот $[0, 1]$, отже, цей діапазон є смугою пропускання частотного фільтру. У той же час для частоти 10, наприклад, він зменшується до (-40) децибел, тобто на такій частоті сигнал послаблюється фільтром Бесселя в 100 разів по амплітуді.

4.2.2 Кроковий електричний двигун

Знання передавальної функції приладу дозволяє визначати вихідний сигнал, якщо відомий вигляд вхідного сигналу, і навпаки. Алгоритми такого дослідження задаються виразом (4.4). Зокрема, визначення вихідного сигналу по відомому вхідному відбуваються в такі етапи:

1. визначається ЛЗ вхідного сигналу;
2. ЛЗ вхідного сигналу множать на відому передавальну функцію;
3. добуток піддається зворотному Лаплас-перетворенню.

На Рис. 4.5 (б) (див. Додаток Г) представлені вхідний керуючий (червоний, ліва вісь) та вихідний (синій, права вісь) сигнали крокового електричного двигуна (Рис. 4.5 а, [90]) з передавальною функцією такого вигляду [91]:

$$H(s) = \frac{K}{JLs^3 + (JR + Lb)s^2 + (K^2 + Rb)s} \quad (4.11)$$

де J – момент інерції ротора крокового електродвигуна,

b – коефіцієнт для моменту сил опору механічної системи двигуна,
 K – коефіцієнт електрорушійної сили,
 R – електричний опір обмотки електродвигуна,
 L – індуктивність обмотки двигуна.

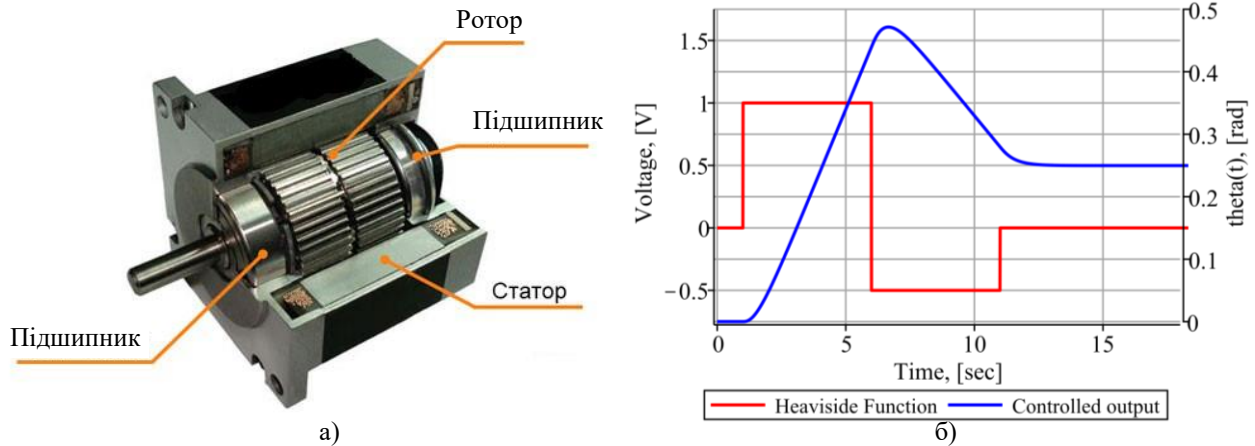


Рис. 4.5 – Кроковий електричний двигун: а) загальний вигляд [90] ;
 б) вхідний та вихідний сигнали з передавальною функцією (4.11).

Характеристичні поліноми передавальної функції (див. (4.7), (4.11)) мають такі порядки: $m = 0, n = 3$. Передавальна функція (4.11) не має нулів, втім має три полюси, числові значення яких залежать від параметрів системи.

Вхідний керуючий сигнал крокового двигуна є напругою, яка подається на його обмотку і має вигляд двох прямокутних імпульсів різної полярності та амплітуди (Рис. 4.5 б). Вихідним сигналом крокового двигуна є кут повороту його ротору, заданий в радіанах (права вісь Рис. 4.5 б, крива синього кольору).

З Рис. 4.5 б видно, що кроковий двигун з невеликим запізненням відпрацьовує два кроки:

1. поворот ротора на деякий кут (приблизно 0.46 рад.) під дією позитивної напівхвилі керуючого сигналу,
2. зворотний поворот для зменшення кута (до 0.25 рад.) під дією негативної напівхвилі вхідного керуючого сигналу.

На Рис. 4.6 показана імпульсна перехідна характеристика того ж крокового двигуна, тобто його відгук на короткий імпульс (функцію Дірака) на вході. Характеристика показує інерційність двигуна під час «відпрацювання кроку» – повороту на певний кут.

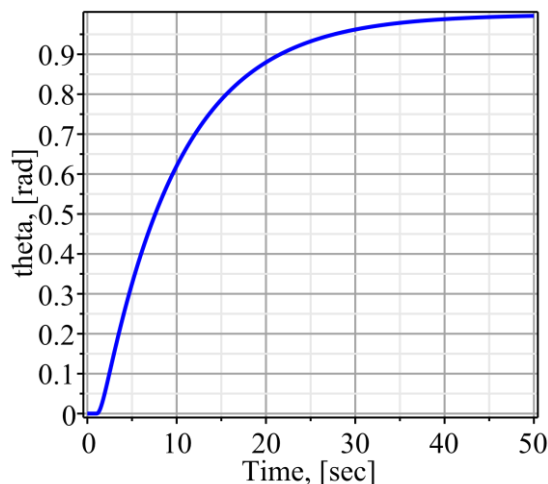


Рис. 4.6 – Імпульсна перехідна характеристика крокового двигуна на Рис. 4.5.

Можливе вирішення також і зворотної задачі: визначення вхідного сигналу за виглядом вихідного. Таке визначення можна описати простим алгоритмом:

1. вихідний сигнал піддається Лаплас-перетворенню;
2. далі Лаплас-образ ділиться на відому передавальну функцію;
3. результат піддається зворотному Лаплас-перетворенню.

4.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. Дайте визначення перетворення Лапласа та запишіть формулу.
2. Запишіть формулу для комплексної змінної та поясніть її.
3. Які основні напрямки використання перетворення Лапласа?
4. Посніть, в чому полягає основна особливість перетворення Лапласа.
5. Як вигадає графічне представлення зображення функції за Лапласом?
6. Як виглядають Лаплас-зображення простих сигналів? Наведіть формули.
7. Дайте визначення динамічної системи.
8. Що являє собою оператор динамічної системи? Що значить задати оператор?
9. Поясніть поняття передавальної функції динамічної системи. Наведіть формулу.
10. Запишіть основне рівняння аналізу систем та поясніть його.
11. Що являє собою відгук системи?
12. Який вигляд має імпульсна перехідна функція?
13. Як для стаціонарних динамічних систем з зосередженими параметрами може бути представлена передавальна функція?
14. В чому полягають основні властивості передавальної функції?
15. Поясніть, що являють собою полюси та нулі передавальної функції.
16. Що являє собою АФЧХ динамічної системи? Що дозволяє дослідити АФЧХ?
17. Яке призначення діаграми Найквіста?
18. Поясніть, який зміст мають модуль і аргумент АФЧХ.
19. Що характеризують АЧХ та ФЧХ?
20. Поясніть зміст поняття коефіцієнта підсилення.
21. Що являє собою ЛАЧХ?
22. Що собою являють і яке призначення графіків Бode?
23. Поясніть зміст логарифмічного коефіцієнта підсилення. Що характеризує зміна логарифмічного коефіцієнта підсилення на 1 Бел?
24. Поясніть поняття смути пропускання.
25. Від яких параметрів може залежати передавальна функція крокового електричного двигуна? Запишіть її формулу та поясніть зміст величин.
26. Поясніть на схемі, який вигляд мають вхідний та вихідний сигнали, а також імпульсна перехідна функція крокового електричного двигуна.

ПИТАННЯ

- 1  Методи фільтрації сигналів.
- 2  Аналогові та цифрові частотні фільтри.
- 3  Принципи проєктування цифрових фільтрів.

5.1 МЕТОДИ ФІЛЬТРАЦІЇ СИГНАЛІВ

У практиці використовується безліч сигналів, які мають електричну природу: фактично, майже у кожному приладі існує спеціальний блок-перетворювач, задача якого – перетворення сигналу від первинного сенсору в електричну форму. Під час реєстрації та обробки таких сигналів з'являється проблема значного впливу на кінцеві результати вимірювань різноманітних перешкод, завад та шумів [92], [93]. Тому електричні сигнали потребують спеціальної обробки для підвищення своєї інформативності.

Застосування методів ЦОС, зокрема методів цифрової фільтрації, є поширеним і використовується у багатьох важливих галузях досліджень, таких як:

- обробка мовних сигналів,
- цифрова телефонія і цифровий зв'язок,
- обробка фототелеграфних і телевізійних зображень,
- радіо- та гідролокаційні системи,
- космічні дослідницькі та розвідувальні системи,
- геологічна розвідка і таке інше.

Біологія і медицина не є виключеннями, цифрова фільтрація сигналів – один із сучасних способів їх обробки.

Основні переваги цифрової обробки сигналів та зображень полягають в:

1. можливості реалізації складних методів та алгоритмів обробки сигналів та зображень, недоступних для аналогових пристроїв;
2. забезпеченні високої точності обробки;
3. гнучкості і універсальності засобів, розвиненому користувацькому інтерфейсі тощо.

Головна проблема цифрової обробки БМ сигналів та зображень полягає у підвищенні швидкодії при реалізації певного набору математичних операцій над сигналами та зображеннями. Цей набір визначається, як правило, проблемною орієнтацією засобів цифрової обробки сигналів та зображень. Для розв'язання зазначеної проблеми комплексно застосовують два головних **напрямки**:

- підвищення ефективності обчислювальних алгоритмів,
- вдосконалення архітектури комп'ютерних засобів ЦОС.

З усіх методів, які застосовують під час обробки таких сигналів, одним з найважливіших є так звана **цифрова фільтрація**. У недавньому минулому інтерес до цієї технології обмежувався суто теоретичними дослідженнями, але останнім часом вона використовується у багатьох важливих практичних випадках при обробці одновимірних і двовимірних сигналів. Насамперед, в цьому проявляється тенденція комп'ютеризації сучасної медицини, яка веде до поступового, але невпинного тренду заміни аналогових сигналів цифровими.

Частотна фільтрація – процес обробки електричного сигналу частотно-селективними приладами з метою зміни його спектрального складу, задачами якої є:

- амплітудно-частотна корекція сигналу, тобто підсилення або послаблення окремих частотних (спектральних) його складових;
- повне придушення спектру сигналу та/або шумів в певній смузі частот.

Якщо під час аналізу спектру сигналу з'ясувалося, що енергія перешкод, завад та шумів зосереджена переважно в певному частотному діапазоні, а енергії корисного сигналу в цій частині спектру відносно мало, то шляхом фільтрації всі коливання у цьому діапазоні можна придушити, як показано на Рис. 5.1 (також див.  Практика 5).

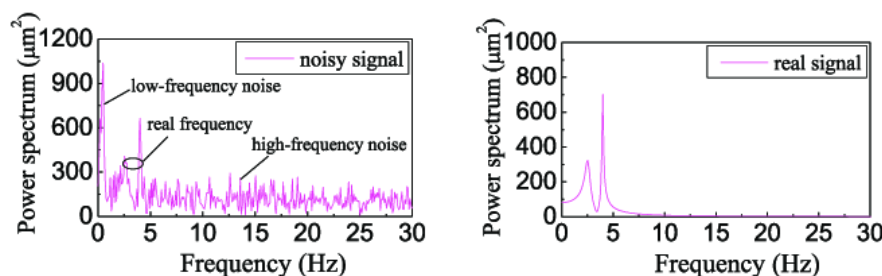


Рис. 5.1 – Приклад частотного спектру сигналу до та після фільтрації [94].

ЦОС здійснюється двома способами, які умовно поділяють на:

- апаратні,
- програмні.

Програмна обробка здійснюється за допомогою спеціальних програм на комп'ютерах з відносно великим об'ємом пам'яті. Основою фільтрів, які реалізуються програмним шляхом є попередній спектральний аналіз сигналу.

Цифрова програмна фільтрація зводиться до множення набору коефіцієнтів розкладання сигналу в ряд (по тим чи іншим базисним функціям, залежно від методу) на відповідні значення передавальної функції цифрового фільтру (Рис. 5.1).

Стрімке поширення методів ЦОС і виробництва цифрових вимірювальних приладів на базі мікропроцесорів не призводить, проте, до зниження рівня виробництва і значущості аналогових вимірювальних пристроїв і перетворювачів, особливо в інтегральному виконанні. Навпаки, їх виробництво доволі швидко зростає, оскільки вони широко використовуються для попереднього аналогового вимірювального перетворення в аналого-цифрових приладах з мікропроцесорами.

Аналогові фільтри, зокрема, є незамінними в тих випадках, коли цифрова обробка принципово непридатна: на високих частотах, а також, коли застосування мікропроцесорів недоцільно з технічних чи економічних причин, наприклад, у нескладних вимірювальних пристроях.

У багатьох випадках виявляється необхідним поєднання аналогової і цифрової обробки сигналів в периферійних пристроях різноманітних вимірювальних систем – їх вхідних пристроях або у пристроях виводу інформації.

Втім, вартість аналогових інтегральних вимірювальних перетворювачів знижується повільніше, ніж вартість елементів обчислювальної техніки, зокрема, завдяки більш складному і дорогому контролю їх характеристик, особливо за вимог високої точності.

5.2 АНАЛОГОВІ ТА ЦИФРОВІ ЧАСТОТНІ ФІЛЬТРИ

Аналоговий фільтр – різновид приладу для фільтрації аналогових, неперервних сигналів. На відміну від аналогових, цифрові фільтри мають справу з дискретними сигналами.

Частотні фільтри використовують для виділення корисного сигналу із суміші корисних і невіддільних (шумових, завад тощо) сигналів. Залежно від взаємного розміщення смуги пропускання і смуги затримки розрізняють чотири базові **види** фільтрів (*filter*):

1. нижніх частот (*low-pass*) – ФНЧ (Рис. 5.2 а),
2. верхніх частот (*high-pass*) – ФВЧ (Рис. 5.2 б),
3. смуговий (*band-pass*) – СФ (Рис. 5.2 в),
4. режекторний або загороджуючий (*band-rejection*) – РФ (Рис. 5.2 г).

На Рис. 5.2 а, б, в, г представлені електричні принципи схеми (щодо видів і типів схем та порядку слів-визначень у їхніх назвах згідно ГОСТ та ДСТУ радимо ознайомитися з джерелами [95],[96]) аналогових фільтрів чотирьох базових типів у пасивній топології [97], а також схематичний вигляд їх ЛАЧХ (логарифмічних амплітудно-частотних характеристик).

Важливо пам'ятати про одну особливість у термінології щодо ФНЧ та ФВЧ, що добре видно з їх англійських назв: *low-pass* – «нижче [певного значення] пропускає», *high-pass* – «вище [певного значення] пропускає». Наприклад, ФНЧ пропускає нижні частоти і послаблює ті, що розташовані вище частоти зрізу фільтру. Так само й ФВЧ: він пропускає верхні частоти, при цьому послаблюючи розташовані нижче частоти зрізу.

Як видно з Рис. 5.2, аналогові фільтри побудовані як *електричні ланцюги*, які складаються [98]:

- з *активних резисторів* (R) та *реактивних опорів* (котушки індуктивності L та конденсатори C) – **пасивні** фільтри;
- можуть містити **операційні підсилювачі** (ОП) – **активні** фільтри.

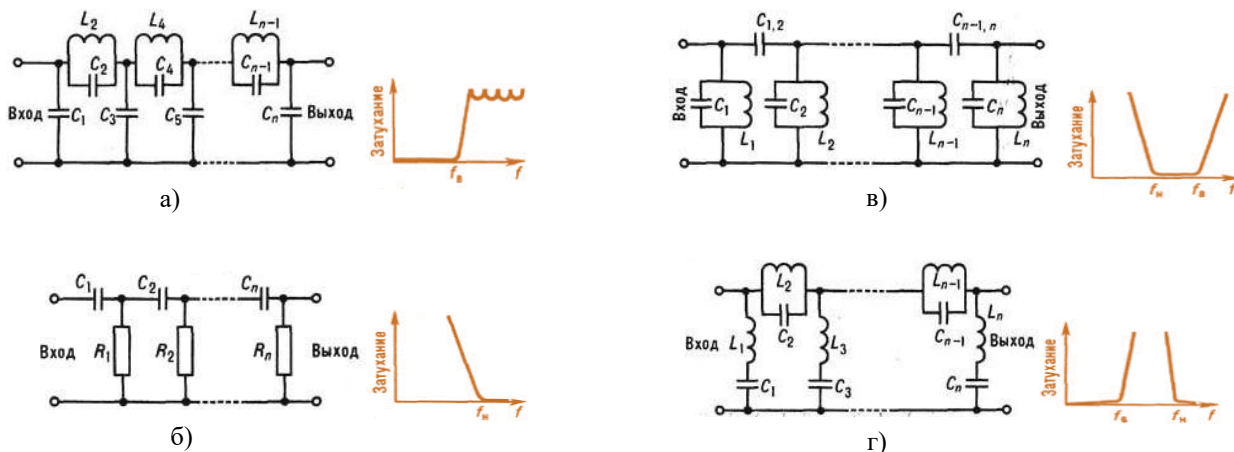


Рис. 5.2 – Принципові електричні схеми аналогових фільтрів [99].

Дія найбільш популярних аналогових **LC-** та **RC-фільтрів**, зображених на Рис. 5.2, заснована на використанні залежності реактивного (ємнісного та індуктивного) опору від частоти змінного струму.

Порівнюючи аналогові фільтри з цифровими за експлуатаційними властивостями, варто взяти до уваги такі пункти:

1. *вартість* – цифрові фільтри, в цілому, дешевші аналогових, адже не потребують складної елементарної бази;
2. *швидкість* – аналогові фільтри працюють швидше цифрових, що зумовлене обмеженістю обчислювальних ресурсів мікроконтролерів, на яких зазвичай реалізують цифрові фільтри;
3. *шуми квантування* – цифрові фільтри можуть мати помітні шуми квантування, аналогові фільтри позбавлені такого недоліку;
4. *зовнішні шуми* – цифрові сигнали практично нечутливі до зовнішніх шумів, тому цифрові фільтри значно стійкіші до зовнішніх збурень, тоді як аналогові піддаються їм;
5. *дрейф характеристик* – цифрові фільтри мають незмінні в часі характеристики. Аналогові фільтри демонструють помітний часовий дрейф характеристик завдяки зміні параметрів своїх базових елементів;
6. *динамічний діапазон* – відношення амплітуд максимального та мінімального сигналу для аналогового фільтра зазвичай значно вище, ніж для цифрового, де це відношення обмежене розрядністю АЦП;
7. *частотний діапазон* – частотний діапазон цифрових фільтрів обмежує згори частота Найквіста (подвоєна частота дискретизації цифрового сигналу відповідно теоремі відліків Найквіста-Котельникова), тоді як частотний діапазон аналогових фільтрів теоретично не обмежений.

Основні **властивості аналогового фільтра** визначаються його комплексною передавальною функцією, яку звичайно представляють у вигляді дійсних функцій АЧХ (або ЛАЧХ) та ФЧХ. Ідеальний аналоговий фільтр ВЧ повинен був би мати прямокутну АЧХ та нульову ФЧХ як це показано на Рис. 5.3.

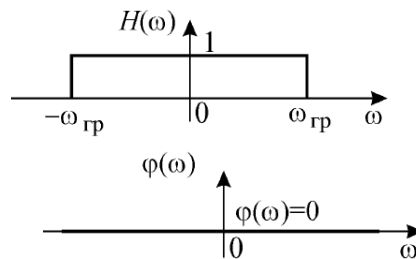


Рис. 5.3 – Ідеальна прямокутна АЧХ та нульова ФЧХ.

Ідеальний аналоговий фільтр реалізувати фізично неможливо, тому на практиці отримали широке розповсюдження аналогові фільтри чотирьох типів, які відповідають різним підходам до апроксимації ідеальної прямокутної АЧХ (див. Рис. 5.4):

1. фільтри Баттерворта, які мають максимально плоску АЧХ в смузі пропускання та монотонну характеристику в смузі затримки (Рис. 5.4 а);
2. фільтри Чебишева 1-го роду, які мають задану величину пульсацій в смузі пропускання та монотонну характеристику в смузі затримки (Рис. 5.4 б);
3. фільтри Чебишева 2-го роду, які мають максимально плоску АЧХ в смузі пропускання та фіксований рівень пульсацій в смузі затримки (Рис. 5.4 в);
4. еліптичні фільтри, які мають рівно хвильові пульсації АЧХ як в смузі пропускання, так і в смузі затримки (Рис. 5.4, г).

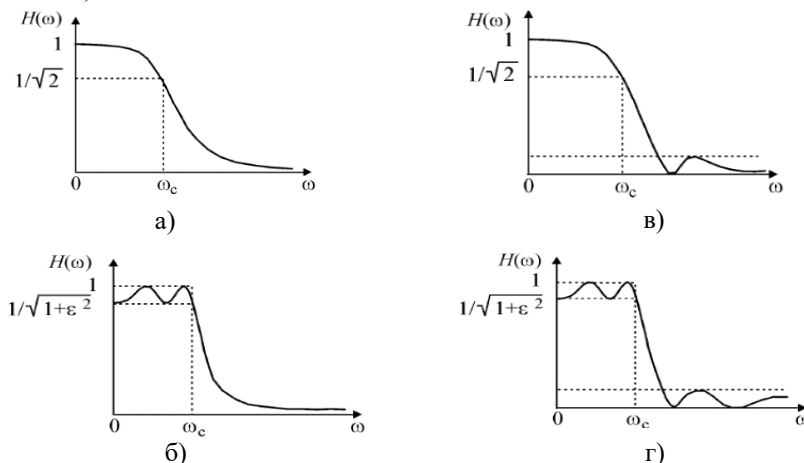


Рис. 5.4 – Апроксимація ідеальною прямокутною АЧХ аналогових фільтрів.

Цифрові фільтри звичайно поділяють на **два типи**:

1. КІХ-фільтр – фільтр із кінцевою імпульсною характеристикою, нерекурсивний фільтр без зворотного зв'язку, FIR-filter (*Finite Impulse Response*). Характерною особливістю КІХ-фільтру є обмеженість його імпульсної характеристики в часі: з деякого моменту часу вона стає точно рівною нулю. Знаменник передавальної функції такого фільтру – певна константа, отже, передавальна функція не має полюсів.
2. БІХ-фільтр – фільтр з безкінечною імпульсною характеристикою, рекурсивний фільтр зі зворотним зв'язком, IIR-filter (*Infinite Impulse Response*). Основною властивістю таких фільтрів є те, що їх імпульсна перехідна характеристика має нескінченну довжину у часовій області, а передавальна функція має дробово-раціональний вигляд.

Щодо термінології і, відповідно, скорочень КІХ та БІХ, відмітимо розбіжності у джерелах інформації, обумовлених, на наш погляд, перекладом з англійської FIR та IIR. Так, наприклад, в [100], [101] автори використовують переклад «кінцева», відповідно скорочення КІХ. Тоді як авторка [102] використовує у викладі «скінченна», тобто СІХ. Блок-схема цифрової фільтрації аналогового (на вході) сигналу представлена на Рис. 5.5.

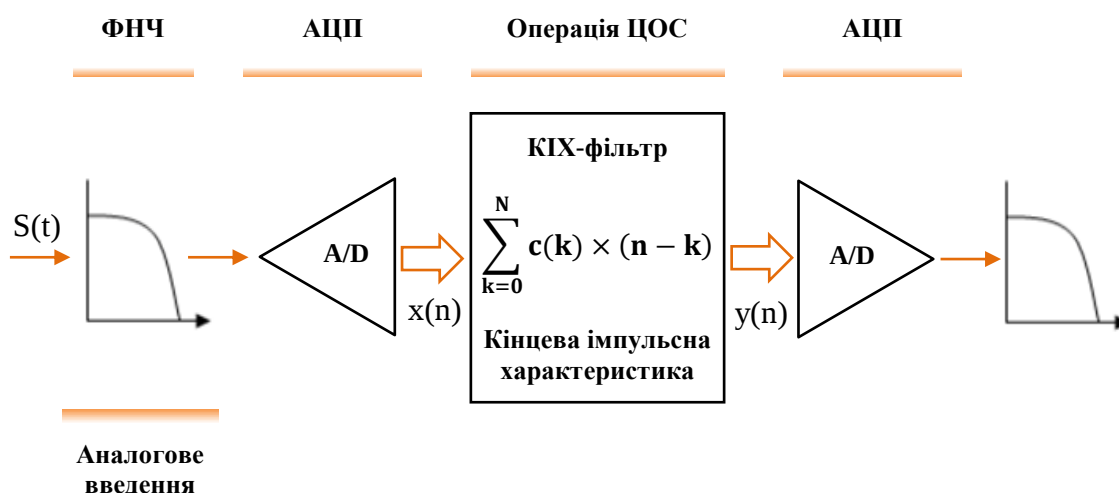


Рис. 5.5 – Блок-схема цифрової фільтрації аналогового сигналу.

Компонентами схеми є:

- фільтри нижніх частот (ФНЧ), які виконують попереднє і подальше видалення з частотного спектру додаткових гармонік сигналу,
- АЦП та ЦАП,
- цифровий фільтр із кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ).

5.3 ПРИНЦИПИ ПРОЄКТУВАННЯ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

Амплітудно-частотна характеристика фільтра визначається значеннями коефіцієнтів фільтру h_n : змінюючи кількість коефіцієнтів (довжину фільтра) та/або їх значення, можна отримати цифровий фільтр з будь-якою АЧХ.

За аналогією з аналоговим фільтром, цифровий фільтр перетворює послідовність дискретних відліків вхідного сигналу у числову послідовність дискретного вихідного сигналу.

Для цифрових фільтрів використовується поняття імпульсної характеристики, котра є реакцією фільтру на одиничний імпульс (функцію Дірака). Імпульсну характеристику цифрового фільтру можна трактувати як результат дискретизації неперервної імпульсної характеристики відповідного аналогового фільтра-прототипу: на Рис. 5.6 суцільна лінія показує імпульсну характеристику, вертикальні лінії – відліки, тобто числові коефіцієнти цифрового фільтру.

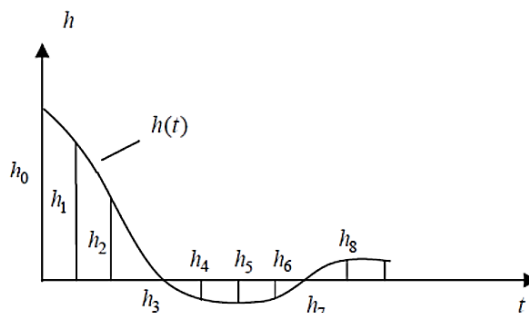


Рис. 5.6 – Імпульсна характеристика цифрового фільтру.

Якщо взяти кінцеве число відліків $h_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, тоді отримуємо цифровий фільтр з кінцево-імпульсною характеристикою (**КІХ-фільтр**).

Якщо ж взяти нескінченне число відліків $h_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, отримаємо ЦФ з безкінечно-імпульсною характеристикою (**БІХ-фільтр**). Реальний БІХ також є цифровим фільтром з обмеженою кількістю відліків, хіба що ця кількість є відносно великою порівняно з КІХ.

Вихідний сигнал фільтра $y(k)$, який має нетривіальну частотну характеристику, залежить від декількох відліків вхідного сигналу $x(k)$. Для фільтрів, які не використовують вихідні відліки, тобто для *нерекурсивних* КІХ-фільтрів рівняння фільтрації має вигляд:

$$y(k) = \sum_{n=0}^m h_n x_{k-n} = h_k x_k + h_{k-1} x_{k-1} + \dots + h_{k-m} x_{k-m} \quad (5.1)$$

Кількість відліків m називається **порядок цифрового фільтру**.

Фільтр, у якому використовуються і вихідні відліки, називається **рекурсивним**. Рівняння фільтрації рекурсивного фільтра зі зворотним зв'язком має такий вигляд:

$$y(k) = \sum_{n=0}^m b_n x_{k-n} - \sum_{p=0}^p a_p y_{k-p} \quad (5.2)$$

Під проєктуванням (синтезом) цифрового фільтра розуміють вибір таких наборів його коефіцієнтів h_n , або (a_n, b_n) які задовольняють заданим вимогам, а також вибір потрібної структури фільтра, зокрема його порядку, з урахуванням необхідної точності обчислень.

Під час проєктування цифрових фільтрів доводиться стикатися з одним із ключових моментів, пов'язаним з особливостями технічної реалізації, і рядом обмежень, обумовлених розрядністю цифрових обчислювальних пристроїв:

- шуми квантування, які виникають під час аналого-цифрового перетворення;
- спотворення характеристик, яке відбувається при квантуванні коефіцієнтів цифрових фільтрів;
- переповнення розрядної сітки у процесі обчислень;
- похибки округлення проміжних результатів обчислень.

В процесі проєктування цифрових фільтрів важливо правильно вибрати:

- способи й формати подання чисел;
- дійсні або комплексні числа;
- числа з фіксованою або плаваючою комою тощо;
- динамічний діапазон подання даних, зумовлений розрядністю регістрів;
- устаткування;
- оцінити можливий вплив зазначених вище шумів і перешкод.

Наприклад, КІХ-фільтр під час проєктування дискретизується, щоб перетворити його на цифрову послідовність. Необмежено довгі у часі імпульсні характеристики повинні при цьому обрізатися для такого фільтрування.

Якщо імпульсна характеристика фільтра є ненульовою в діапазоні негативного часу (такий фільтр називають антикаузальним), її треба змістити по осі часу праворуч (Рис. 5.7), доки всі коефіцієнти імпульсу-відгуку не опиняться розташованими в діапазоні позитивного часу [103], [104].

Для прикладу розглянемо **фільтр нижніх частот (Low Pass Filter)**. Ідеальний фільтр має АЧХ, зображену на Рис. 5.3 у вигляді прямокутника. Фізично такий фільтр не може бути реалізований, втім це твердження стосується лише аналогових фільтрів. Імпульсна характеристика, яка відповідає такій ідеальній АЧХ, визначена як функція $\sin c(x)$:

$$\sin c(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (5.3)$$

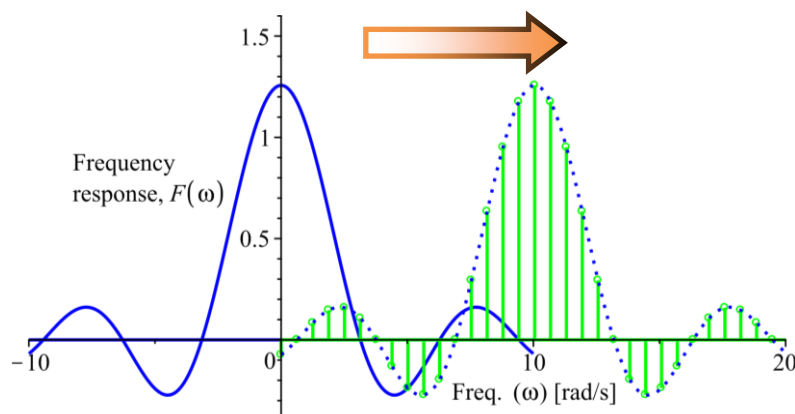


Рис. 5.7 – Зміщення імпульсної характеристики КІХ-фільтру [104].

Діаграма Рис. 5.7 (див. Додаток Д) зображує обрану імпульсну характеристику цифрового фільтру синім кольором. Після її урізання, зміщення і дискретизації коефіцієнти фільтрування (див. вираз (5.1)) показані лініями зі стрілками.

5.4 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. В чому полягають переваги ЦОС?
2. Сформулюйте головну проблему цифрової обробки БМС та напрямки її вирішення.
3. Що являє собою частотна фільтрація та її задачі?
4. В чому полягає програмна обробка сигналів?
5. Поясніть, в чому полягає цифрова програмна фільтрація.
6. Що являє собою аналоговий фільтр? Яке їх призначення?
7. Що являють собою частотні фільтри?
8. Які базові види частотних фільтрів виділяють?
9. Поясніть, в чому полягає характерна особливість роботи фільтрів НЧ та ВЧ.
10. Чим відрізняються пасивні та активні фільтри?
11. В чому полягають відмінності між аналоговими та цифровими за експлуатаційними властивостями?
12. Що характеризує комплексна передавальна функція аналогового фільтру?
13. Які чотири типи аналогових фільтрів отримали широкого розповсюдження?
14. Поясніть особливість АЧХ фільтрів Баттерворта та Чебишева 1-го і 2-го роду.
15. В чому полягають особливості КІХ- та БІХ- фільтрів?
16. Чим визначається довжина цифрового фільтра?
17. Поясніть, що являє собою імпульсна характеристика цифрового фільтру.
18. Як виглядає рівняння фільтрації нерекурсивних КІХ-фільтрів?
19. Що таке порядок цифрового фільтру?
20. Поясніть, в чому полягає синтез цифрового фільтра.
21. Що необхідно враховувати під час синтезу цифрового фільтру?

ПИТАННЯ

- 1  Вейвлети.
- 2  Методи вейвлет-аналізу, очищення та стискання одновимірних сигналів.

6.1 ВЕЙВЛЕТИ

У другій половині минулого сторіччя виник і успішно розвивається новий та важливий напрямок теорії та технології обробки сигналів, зображень та часових послідовностей, який отримав назву **вейвлет-перетворень** (ВП). ВП напрочуд добре пристосовані для вивчення структури неоднорідних, нестационарних процесів [105], тобто таких, якими є більшість біомедичних сигналів [106].

Термін вейвлет (*wavelet*) вперше з'явився в роботі Гроссмана та Морле у середині 80-х років XX сторіччя, хоча перший практичний вейвлет було запропоновано ще у 1909 році в роботі видатного угорського математика Альфреда Хаара, який називав їх прямокутними хвилями (Рис. 6.1). Спочатку вейвлети застосовувалися для обробки сейсмічних та акустичних сигналів, втім їх унікальні властивості швидко розширили сферу використання.

Вейвлети являють собою особливі функції у вигляді коротких хвиль (сплесків) з нульовим інтегральним значенням (інтеграл від вейвлета дорівнює нулю) по всій осі незалежної змінної, найчастіше координати, або часу [107]. Ці функції припускають зсув по осі змінної та масштабування (розтягання або стискання) завдяки:

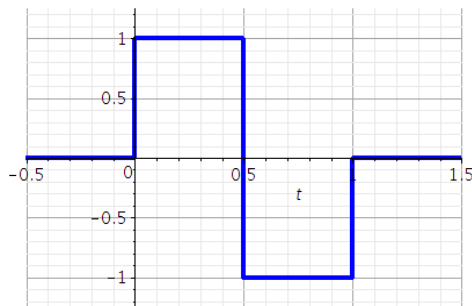


Рис. 6.1 – Вейвлет Хаара.

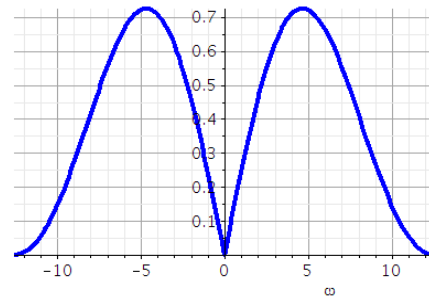


Рис. 6.2 – Фур'є-образ вейвлета Хаара в частотному представленні.

- зміні масштабів – здатні виявляти відмінності в характеристиках процесу на різних шкалах,
- зсувам по осі змінної – дозволяють аналізувати властивості процесу в різних точках інтервалу змінної, що досліджується.

Будь-який з відомих вейвлетів породжує повну систему ортогональних функцій [108], в базисі яких можна розкласти будь-яку функцію. Повнота такої системи гарантує її відновлення (реконструкцію, синтез) шляхом зворотного ВП після вейвлет-аналізу (декомпозиції сигналу в ряд по вейвлетах).

Більшість традиційних біомедичних діагностичних сигналів, як-от: ЕКГ, ЕЕГ, плетизмограми, пульсограми тощо, мають такі особливості:

- одновимірні (1D),
- суттєво нестационарні,
- найчастіше цифрові послідовності, задані у часовому представленні.

Вейвлети – сучасний потужний інструментарій, який останнім часом вживають для обробки таких сигналів та стискання отриманих даних. Вейвлет-перетворення є корисною альтернативою перетворенню Фур'є у багатьох практичних ситуаціях, зокрема для аналізу БС та БМС.

Під час традиційного Фур'є-аналізу сигнал розкладають на періодичні гармонічні компоненти (хвилі), локалізовані за частотами, але делокалізовані у часі. У той час як для вейвлет-аналізу характерним є те, що сигнал розкладають на компоненти, добре локалізовані як у часі, так і у частотному діапазоні. На Рис. 6.2 показаний Фур'є-образ **вейвлета Хаара** в частотному представленні, який виглядає типовим для всіх вейвлетів набором з двох смугових фільтрів: НЧ – нижніх частот та ВЧ – верхніх частот.

Вейвлети – це перенесені в часі (b) та масштабовані (a) копії, або так звані «**дочірні вейвлети**»:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (6.1)$$

Тобто «дочірні вейвлети» – це копії деякої швидко змінної функції, так званого «**материнського вейвлета**»: $\Psi(t)$.

Ідея вейвлет-перетворень полягає в розкладанні сигналу за базисною системою функцій, котрі мають локальний сплеск і швидко убивають на нескінченності. Всі вейвлети у частотному діапазоні виглядають набором з двох вузькосмугових частотних фільтрів – НЧ та ВЧ (Рис. 6.2). Саме тому вейвлет-перетворення особливо придатні для випадків, коли сигнали, які потрібно аналізувати, не періодичні.

6.1.1 Вейвлет-перетворення

Вирізняють **неперервне вейвлет-перетворення** (*continuous wavelet transform*, БВП), яке застосовують звичайно до неперервних (аналогових) сигналів, для яких масштаби та перенесення (параметри a, b) можуть приймати будь-які неперервні значення. Традиційним комп'ютерним інструментом таких аналізів визнають відому систему комп'ютерної математики MATLAB, яка має спеціальний програмний пакет для неперервних вейвлет-перетворень.

Дискретне вейвлет-перетворення (*discrete wavelet transform*, ДВП) використовується для дискретних (оцифрованих) сигналів з використанням дискретного набору масштабів ($a = 2^m$) та перенесень ($b = k \cdot 2^m$), де цілі числа $m = 1, 2, \dots, m_{\max}$ визначають рівні масштабування сигналу.

У практично важливій галузі **дискретного вейвлет-аналізу**, який переважно застосовується в комп'ютеризованих медичних вимірювальних системах та розрахунках, базисом слугують локалізовані ортогональні функції (загальна назва – вейвлети) [108], різновидів яких відомо вже декілька тисяч, і які підкоряються таким умовам:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \varphi(2x - n) \\ \psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \psi(2x - n) \end{cases} \quad (6.2)$$

де $\varphi(x), \psi(x)$ – так звані **батьківський** (відомий також як **скейлінг-функція**) та **материнський вейвлет** відповідно, які доволі часто неможливо визначити у символічній (аналітичній) формі, тобто у вигляді деяких замкнених виразів. За таких умов набори амплітудних коефіцієнтів (6.2) h_n, g_n визначають ці вейвлети і всі числові алгоритми оперують саме з такими цифровими наборами.

Вимога ортонормованості [109] системи функцій, які породжені батьківськими вейвлетами зводиться до певних вимог стосовно сум добутоків амплітудних коефіцієнтів h_n, g_n рівнянь (6.2), а саме:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n h_{n+2k} = \delta_{0,k} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n g_{n+2k} = \delta_{0,k} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n g_{n+2k} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

де $\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$ – відомий символ Кронекера.

Амплітудні коефіцієнти з рівнянь (6.2), (6.3) відомі як **коефіцієнти вейвлетів**, або інакше як сукупність двох цифрових фільтрів:

- ВЧ-фільтру (набір коефіцієнтів h_n),
- НЧ-фільтру (g_n).

Число коефіцієнтів у таких наборах (число $n_{\max}$, яке повинно бути парним для деяких вейвлетів) називають **довжиною цифрових фільтрів**.

Математичною основою дискретних вейвлет-перетворень є дві функції (див. вирази (6.2)):

- скейлінг-функція (батьківський вейвлет) – $\varphi(x)$,
- материнський вейвлет – $\psi(x)$.

На основі кожної з цих двох функцій створюється свій цифровий фільтр, які прийнято називати:

- низькочастотним (НЧ, $g[n]$),
- високочастотним (ВЧ, $h[n]$).

6.1.2 Процедура дискретного вейвлет-перетворення

ДВП – дискретне пряме вейвлет-перетворення виконується таким способом: вхідний сигнал $x[n]$ незалежно пропускають крізь обидва фільтри і на виході залишають лише парні відліки, – здійснюють так звану **децимацію** – відсіювання непарних відліків. Децимація показана на Рис. 6.3 символом стрілки, спрямованої вниз, та порядком децимації (6.2) в колах. Таким чином на виходах фільтрів маємо дві послідовності, кожна з яких удвічі коротша за вхідний сигнал (має удвічі менше відліків). Послідовність, пропущену крізь НЧ-фільтр $g[n]$, називають **вейвлет-коефіцієнтами апроксимації** (або W-коефіцієнтами, ВК), а послідовність після ВЧ-фільтру $h[n]$ – відповідно **W-коефіцієнтами деталізації**. Ця процедура показана на Рис. 6.3.

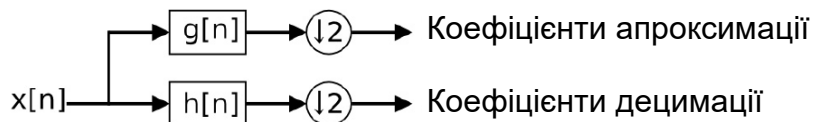


Рис. 6.3 – Схема дискретного вейвлет-перетворення.

Якщо повторити таку процедуру для коефіцієнтів апроксимації, то можна отримати ще два набори (кожен з них вже у чотири рази коротший вхідного сигналу): W-коефіцієнти апроксимації та деталізації другого рівня. На схемі Рис. 6.4 показане дискретне ДВП з трьома рівнями масштабування сигналу ($m_{\max} = 3$). Найвищий рівень масштабування визначається довжиною вектора (масиву) вхідних даних: якщо N – довжина вектору даних (кількість відліків), то $2^{m_{\max}}$ мусить бути дільником числа N .

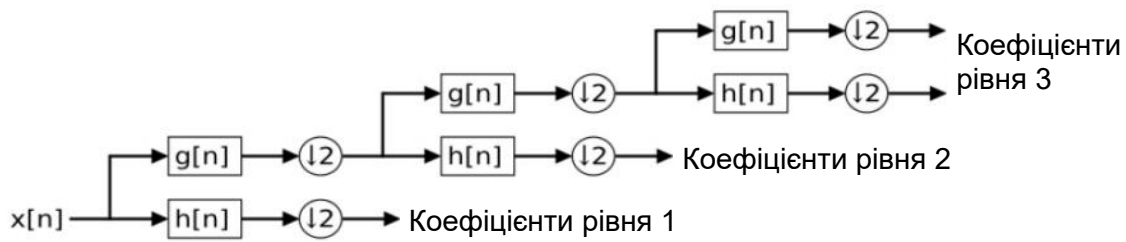


Рис. 6.4 – Дискретне ДВП з трьома рівнями масштабування сигналу ($m_{max} = 3$).

Важливими особливостями вейвлет-перетворення дискретних сигналів є зворотність та лінійність. Це дозволяє виконати ДВП, після того певним чином обробити W-коефіцієнти (наприклад, з метою очищення від шумів, та/або зменшення кількості коефіцієнтів, тобто стиснення сигналу), і, нарешті, виконати зворотне ДВП, тобто реконструювати (синтезувати) вхідний сигнал.

6.2 МЕТОДИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ, ОЧИЩЕННЯ ТА СТИСНЕННЯ ОДНОВИМІРНИХ БІОМЕДИЧНИХ СИГНАЛІВ

Розглянемо результати обробки та аналізу реальних вимірів систолічного (або так званого «верхнього») тиску крові (СТ) [110]. Спостереження за артеріальним тиском (АТ) пацієнта проводилися напівавтоматичним тонометром марки «Microlife BP 3AG1», виробництва Тайвань під наглядом компанії Мікролайф АГ, Швейцарія [111]. Результати первинних вимірювань представлені на Рис. 6.5 (див. [∞](#) Практика 6).

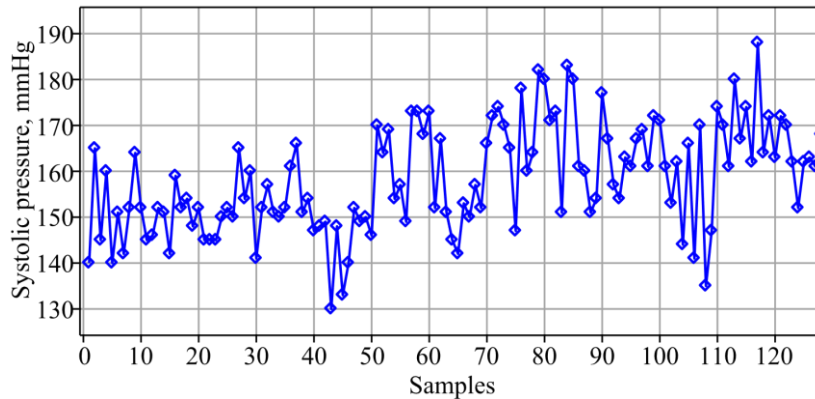


Рис. 6.5 – Результати реальних вимірів систолічного тиску крові.

Сигнал розкладався в ряд по вейвлетам Хаара (Рис. 6.1) за схемою Рис. 6.3. Після розкладання на першому рівні отримані дві послідовності **коефіцієнтів**:

- коефіцієнти **апроксимації** (Рис. 6.6),
- коефіцієнти **деталізації** (Рис. 6.7).

З Рис. 6.6 та Рис. 6.7 видно, що коефіцієнти апроксимації мають деякий розкид навколо ненульового середнього значення, тоді як коефіцієнти деталізації мають майже нульове середнє значення і доволі хаотично змінюються навколо нього.

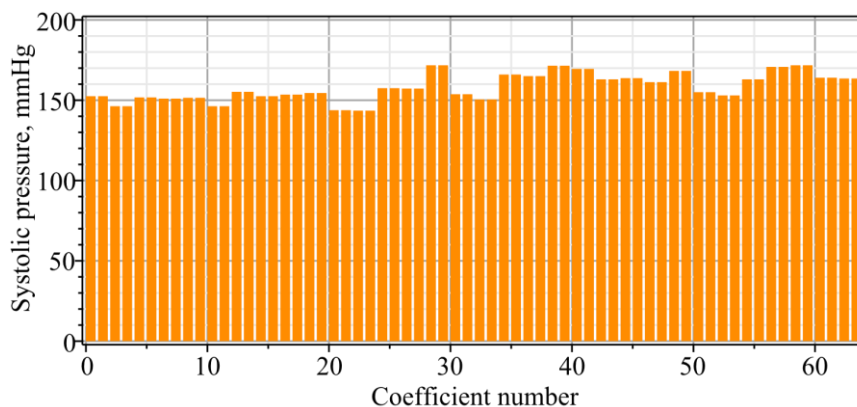


Рис. 6.6 – W-коефіцієнти апроксимації I-го рівня.

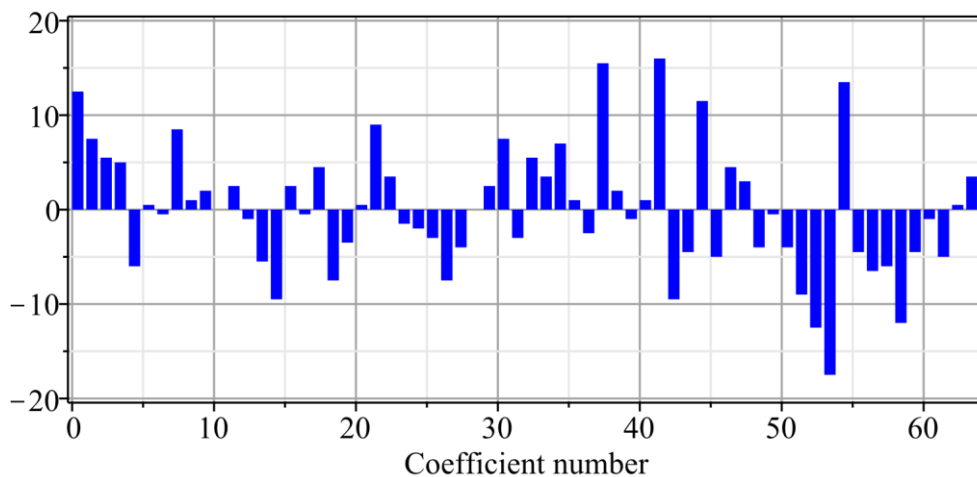


Рис. 6.7 – W-коефіцієнти деталізації I-го рівня.

Далі здійснюється обробка коефіцієнтів деталізації методом «м'якого порогу» (так званий «трешолдінг» коефіцієнтів, див.  Практика 6). Якщо обрано значення деякої порогової величини T , то коефіцієнти з масиву деталізації коректуються за таким правилом:

$$\tilde{b}_n = \begin{cases} 0 & \text{if } b_n < T \\ b_n - \text{sign}(b_n) \cdot T & \text{if } b_n > T \end{cases} \quad (6.4)$$

де $\tilde{b}_n, b_n$ – коректоване і початкове значення коефіцієнту деталізації, $n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$, N – довжина сигналу (кількість відліків).

Корекція (6.4) дозволяє позбутися шумів, залишивши серед коефіцієнтів деталізації лише мінімальну кількість значущих величин. Корекція (6.4) також сприяє стисканню сигналу, оскільки зменшує кількість ненульових коефіцієнтів розкладання. Порогова величина T для корекції коефіцієнтів деталізації може бути обрана різними способами. Зокрема, популярним є так званий «універсальний (шумовий) поріг» (на наступному рівні величина порогу трохи менша, тому що довжина масиву зменшується):

$$T_m = \sigma_b \sqrt{2 \ln \left(\frac{N}{2^m} \right)} \quad (6.5)$$

де $m = 1, 2, \dots, m_{\max}$ – номер рівня розкладання,

σ_b – статистичне стандартне відхилення, обчислене по всьому масиву коефіцієнтів деталізації деякого рівня.

Порогове значення (6.5) змінюється від рівня до рівня масштабування. На Рис. 6.8 представлений сигнал систолічного АТ очищений від шумів за дворівневою схемою Рис. 6.3.

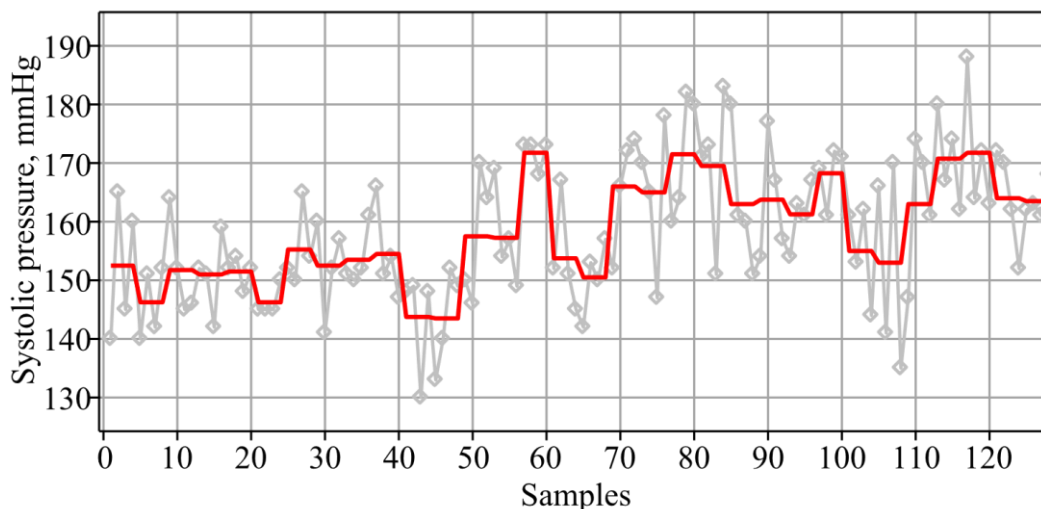


Рис. 6.8 – Очищений від шумів сигнал систолічного АТ на фоні реального (Рис. 6.5).

Очищення від шумів в межах вейвлет-аналізу дозволило поліпшити статистичні характеристики сигналу, що видно з порівняння кривих розподілів густини ймовірності сигналу до очищення (пунктирна крива) та після очищення (суцільна крива) на Рис. 6.9.

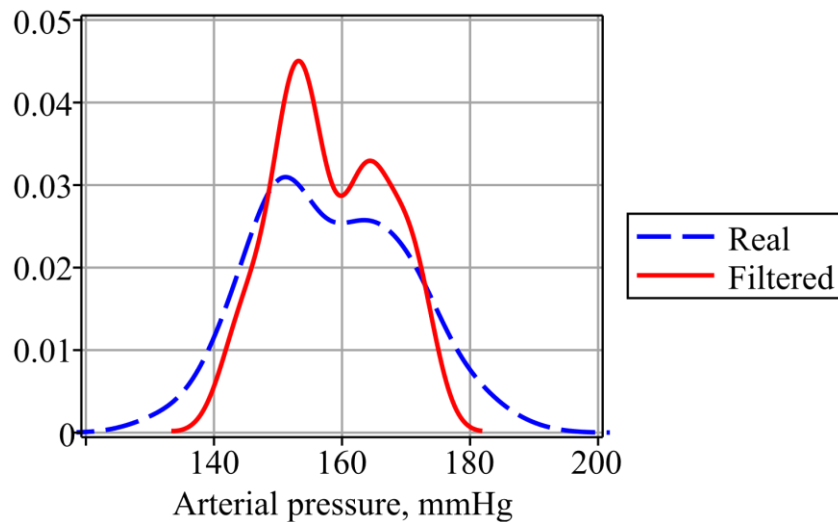


Рис. 6.9 – Криві розподілів густини ймовірності реального та очищеного сигналів СТ.

Розподіл густини ймовірності вимірів для очищеного сигналу ясно вказує на його відмінність від нормального розподілу Гауса і виразну двомодальність. Максимуми розподілу (**моди**) припадають приблизно на значення в 152 мм рт. ст. та 165 мм рт. ст. Отже, за період вимірювань у пацієнта відбувся стрибок типових значень систолічного тиску приблизно на 12-15 мм рт. ст.

Мода (*mode*) – одне або декілька значень випадкової величини, яке зустрічається найчастіше в ряді спостережень [112].

У термінах статистики модою дискретної випадкової величини є її найбільш ймовірне значення. Для неперервної ВВ мода – це таке значення, в якому густина ймовірності максимальна. Коли для ряду даних трапляється не одна мода, говорять, що сукупність є мультимодальною. Однак, така особливість є ознакою того, що набір даних не підпорядковується нормальному розподілу. Моду, як величину, що характеризує ВВ, вживають частіше для даних, які мають нечислову природу. Наприклад, з її допомогою можна визначити найпопулярніші типи якогось продукту і врахувати при прогнозі продажів чи плануванні його виробництва.

Після очищення результатів вимірювання більш виразним стає спектральний склад сигналу (Рис. 6.10). Високочастотні складові спектру є незначними за амплітудою, головними ж є два низькочастотних коливання з періодами коливань приблизно 17 ± 4 та 9 ± 2 відліків, які відмічені на Рис. 6.10 номерами «1» і «2».

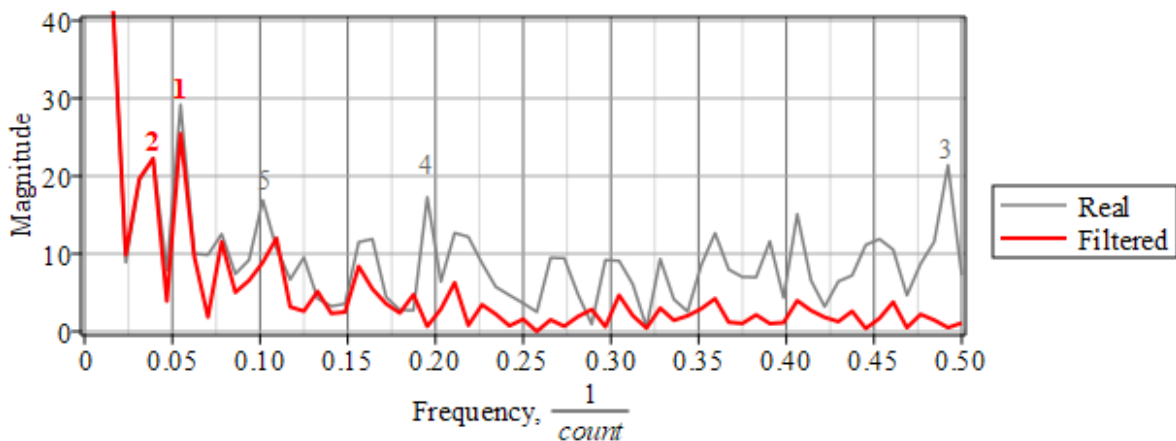


Рис. 6.10 – Спектральний склад сигналу.

Наявність низькочастотних коливань в очищеному сигналі підтверджує також його **корелограма** (Рис. 6.11, також див. [Практика 6](#)), яка демонструє типові биття, характерні для одночасного здійснення 2-х або більше коливальних процесів. Корелограма первинного сигналу (Рис. 6.12) менш виразна і не дозволяє однозначних висновків.

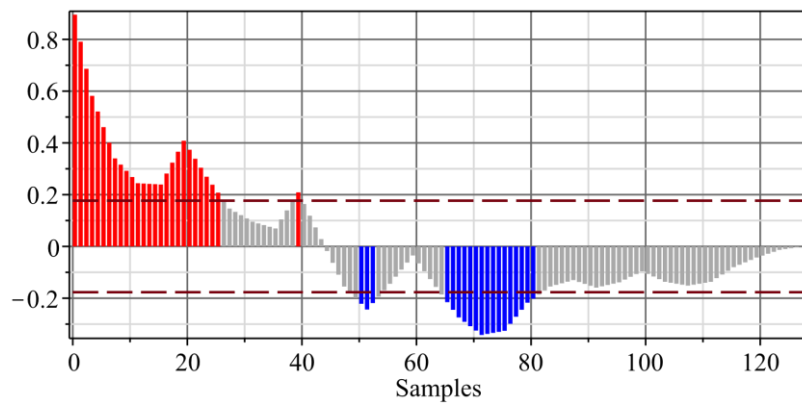


Рис. 6.11 – Корелограма очищеного сигналу.

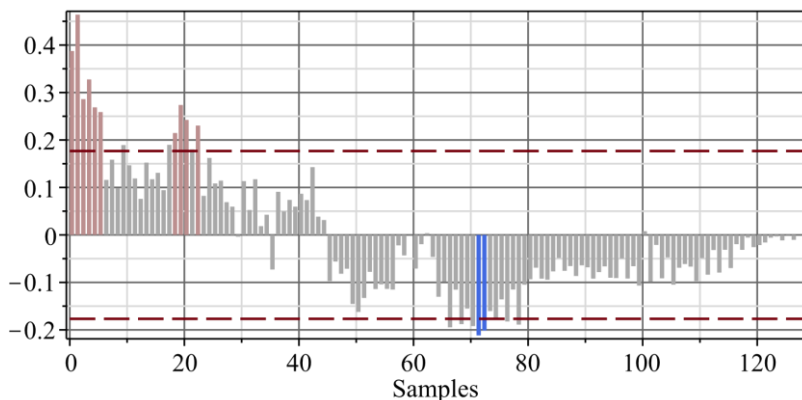


Рис. 6.12 – Корелограма первинного (нефільтрованого) сигналу.

6.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. До яких процесів можна застосовувати ВП? В чому особливість цих процесів?
2. Поясніть походження терміну вейвлет.
3. Що являють собою вейвлети? Поясніть на рисунку.
4. Обґрунтуйте поняття ортогональних функцій.
5. Поясніть призначення зворотного вейвлет-перетворення.
6. Для чого використовують вейвлети? Наведіть практичні приклади.
7. Поясніть відмінність між Фур'є- та вейвлет-аналізом сигналів.
8. Запишіть формулу та поясніть зміст понять «дочірній» та «материнський» вейвлети.
9. Поясніть ідею вейвлет-перетворення.
10. Що являє собою неперервне вейвлет-перетворення?
11. Поясніть особливості дискретного вейвлет-перетворення. Де воно застосовується?
12. В чому полягає вимога ортонормованості системи функцій, породжених батьківськими вейвлетами?
13. Поясніть поняття символу Кронекера.
14. Як отримуються і що являють собою коефіцієнти вейвлетів? Поясніть їх зміст.
15. Поясніть поняття довжини цифрових фільтрів.
16. Поясніть процедуру дискретного вейвлет-перетворення на схемі.
17. Що являють собою вейвлет-коефіцієнти апроксимації та децимації?
18. В чому полягає важлива особливість ВП?
19. Поясніть процедуру трешолдінгу.
20. Як визначається універсальний шумовий поріг?
21. Дайте визначення моди. Що характеризує двомодальність розподілу ВВ?
22. Що являє собою корелограма і яке її призначення?

ПИТАННЯ

- 1 ➡ Візуалізація біомедичних сигналів.
- 2 ➡ Кольорове картування біоелектричної активності мозку.

7.1 ВІЗУАЛІЗАЦІЯ БІОМЕДИЧНИХ СИГНАЛІВ

Медичні комп'ютерні системи візуалізації призначені для дослідження внутрішніх органів та їхніх структур з виведенням зображення на екран. Інформацію в таких системах «збирають» **інформаційні промені** – хвильові процеси різної фізичної природи, які можна використати як інформацію, що надходить від тіла людини. Інформаційними променями можуть бути:

- інфрачервоні (системи динамічного тепlobачення),
- рентгенівські (комп'ютерні рентгенівські томографи),
- радіоактивні (позитронно-емісійні томографи),
- ультразвукові (системи УЗД),
- електромагнітно-резонансні (магнітно-ядерні резонансні томографи для МРТ).

На Рис. 7.1 представлений один з перших рентгенівських апаратів для медичної візуалізації, який був першим апаратом, що дозволив здійснити неінвазивну діагностику внутрішніх тканин та органів.

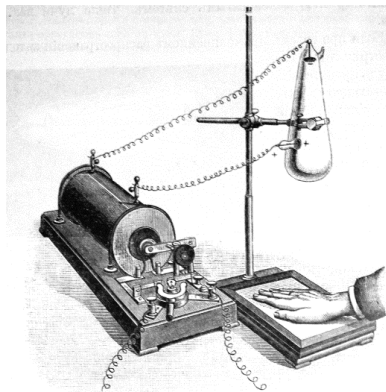


Рис. 7.1 – Один з перших рентгенівських апаратів.

Принцип обробки даних у візуальних комп'ютерних системах:

1. інформаційні промені, що виходять від досліджуваного органа, фіксуються датчиками-приймачами,
2. перетворюються на електричні сигнали,
3. оцифровуються за допомогою АЦП,
4. надходять у пам'ять комп'ютера,
5. після обробки програмним забезпеченням інформація реконструюється у вигляді зображення і подається на екран лікаря.
6. На підставі даних аналізу зображення та зіставлення клінічних симптомів він встановлює діагноз.

7.1.1 Біомедичні зображення

Під поняттям «**біомедичне зображення**» (БМЗ) розумітимемо доступну зоровому сприйняттю картину просторового розподілу будь-якого виду випромінювання, трансформованого у видиму частину оптичного діапазону. БМЗ є одним з важливих засобів отримання візуальної інформації про внутрішні структури й функції людського тіла. Робота з графічною інформацією є одним з найважливіших напрямків застосування комп'ютера в медицині.

Біомедичні зображення поділяють на:

- **Аналогові** зображення, які несуть у собі інформацію неперервного характеру. Прикладами є зображення на звичайних:
 - рентгенограмах,
 - скінтиграмах,
 - термограмах тощо.
- **Матричні (цифрові)** зображення отримуються за допомогою комп'ютера. Вони мають у своїй основі матрицю, що міститься в пам'яті ПК. Матричними зображеннями є **образи**, отримані під час:
 - комп'ютерної томографії,
 - цифрової рентгенографії,
 - МР-томографії,
 - ЕОМ-скінтиграфії з комп'ютерною обробкою інформації,
 - ультразвукового сканування тощо.

7.1.2 Цифрова обробка зображення

Цифрова обробка зображення використовується з такими **цілями**:

1. перетворення аналогового зображення в матричне, або навпаки;
2. поліпшення якості зображення:
 - компенсація дефектів системи, яка реєструє зображення,
 - зменшення шуму і підвищення **коефіцієнту SNR** (*signal to noise ratio* – відношення корисного сигналу до рівня шумів);
3. розрахунок клінічно важливих кількісних параметрів:
 - відстані,
 - площі,
 - об'єму,
 - кутів тощо;
4. полегшення інтерпретації:
 - розпізнавання структури,
 - обчислення дози для променевої терапії тощо;
5. встановлення зворотного зв'язку (автоматизовані хірургічні втручання).

Обробка й аналіз зображень – це покрокова процедура, що залежить від результатів попереднього етапу, а також знань і досвіду оператора. Має такі етапи:

- **фаза попередньої обробки** поліпшує якість зображення,
- **фаза сегментації** виділяє певні важливі елементи, його складові, що в підсумку поліпшує якість і точність діагностики.

Сучасне медичне діагностичне обладнання забезпечує величезну роздільну здатність за джерелами первинних медичних зображень. Зокрема:

- за **кількістю пікселів** (одиночних елементів матричних зображень) – понад 32 мільйони (32 Mpix) на кожен кадр зображення;
- за **роздільною здатністю в пікселі** – до $2^{14} = 16384$ (14 бітів на піксель) відтінків сірого кольору, і навіть до 65536 (16 бітів на піксель);

Для **динамічних процесів**, характерних, наприклад, для ангіографії (візуалізація системи кровоносних судин, таких як: артерії, артеріоли, капіляри, вени, венули тощо), і за умови розмірів матричного кадру 1024×1024 пікселів та швидкості до 60 кадрів/секунду обсяг кожної серії знімків може сягати 1 Гігабайту (1Gb) за умови звичайної кількості в 10-15 серій (проекцій) на кожне агіографічне дослідження. Одна серія спіральної комп'ютерної томографії за умови стандартної роздільної здатності 512×512 пікселів може мати до 3-4 тисяч кадрів, що у підсумку приблизно 1.5-2 Гігабайта інформації. Варто зауважити, що:

збільшення роздільної здатності медичних зображень вдвічі призводить до **зменшення** корисного сигналу в 4 рази з одночасним погіршенням параметру «сигнал/шум» (SNR) також в 4 рази.

Подальше збільшення роздільної здатності призводить до **погіршення SNR** завдяки фізичним властивостям як сенсорів, так і процесів випромінювання.

Покращити відношення «сигнал/шум» в зображеннях з високою роздільною здатністю можна лише за рахунок:

спеціальних методів математичної обробки з одночасним **зниженням** роздільної здатності. Такою є ціна за компроміс поміж збільшенням роздільної здатності та поліпшенням відношення «сигнал/шум».

Підсумкова (візуальна) роздільна здатність необробленого зображення завжди зменшена на 20-40% відносно теоретичного значення через зазначені вище причини. У той же час «**наведені зображення**», або **артефакти**, можуть бути нівельовані за рахунок послідовної математичної обробки цифрових зображень частково, або навіть повністю.

Технологія математичної обробки залежить від:

- самого зображення,
- методів його отримання.

Тому, в певному значенні, цей процес математичної обробки є творчістю.

Аналогічні проблеми виникають під час створення образів для друку: як під час використання медичних DICOM-принтерів, так і на звичайних професійних принтерах. Причому якщо для 3D (тривимірної) візуалізації створені спеціальні математичні програми для обробки моделей, то для двовимірних МЗ (2D) якісні інструменти обробки все ще знаходяться на стадії розробки.

Короткі висновки щодо цифрової обробки БМЗ можна сформулювати у декількох пунктах. Отже, **обробка БМЗ**:

- заснована на математиці і є процедурою виявлення прихованих елементів зображення, які без такої обробки практично не помітні;
- не спотворює вхідних даних, а дозволяє виявити тонкі структурні особливості органів, спеціально візуалізовані та підсилені для якісної візуальної діагностики, під час різних досліджень;
- дозволяє використання професійних «DICOM Ready» LCD-моніторів для якісної візуальної діагностики.

7.2 КОЛЬОРОВЕ КАРТУВАННЯ БІОЕЛЕКТРИЧНОЇ АКТИВНОСТІ МОЗКУ

Електроенцефалографія (ЕЕГ) – метод графічної реєстрації біопотенціалів головного мозку, що дозволяє проаналізувати його фізіологічні зрілість і стан, наявність осередкових уражень, мозкових розладів та їх характер. Метод полягає в реєстрації й аналізі сумарної біоелектричної активності головного мозку – електроенцефалограми. ЕЕГ може зніматися як зі скальпу, так і з глибоких структур мозку (Рис. 7.2).

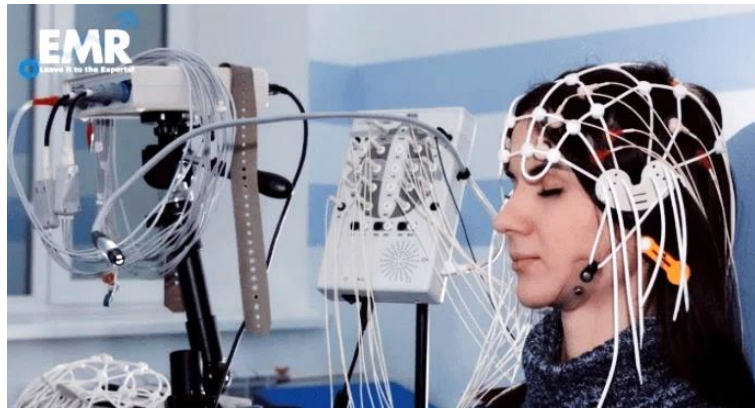


Рис. 7.2 – Підключення ЕЕГ-апарату для дослідження біопотенціалів головного мозку [113].

За повідомленням [113], зростання неврологічних захворювань стимулюватиме глобальний ринок високотехнологічних систем/пристроїв для ЕЕГ в період 2023-2028 рр. Окрім того, останніми роками набув стрімкого розвитку ринок біонічного [114] протезування, дослідження і розробки в галузі нейро-комп'ютерного інтерфейсу [115], наприклад, в реабілітації [116], [117], як і в цілому в галузі обробки біоелектричних сигналів [37], [118].

Електрична активність мозку може бути зображена у вигляді карти на поверхні скальпу людини. Картування діяльності людського мозку на поверхні скальпу відображає просторову інтенсивність різних мозкових хвиль, які представлені на спектрограмах ЕЕГ.

Сигнали ЕЕГ записуються зі шкіри голови (Рис. 7.3 і Рис. 7.4). Електроди можуть бути підключені до голови каналами C1, C2, C3, C4, C5, C6, T7, T8, CP1, CP2, CP3, CP4, CP5 і CP6 як розширена 10/20 електроенцефалографічна система запису з частотою дискретизації 0.5 кГц [119]. Просторовий розподіл електродів на скальпі в системі запису 10/20 показаний на Рис. 7.3. Електроди, використані у ході вимірювань ЕЕГ, позначаються пунктирною лінією навколо.

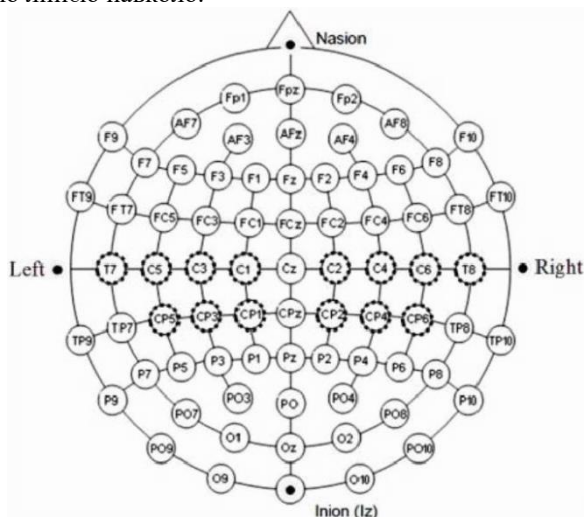


Рис. 7.3 – Схема картування [119].

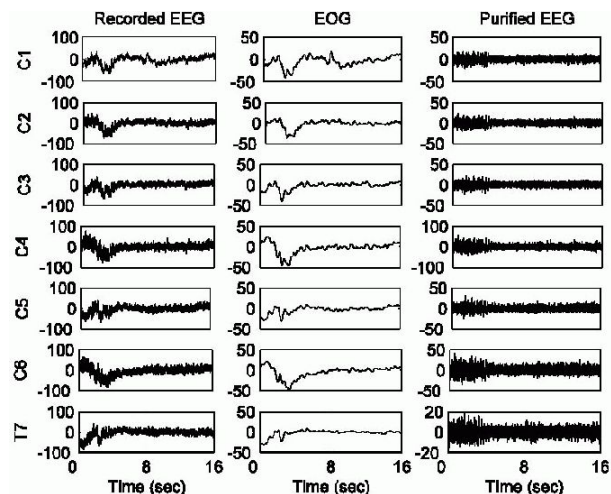


Рис. 7.4 – Фільтровані сигнали ЕЕГ, ЕОГ (електроокулограма) [119].

Розташування та номенклатури проміжних електродів (електроенцефалографічна система 10/20) відповідно стандартам електроенцефалографічного товариства. Літери вказують територіальне розміщення:

- А – мочка вуха (іноді «М» для соскоподібного відростка від англ. *mastoid process*);
- С – центральний (central);
- Р – тім'яний (parietal);
- F – лобовий (frontal);
- Fp – лобовий полярний (pre-frontal);
- О – потиличний (occipital).

Подальші результати (Рис. 7.4) отримані за допомогою вказаних 14 електродів на особі чоловічої статі 25 років, практично здоровому аспірантові в галузі комп'ютерної неврології [119]. На Рис. 7.4 у стовпчику ліворуч показані первинні сигнали ЕЕГ з шумами та артефактами. В середньому стовпчику ЕОГ, отримані цифровою фільтрацією первинних сигналів. У правому стовпчику показані різності між первинним сигналом та очищеними ЕОГ, тобто фактично шуми та артефакти первинного сигналу.

З очищеного сигналу ЕЕГ методами цифрової частотної фільтрації виокремленні характерні ритми мозкової діяльності: дельта, тета, альфа, бета та гамма-ритми, які займають різні частотні діапазони (Табл. 7.1).

Табл. 7.1

Частотні діапазони основних мозкових ритмів.					
Ритм	Дельта	Тета	Альфа	Бета	Гамма
Діапазон (Гц)	0.5 – 3.5	4 – 6	8 – 13	14 – 35	35 – 60

Результати **екстракції** з очищеної ЕЕГ характерних ритмів мозкової діяльності показані на Рис. 7.5 (очищена ЕОГ): дельта, тета, альфа, бета та гамма ритми протягом 1 секунди. **Спектральний аналіз сигналів** окремих ритмів показує їх належність діапазонам частот у Табл. 7.1.

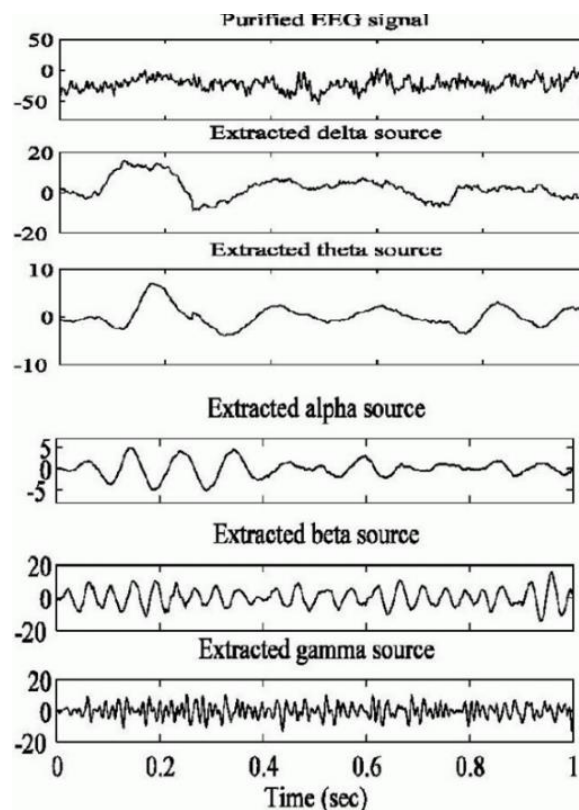


Рис. 7.5 – Результати екстракції з очищеної ЕЕГ характерних ритмів мозкової діяльності [119].

7.2.1 Альфа-ритм

Найбільш вивченим і найчастіше досліджуваним є альфа-ритм (8-13 Гц). Добре відомо, що альфа-ритм зазвичай краще спостерігається в задній та потиличній областях голови по обидві сторони, у порівнянні з іншими областями. Він починається з моменту закриття очей та релаксації і послаблюється з відкриттям очей або під час розумового навантаження. Альфа-хвилі мозку пов'язують з повністю розслабленим тілом і розумом. Цей ритм, як правило, пов'язаний з рівнем творчості вище середнього.

Більше того, він, в цілому, покращує природні здібності пацієнта пасивно засвоювати велику кількість інформації. Через такі видатні характеристики альфа-хвилі аналізувалися карти розподілу активності мозку саме для альфа-ритму, який активує електроди навіть у розслабленого пацієнта.

Карта скальпу використана для кількісної характеристики електричної активності мозку з точки зору сили нейронного відгуку та розташування на скальпі. Сигнали альфа-ритмічної компоненти, екстраговані з очищеної ЕЕГ, трансформуються до зображення електричної карти мозкової діяльності в заданому діапазоні частот для двовимірного дисплею. Результат таких топографічних перетворень – розподіл активності мозку по скальпу, показаний на Рис. 7.6.

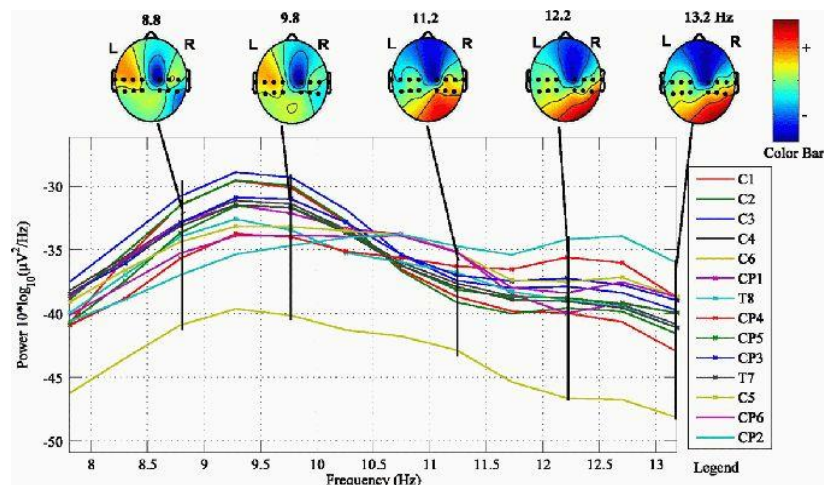


Рис. 7.6 – Кольорові карти активності мозку під час відпочинку [119].

Такі функціональні зображення (Рис. 7.6) дуже чутливі до змін стану мозку, потреб організму і послідовності активації нейронів, тому їх не можна охарактеризувати однозначно. Рис. 7.6 показує топографічні карти альфа-ритму мозку під час відпочинку. Індивідуальні кольорові лінії показують енергію, донесену альфа-хвилями до кожного електрода. Кольорова шкала представляє ступінь інтенсивності біопотенціалів для топологічної карти мозку. В цій шкалі червоний і синій кольори відображають найбільшу та найменшу інтенсивність відповідно в такому масштабі:

Червоний ⇒ **Жовтий** ⇒ **Зелений** ⇒ **Синій**

Літери «L» і «R» на Рис. 7.6 вказують на ліву та праву півкулі відповідно.

Кольорові карти електричної активності мозку наведені для декількох частот з діапазону альфа-ритму (Рис. 7.6), звідки видно, що найвища активність спостерігається в потиличній області (червоний колір), тоді як найнижча в лобовій і близьких до неї зонах.

Рис. 7.7 показує кольорові карти активності мозку під час станів спокою та уявлення рухів лівою або правою рукою для чотирьох різних пацієнтів, позначених літерами А, В, С, D. Всі пацієнти чоловічої статі у віці до 25 років, практично здорові студенти. Точками показані місця розташування використаних під час вимірів електродів. Кольорова шкала така сама, як і на Рис. 7.6.

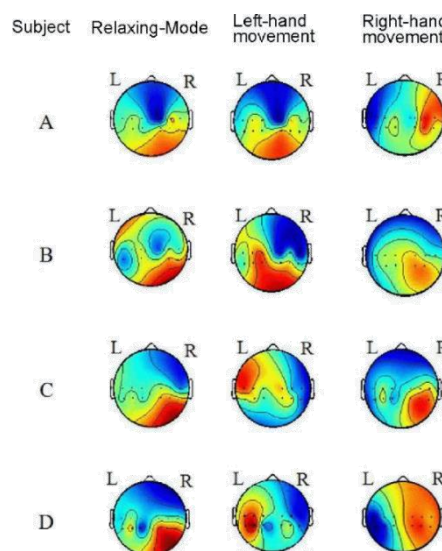


Рис. 7.7 – Розподіл активності мозку по скальпу: топографічні карти альфа-ритму мозку під час відпочинку [119].

7.2.2 Перспективи ЕЕГ у клінічному застосуванні

Майбутнє кількісної ЕЕГ для клінічного застосування лежить, без сумніву, на перетині цифрових методів аналізу сигналів та обробки зображень. Перспективним є зокрема поєднання двох сучасних приладів:

- сканеру магнітного резонансу (МРТ), який продукує анатомічні або функціональні зображення мозку з чудовою деталізацією та чіткістю,
- сканеру магнето-енцефалограм (МЕГ).

МЕГ здатний записувати швидкі зміни електромагнітного поля, породженого електричною активністю нейронів з глибоких шарів мозку.

Для МЕГ потрібні надчутливі магнітні сенсори на контактах Джозефсона, занурені в рідкий гелій, які називають СКВІД (SQUID – *superconducting quantum interference device*), і які використовують явище надпровідності. Отриманий МЕГ запис далі накладають на анатомічні зображення, отримані МРТ-сканером. Таким шляхом можлива побудова тривимірної карти (3D-карти) електричної активності мозку.

Діагностичні можливості 2D-кольорових карт електричної активності мозку показано на Рис. 7.8: порівнюються кольорові карти активності тета-хвиль для двох дівчат (вгорі) та двох хлопців (внизу). Кольорова шкала наведена ліворуч [120], [121].

Тета-ритм пов'язаний з пошуковою поведінкою, підсилюється при емоційній напрузі, часто спостерігається при психотичних порушеннях, станах сплутаної свідомості, страсах головного мозку. Високий рівень тета-ритму може показувати стани сонливості та втоми, що може бути проявом астеничного синдрому, хронічного стресу.

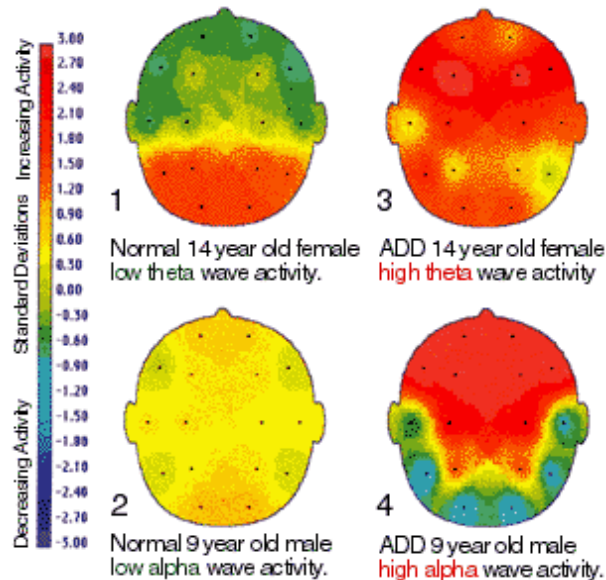


Рис. 7.8 – 2D-кольорові карти електричної активності мозку [120], [121].

Зверху показані кольорові карти тета-ритмів для двох 14-річних дівчат, ліворуч здорової, праворуч – з синдромом дефіциту уваги (ADD/ADHD, *attention deficit disorder*), тобто таких, які не здатні зосереджувати увагу на чомусь тривалий час. Внизу порівняння кольорових карт альфа-ритмів для двох 9-річних хлопчиків: ліворуч – здорового, праворуч – з синдромом дефіциту уваги. Відмінності явно помітні, особливо для досвідченого діагноста.

7.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. Що розуміється під біомедичним зображенням?
2. Поясніть поняття аналогових і матричних зображень.
3. Які цілі переслідує цифрова обробка зображення?
4. Що показує коефіцієнт SNR?
5. Поясніть зміст фаз обробки й аналізу зображень.
6. Обґрунтуйте, чому збільшення роздільної здатності зображення не завжди є корисним. Як в такому випадку можна вирішити проблему SNR?
7. Що являють собою артефакти?
8. Поясніть особливості цифрової обробки біомедичних зображень.
9. В чому полягає метод ЕЕГ? У яких галузях знаходить активного розроблення та впровадження цей метод?

ПИТАННЯ

1. Програмні пакети для роботи з двовимірними зображеннями.
2. Обробка зображень, побудова гістограм.

8.1 ПРОГРАМНІ ПАКЕТИ ДЛЯ РОБОТИ З ДВОВИМІРНИМИ ЗОБРАЖЕННЯМИ

8.1.1 DICOM

Більшість сучасної медичної апаратури, як-от: цифрові апарати УЗД, ендоскопічні відеопроцесори, рентгеновські системи та комп'ютерні томографи тощо, для роботи з медичним зображеннями користуються міжнародним стандартом DICOM (*Digital Imaging and Communications in Medicine*) [122], [123]. Цей універсальний формат даних дозволяє зберігання не лише серій МЗ, але також велику кількість супутньої інформації щодо умов отримання таких зображень. Окрім того, в протокол DICOM вбудовано інтерфейс відправки та отримання таких файлів по глобальній або локальній комп'ютерній мережі, що дозволяє негайну консультацію фахівців та експертів, які віддалені від місця отримання зображень.

DICOM – єдиний уніфікований галузевий стандарт для зберігання та транспортування медичних зображень.

Для того, аби можна було користуватися можливостями цього стандарту на 100% медичний прилад, який працює з МЗ, повинен мати опцію «**DICOM-сумісності**». Якщо така опція є, медичне обладнання може бути підключено до глобальної або локальної мережі та професійної роботи з даними у форматі DICOM. Якщо ж така опція відсутня, то завжди є можливість зберігання кадрів в стандартних графічних форматах (BMP, TIFF, JPEG, GIF, PNG тощо) з наступною конвертацією їх у формат DICOM. Цим шляхом можна під'єднати до мережі таке обладнання, яке спочатку не мало опції сумісності з DICOM. Зрозуміло, що для цього потрібне програмне забезпечення принаймні двох типів:

1. Так звані **в'ювери** (переглядачі файлів), які дозволяють перегляд, обробку та друкування файлів у форматі DICOM (з розширеннями DC3, DCM, DIC або без розширень);
2. Програмні **конвертери** файлів зображень зі звичайних графічних форматів у формат DICOM та навпаки.

8.1.2 PACS

PACS (*Picture Archiving and Communication System*) – системи передачі та архівації МЗ, які передбачають створення спеціальних віддалених архівів на DICOM Server. На таких серверах навіть дуже об'ємні архіви можна зберігати довгий час в доступному для проглядів та пошуків вигляді в рамках DICOM мережі.

Архітектура PACS (Рис. 8.1) являє собою медичну інформаційну систему, побудовану в технології DICOM, яка з розвитком технологій ускладнюється і на 2020 рік складається з таких взаємно пов'язаних компонентів [124]:

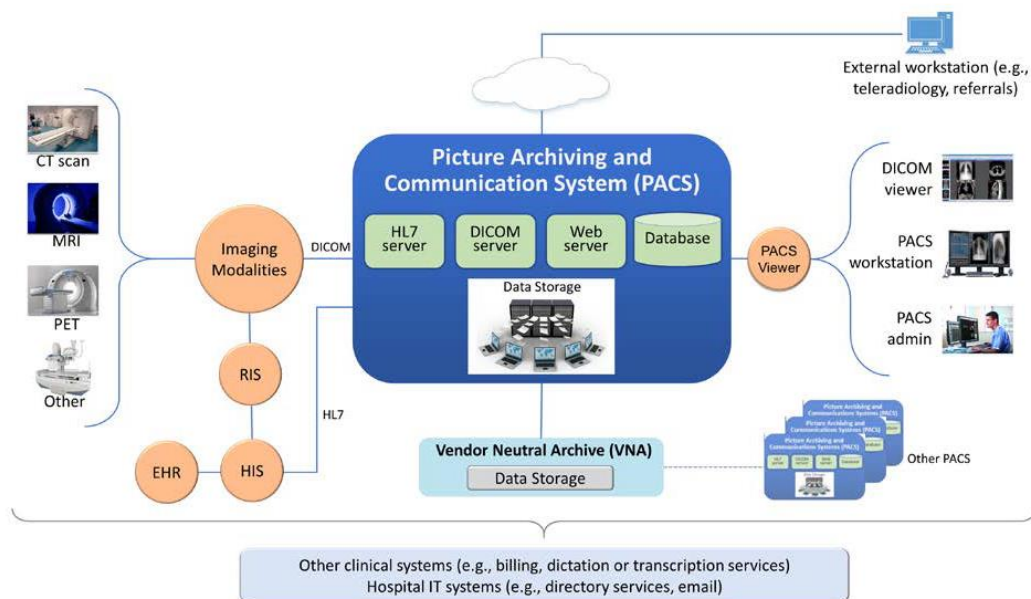


Рис. 8.1 – Умовна архітектура PACS високого рівня (див. [124], стор. 10).

1. робочих станцій (*workstations*):
 - переглядачів (*PACS Viewer*) всередині і ззовні периметра організації надання медичних послуг (*healthcare delivery organization, HDO*);
 - медичного персоналу з доступом до радіологічних інформаційних систем (*RIS*), медичних інформаційних систем (*HIS*) або до електронних медичних записів (*electronic health record, EHR*);
2. модальностей, або так званих «*imaging modalities*», які фактично є пристроями та засобами медичної візуалізації;
3. інтерфейсів серверів: *HL7-Server*, *DICOM-Server* та *Web-server*;
4. сервера реляційної бази даних – *Database*;
5. сервера застосунків *PACS* та незалежного постачальника архівів (англ. *vendor neutral archive, VNA*).

Робоча *DICOM* діагностична станція системи *PACS* являє собою програмно-апаратний комплекс з розширеними функціями обробки та візуалізації МЗ, де обробка виконується частково програмними засобами (*HIS*), а частково реалізується на електронному (апаратному) рівні (*RIS*). Це дозволяє здійснювати складні маніпуляції з об'єктами досліджень в реальному масштабі часу та мінімізувати час обстеження. В цьому полягає принципова відмінність *DICOM*-діагностичних станцій від *DICOM*-в'юерів, які оперують лише на програмному рівні, мають спрощені функції обробки зображень, а отже, більш обмежені можливості для діагностики.

Залежно від спеціалізації, модальності (зліва на Рис. 8.1) можуть бути таких видів:

- | | |
|---|------------------|
| ▪ радіологічна, або рентгенологічна широкого профілю; | ▪ ультразвукова; |
| ▪ ангіографічна; | ▪ маммографічна; |
| ▪ кардіологічна; | ▪ ендоскопічна; |
| ▪ томографічна; | ▪ мікроскопічна. |

Станції поділяють також на 2D-станції та станції 3D-реконструкції.

8.1.3 Програмний пакет PACS

Програмний пакет *PACS* призначений для автоматизації роботи діагностичних кабінетів, які працюють із МЗ, отриманими за допомогою різних медичних пристроїв для візуалізації, здатних зберігати й передавати зображення за допомогою стандарту *DICOM*:

- ультразвукові апарати,
- цифрові рентгенівські апарати,
- рентгенівські комп'ютерні томографи,
- магнітно-резонансні томографи,
- позитронно-емісійні томографи та інші.

Також програмний пакет *PACS* за допомогою спеціального модуля-конвертера здатний здійснювати аналогово-цифрове перетворення зображень, що не відповідають стандарту *DICOM*, і забезпечує тим самим можливість роботи також і з такими зображеннями.

Програмний пакет призначений для роботи на ПК у середовищі *Windows* як у локальній мережі та/або в інтернеті, так і самостійно, без підключення до локальної мережі. Установка програмного пакета *PACS* на ПК перетворює його в Автоматизоване Робоче Місце (*АРМ*) лікаря.

Програмний пакет *PACS* дозволяє здійснювати такі **операції**:

1. одержання цифрових МЗ за допомогою мережевого інтерфейсу або з інших електронних носіїв у стандарті *DICOM*;
2. одержання аналогових МЗ за допомогою пристроїв відеозахоплення та збереження їх у форматі *DICOM*;
3. накопичення МЗ, отриманих з різних джерел, на робочому місці лікаря з наступною передачею їх на інші місця або збереженням в архіві;
4. перегляд, обробку й аналіз медичних зображень;
5. опис МЗ із видачею лікарського висновку про дослідження, з можливістю використання готових шаблонів та/або інтегрованої в пакет Міжнародної класифікації хвороб і проблем зв'язаних зі здоров'ям (МКБ 10);
6. зберігання стандартизованих результатів медичних досліджень, протоколів і висновків у локальній базі на робочому місці лікаря;
7. архівацію результатів медичних досліджень за допомогою записуючих пристроїв прямо на робочому місці, або віддалених пристроїв запису, призначених для архівації;
8. передача результатів медичних досліджень і зображень на інші робочі місця з установленим програмним пакетом *PACS*;
9. передача МЗ за допомогою локальної мережі або інтернету на інші віддалені лікарські робочі місця (підтримка *DICOM STORE*);
10. передача стандартизованих МЗ та їх запис на твердотільні носії або у хмарні сховища у форматі *DICOM*;
11. передача МЗ у немедичних графічних форматах (*BMP, JPG*); послідовностей зображень – у відеофайл, з можливістю вибору довільного формату стиснення (кодека);

12. документування результатів МЗ (протоколів досліджень, медичних висновків і зображень) з одержанням твердих копій на друкувальному пристрої (підтримка функції DICOM PRINT);
13. передачу інформації про дослідження в інші програми обробки статистичних даних (Excel, Statistica тощо);
14. підтримку декількох користувачів – програма дозволяє працювати декільком користувачам з однією копією програми на одному комп'ютері. При цьому всі особисті налаштування кожного користувача, включаючи шаблони досліджень, зберігаються окремо;
15. безпечне зберігання інформації – програма має механізми захисту від несанкціонованого доступу до робочої інформації, дозволяючи, тим самим, забезпечувати збереження медичної таємниці.

8.2 ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ, ПОБУДОВА ГІСТОГРАМ

На зміну аналоговим приходять цифрові медичні зображення. Переведення в цифрову форму (із самого початку їхнього отримання або згодом) полегшує обробку зображень, зберігання й передачу медичних візуальних даних. Ці можливості значно розширилися з появою АРМ із великим об'ємом пам'яті для зберігання даних і достатньою обчислювальною потужністю. Комп'ютери також безпосередньо приймають участь у створенні деяких типів зображень, які не можуть бути отримані іншим способом:

- комп'ютерна томографія,
- позитронна емісійна томографія (ПЕТ),
- ядерний магнітний резонанс (ЯМР).

При комп'ютерній обробці зображень вирішується широке коло **завдань**:

1. поліпшення якості зображень;
2. вимірювання параметрів зображення;
3. спектральний аналіз багатовимірних сигналів;
4. розпізнавання зображень;
5. стискання зображень.

Стискання зображень, наприклад, зменшує об'єми машинної пам'яті для зберігання даних і, головне, час для їх передачі, а також спрощує організацію архівів і доступ до них.

8.2.1 Спектральний аналіз зображень

Під час обробки широко використовується аналіз спектрів медичних зображень. **Спектр зображення** (*image spectrum*) одержують прямим двовимірним перетворенням Фур'є функції $f(x, y)$, яка описує розподіл яскравості пікселів по площині зображення:

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i(k_x x + k_y y)) dx dy \quad (8.1)$$

де k_x, k_y – відповідні *хвильові числа* (координати оберненого простору).

Формула (8.1) пов'язує дійсну функцію, яка описує яскравість зображення $f(x, y)$ з комплексною функцією хвильових чисел – спектром зображення $F(k_x, k_y)$. Амплітуда та фаза спектру визначаються як модуль та аргументи комплексної функції $F(k_x, k_y)$:

$$\left. \begin{aligned} A(k_x, k_y) &= \text{abs}(F(k_x, k_y)) \\ \Phi(k_x, k_y) &= \text{arg}(F(k_x, k_y)) \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Зворотне ПФ дозволяє відновити зображення по його спектру:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) \exp(i(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y \quad (8.3)$$

Спектральна інтенсивність (*spectral intensity*) характеризує розподіл енергії по хвильових числах і визначається як квадрат модуля спектра зображення:

$$S(k_x, k_y) = A(k_x, k_y)^2 \quad (8.4)$$

Енергія зображення визначається як інтеграл енергетичного спектра по хвильових числах. Відповідно до теореми Парсеваля енергія зображення може бути обчислена за такими виразами:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y)^2 dk_x dk_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)^2 dx dy \quad (8.5)$$

Ймовірнісні моделі зображень (*probabilistic image models*) також широко використовуються для опису зображень. Зображення в цьому випадку розглядається як випадкова функція (процес) просторових координат (x, y) та часу t .

Випадковий процес називається **стаціонарним** у широкому змісті, якщо він має постійні значення математичного сподівання й дисперсії, а його автокореляційна функція залежить не від координат, а від їх різниці (зсуву, або так званого лагу). Випадковий процес називається **стаціонарним** у вузькому змісті, якщо його n -мірна густина розподілу ймовірностей інваріантна до просторового зсуву. Випадковий процес описується густиною розподілу ймовірності $p(x, y)$ яскравості в зображенні по просторових координатах для деякого фіксованого моменту часу t .

Відповідно до визначення **математичне сподівання** (середнє значення, *mathematical expectation*) стаціонарного процесу визначається так:

$$M(f(x, y)) = \xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot p(x, y) dx dy = const \quad (8.6)$$

Дисперсія (*dispersion, variance*) процесу визначається як:

$$D(f(x, y)) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x, y) - \xi)^2 \cdot p(x, y) dx dy = const \quad (8.7)$$

Автокореляційна функція зображення може бути представлена так:

$$R(\tau_x, \tau_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot f(x - \tau_x, y - \tau_y) dx dy \quad (8.8)$$

де τ_x, τ_y – відповідні лаги (зсуви) по координатних осях.

Наряду зі статистичним аналізом в просторовій області використовують аналогічний аналіз у спектральній області (області хвильових чисел) із застосуванням двовимірного дискретного ПФ.

Для аналізу текстур використовують метод гістограм розподілу спектральних коефіцієнтів. Загальною характеристикою такого підходу є те, що гістограми спектральних коефіцієнтів, що отримані в результаті інтегральних перетворень, більш стійкі та надійні, ніж гістограми розподілу окремих пікселів чи навіть груп пікселів по яскравості (Рис. 8.2).

Зокрема, на Рис. 8.2 зверху представлено чорно-біле зображення з насиченими темними відтінками, тому гістограма розподілу пікселів по яскравості має крутий пік на початку шкали, тобто, з боку темніших відтінків сірого (лівий бік шкали), а також дещо менший за висотою в частині світліших відтінків сірого. Пік на початку шкали інформує про те, що деякі області з найтемніших на фотографії настільки темні, що вони обрізаються до чистого чорного кольору, що означає втрату деталей в цих областях [125]. Зазвичай наявність таких піків на початку шкали характеризує недостатньо експоновану фотографію (Рис. 8.3) або занадто сильне затемнення таких областей під час редагування, що може мати гарний художній ефект, але небезпечний з точки зору медицини.

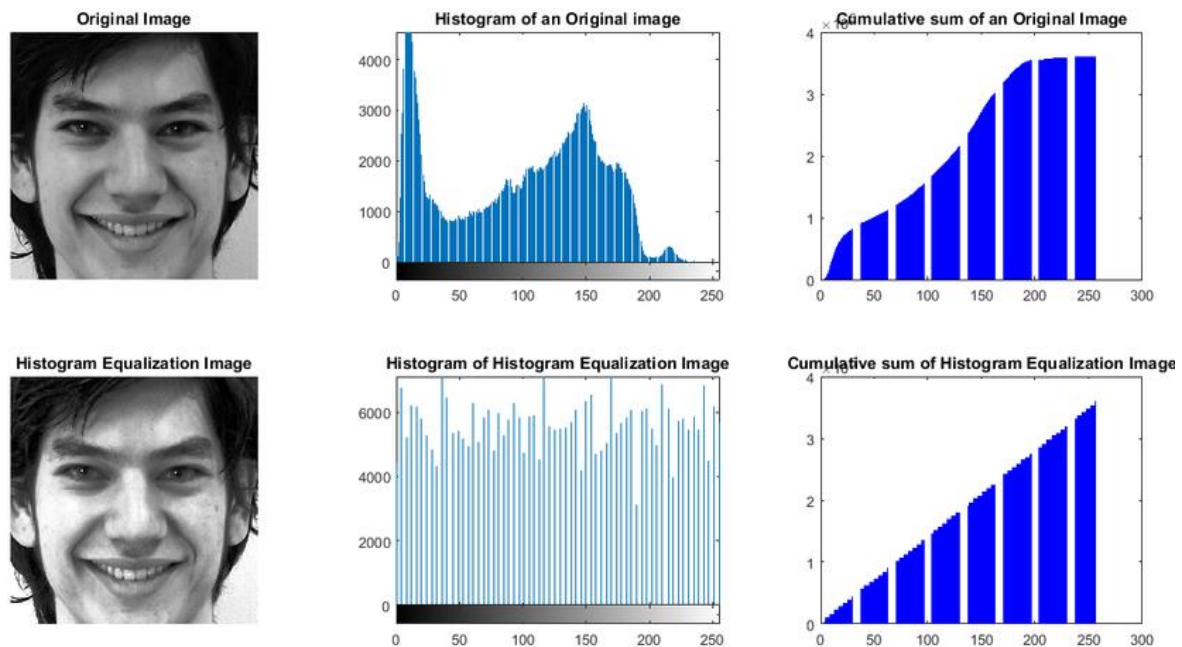


Рис. 8.2 – Зображення та гістограма розподілу пікселів по яскравості [126].



Рис. 8.3 – Рівні експозиції фотографії та відповідні гістограми [127].

Рис. 8.4 показує, як читати гістограми яскравості двовимірних зображень.

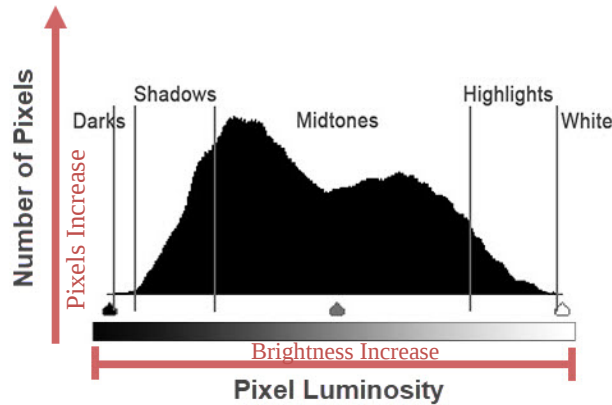


Рис. 8.4 – Гістограма яскравості двовимірного зображення [127].

Спектральний метод не такий чутливий до присутнього в зображенні шуму, але це одночасно є і недоліком в разі використання методу до розв'язання задачі розпізнавання незначних за розміром об'єктів на текстурованому фоні. Також спектральні методи згладжують різкі границі між об'єктами зображення.

Статистичний аналіз пікселів та спектральних коефіцієнтів на основі побудови гістограм їх розподілів в основному використовують до класифікації статичних текстур, тоді як для аналізу динамічних текстур використовують методи на основі кореляційного аналізу.

8.2.2 Фільтрація

Зазвичай зображення, сформовані різними інформаційними системами, спотворюються дією завад. Це ускладнює як їхній візуальний аналіз, так і автоматичну обробку. Ослаблення дії завад досягається фільтрацією: яскравість (сигнал) кожної точки вихідного зображення, спотвореного завадою, замінюється деяким іншим значенням яскравості, яке в меншій мірі було спотворене завадою.

Фільтрація зображень здійснюється в **просторовій** і **частотній** областях. При **просторовій фільтрації** зображень перетворення виконується безпосередньо над значеннями відліків зображення. Результатом фільтрації є оцінка корисного сигналу зображення. Така оцінка можлива завдяки тому, що зображення часто являє собою двовимірну функцію просторових координат, яка змінюється по цих координатах значно повільніше, ніж завада (шум), яка у свою чергу також є двовимірною функцією. Останнє дозволяє при оцінці корисного сигналу в кожній точці зображення брати до уваги сигнали в сусідніх точках, скориставшись певною подібністю сигналу.

В інших випадках, навпаки, ознакою корисного сигналу є різкі перепади яскравості. Однак, як правило, частота перепадів відносно невелика, так що на значних проміжках сигнал або постійний, або змінюється повільно. І в цьому випадку властивості сигналу проявляються при спостереженні не тільки його окремої точки (пікселя), але й при аналізі її околиці.

Поняття околиці є досить умовним. На Рис. 8.5 представлена ієрархія околиць деякого пікселя, позначеного символом «0» (в центрі). Логічно позначити найближчих сусідів цього пікселя символом «1». Символами «2», «3» і т. і., позначені більш віддалені сусіди виділеного пікселя.

9	8	7	6	7	8	9
8	5	4	3	4	5	8
7	4	2	1	2	4	7
6	3	1	0	1	3	6
7	4	2	1	2	4	7
8	5	4	3	4	5	8
9	8	7	6	7	8	9

Рис. 8.5 – Ієрархія околиць деякого пікселя.

Околиця може бути утворена лише найближчими сусідами, але може містити й більше елементів кадру. При розгляді околиці великого розміру іноді встановлюється різний ступінь впливу далеких і близьких від центра

околиці пікселів (відліків) на сигнал, сформований на виході фільтра в даній точці кадру. Отже, концепція фільтрації ґрунтується на використанні як даних поточної точки «0», так і деякої її околиці.

Традиційна фільтрація в частотній області вимагає виконання наступної послідовності перетворень:

1. пряме двовимірне дискретне перетворення зображення із просторової області в домен хвильових чисел (наприклад, за допомогою ДПФ);
2. перетворення (наприклад, фільтрація) дискретного спектра сигналу зображення;
3. зворотне двовимірне дискретне перетворення, що дозволяє відновити корисний сигнал зображення в просторовій області.

Завдання полягає в тому, щоб знайти таку обчислювальну процедуру, що забезпечила б одержання найкращих результатів. Використання фільтрів для аналізу текстурованих зображень аналогічно спектральному аналізу, але має ряд переваг в тих випадках, коли характерні ознаки спектру зображення відомі. Фільтрація дозволяє більш точно розділити сигнал на складові, які відповідають різним частотним смугам.

8.2.3 Сегментація та контури зображень

Для визначення контурів зображень (Рис. 8.6) [128], [129], наприклад, під час застосування методів сегментації [130] для розпізнавання медичних зображень [129], [131], облич або пальців, а також для комп'ютерного бачення і машинного навчання [132] та інше, – використовують статистичний аналіз фрагментів зображення та їх взаємну кореляцію з метою знаходження стрибкоподібних змін кольору і яскравості.



Рис. 8.6 – Визначення контурів зображень: а) за методом Собеля [132]; б) сегментація КТ головного мозку [131].

Велика група методів заснована на використанні математичних моделей, що відображають певну взаємодію між окремими пікселями або фрагментами зображень. Також для розв'язання задач розпізнавання об'єктів застосовують різні **методи фільтрації**, наприклад, до **I-ої категорії** відносяться:

- інверсні фільтри,
- фільтри Вінера,
- фільтри Байєса.

При цьому використовують аналогію між динамікою зображень та фізичними процесами, наприклад, дифузії. Для розв'язання деяких задач використовують стохастичні моделі.

Алгоритми сегментації зображень [132] базуються на одній з двох характеристик сигналу:

- яскравості,
- розривності або однорідності.

В першому випадку підхід базується на розбитті зображення на основі різких змін сигналу, таких як перепади яскравості на зображенні. Зазвичай пошук розривів [128], [132] здійснюється за допомогою ковзних масок (англ. *sliding/moving window/mask* [133]), результат застосування яких можна бачити на Рис. 8.6.

II-а категорія методів базується на визначенні однорідності зображення згідно наперед обраних критеріїв. Прикладами таких методів є [130]:

- порогова обробка,
- злиття,
- розбиття областей.

Сутність методів полягає в наступному: зображення розбивається на блоки, що не перекриваються і кожний блок за допомогою деякого критерію перевіряється на однорідність. Якщо блок неоднорідний, то він розбивається на блоки меншого розміру. Процес завершується тоді, коли жодний з блоків не може бути далі розділений.

8.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. Розшифруйте аббревіатуру DICOM та поясніть призначення цього стандарту.
2. Що таке PACS? Поясніть архітектуру PACS.
3. Які завдання вирішуються під час комп'ютерної обробки зображень?
4. Що собою являє і як отримати спектр зображення?
5. В чому полягають особливості двовимірного перетворення Фур'є?
6. Як визначається амплітуда та фаза спектру зображення?

7. Поясніть поняття спектральної інтенсивності та енергії зображення.
8. Для чого застосовується і в чому полягає метод гістограм розподілу спектральних коефіцієнтів?
9. В чому полягає одна з важливих переваг спектрального методу аналізу зображень?
10. Як здійснюється фільтрація зображень?
11. Поясніть процес просторової фільтрації.
12. Які ознаки корисного сигналу?
13. Поясніть послідовність здійснення фільтрації в частотній області.
14. В чому полягає і з якою метою здійснюється сегментація зображень?
15. Наведіть прикладі методів фільтрації для задач розпізнавання об'єктів.
16. Що являють собою ковзні маски?

ПИТАННЯ

- 1  Двовимірні вейвлети: принципи та методи вейвлет-аналізу зображень.
- 2  Аналітична обробка та стискання зображень.

9.1 ДВОВИМІРНІ ВЕЙВЛЕТІ: ПРИНЦИПИ ТА МЕТОДИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ ЗОБРАЖЕНЬ

Двовимірне (2D) неперервне зображення $P(x, y)$ під час дискретизації ділиться на N рядків і M стовпців. Перетин рядка і стовпця називається пікселем. Значення, присвоєне цілочисельним координатам $[m, n]$ з $\{m = 0, 1, 2, \dots, M - 1\}$ і $\{n = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$, є набором з двох цілих чисел (відліків) $[m, n]$.

Насправді, у більшості випадків $P(x, y)$ – який вважається фізичним сигналом, отриманим від 2D-датчика – залежить також від багатьох інших факторів, у тому числі глибини (z), кольору (λ) та часу (t), якщо це динамічне зображення.

Надалі розглядатимемо лише двовимірні статичні зображення (Рис. 9.1). На рисунку зображення розділено на $N = 16$ рядків та $M = 16$ стовпців. Виділений піксель має координати $[m, n] = [10, 3]$. Рядки нумеруються згори до низу, стовпці – зліва направо. Номер стовпця в наборі координат вказано першим. Зверніть увагу: нумерація рядків та стовпців починається з нуля, отже лівий верхній піксель має координат $[0, 0]$, а правий нижній відповідно $[15, 15]$.

Отже, зображення, зокрема медичні, є, вочевидь, двовимірними (2D). Для перетворення зображення можна використовувати двовимірні вейвлети або ж застосовувати одновимірні вейвлет-перетворення послідовно до рядків і стовпців зображення як сепарабельне двовимірне трансформування. У більшості випадків, коли вейвлети використовуються для обробки зображень та їх стиснення, останній вибір переважає через меншу обчислювальну складність такого сепарабельного перетворення.

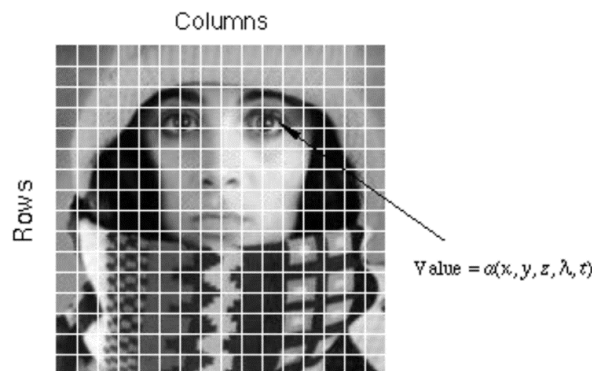


Рис. 9.1 – Оцифрування суцільного зображення [134].

9.1.1 Вейвлет-перетворення зображень

Перш ніж пояснити вейвлет-перетворення зображень більш детально, введемо деякі позначення. Вважатимемо зображення двовимірним ($N \times N$) масивом пікселів з N рядків і стовпців. Також припустимо (без втрати загальності), що рівняння $N = 2^r$ виконується для деякого додатного цілого числа r .

Кожному пікселю надається цифрове значення **яскравості** згідно до шкали на Рис. 9.2 (Maple-код див. у Додаток Е) [135], розміри якої (параметр **depth**) залежить від кількості бітів, відведених на опис одного пікселя.

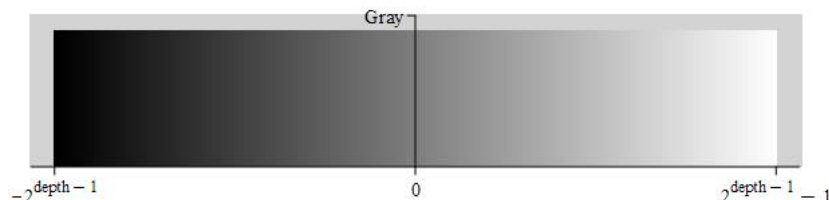


Рис. 9.2 – Шкала яскравості від чорного до білого кольору.

Найбільші значення $(-2^{depth-1})$ та $(2^{depth-1} - 1)$ відповідають чорному та білому відтінку, тоді як 0 є середній сірий. У залежності від бітності ($depth = 1, 6, 8, 10, \dots$) загалом маємо $\Lambda = 2^{depth}$ відтінків яскравості для кожного пікселя. Кількість бітів на один піксель називають його **глибиною** (англ. *depth*) [135], [136]. Чітко визначені відтінки сірого дуже важливі у КТ, оскільки у томографах не отримують кольорові зображення. Є спеціальна кількісна шкала рентгенівської щільності – Шкала Хаунсфілда (*Hounsfield unit*, HU) [137], за допомогою якої можна визначити, якій тканині або речовині відповідає певна ділянка на КТ. Наприклад, воді відповідає нуль,

тоді як повітря (–1000) НУ, жиру відповідає діапазон значень від –100 до –80, печінці від +50 до +70, кісткам – від +300 до +2500 ([137], стор. 260).

Типові значення для медичних зображень наведені в Табл. 9.1.

Табл. 9.1

Параметр	Характерні параметри матричних зображень.		
	Кількість рядків, N	Кількість стовпців, M	Шкала відтінків, Λ
Типові	256, 512, 525,	256, 512, 708,	2, 64, 256,
значення	625, 1024, 1035	1024, 1320	1024, 16384

Яскравість пікселів може задаватися у нормованому вигляді: 0 відповідає чорному, а 1 відповідає білому, або цілим числом в діапазоні від 0 (чорний) до $\Lambda = 2^{depth}$ – білий (Рис. 9.3).

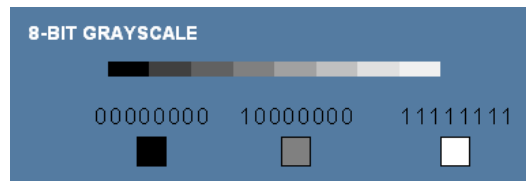


Рис. 9.3 – 8-бітна шкала сірого [136].

Для кольорових зображень, які інколи трапляються в медичній практиці, кожен піксель має три спектри яскравості (R, G, B) для кожного з базових кольорів. За такої системи опису яскравості зображення (Рис. 9.4 для прикладу, Maple-код див. у Додаток Е) може виглядати, як така цифрова матриця:

$$Im = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

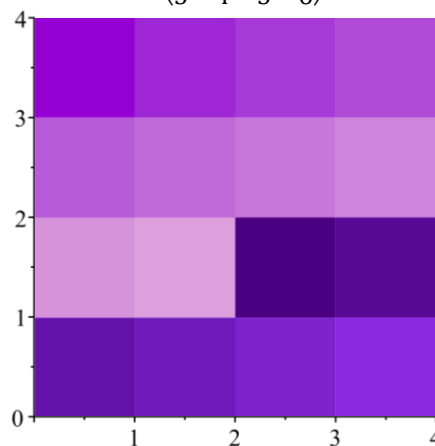


Рис. 9.4 – Довільне розташування кольорових пікселів.

Зображення (9.1) має по чотири рядки та стовпці, тобто, загалом 16 пікселів. Інтенсивність яскравості пікселів лежить в межах від 0 до 16, що відповідає глибині $depth = 4$ біта на кожен піксель по шкалі на Рис. 9.2, яка в такому випадку є дискретною на $\Lambda = 16$ відтінків сірого. Найбільш яскравим є піксель з координатами [1, 2], його інтенсивність дорівнює 9 (або 9/16 в нормованій шкалі). Найменш яскраві – пікселі з координатами [0,0], [2,2].

9.1.2 Перетворення Хаара

Вейвлети Хаара, які вже розглядалися нами в пункті 6.1, являють собою частково-постійні функції, задані за обмеженими інтервалами різних масштабів, які приймають лише два значення (–1, +1). Материнський вейвлет Хаара – це функція, яка дорівнює +1 на інтервалі [0, 1/2], та –1 на інтервалі [1/2, 1].

Вейвлети Хаара добре себе позначились в практиці обробки дискретних сигналів, таких як оцифровані аудіо-файли та цифрові фотографії. Примітна особливість перетворень Хаара полягає в тому, що вони є сепарабельними та легко обчислюються.

Нехай ми маємо одновимірний дискретний масив, наприклад, рядок матриці (9.1): $a = (s_0, s_1, \dots, s_{M-1})$. Перетворення Хаара (ПХ) розкладає такий сигнал на дві компоненти рівного розміру, кожна удвічі коротша за вхідний сигнал. Перша компонента має назву коефіцієнтів апроксимації, друга – коефіцієнтів деталізації. Точна формула для коефіцієнтів апроксимації має вигляд:

$$a_n = \frac{s_{2n} + s_{2n+1}}{\sqrt{2}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad (9.2)$$

Тоді як для **коефіцієнтів деталізації** маємо такий вираз:

$$a_n = \frac{s_{2n} - s_{2n+1}}{\sqrt{2}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad (9.3)$$

Якщо застосувати вирази (9.2) та (9.3) до першого рядку матриці (9.1) то два коефіцієнти апроксимації матимуть такі значення:

$$\frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}; \quad \frac{3+4}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}};$$

а два коефіцієнти деталізації відповідно такі:

$$\frac{1-2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{3-4}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}};$$

Таке ж саме перетворення (ПХ по рядках) застосуємо до всіх рядків матриці (9.1). Коефіцієнти апроксимації помістимо в перші дві позиції рядків нової матриці, а коефіцієнти деталізації – у другі дві позиції. Тоді на першому рівні ПХ по рядках матимемо таке перетворення

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ПХ по рядках}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & -1 \\ 9 & 13 & -1 & -1 \\ 17 & 3 & -1 & -1 \\ 7 & 11 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Застосовуючи на наступному кроці ПХ по стовпцях матимемо таке перетворення матриці (9.4):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & -1 \\ 9 & 13 & -1 & -1 \\ 17 & 3 & -1 & -1 \\ 7 & 11 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ПХ по ст.}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [12 & 20] & [-2 & -2] \\ [24 & 14] & [-2 & -2] \\ [-6 & -6] & [0 & 0] \\ [10 & -9] & [0 & 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A] & [H] \\ [V] & [D] \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Кожний з блоків отриманої в лівій частині перетворення матриці (9.5) має розмірність 2×2 і такі **особливості** (див. Рис. 9.5 а):

1. **Область А** (так звана *область наближення*, **LL**) – містить інформацію про глобальні властивості зображення, тому видалення будь-якого зі спектральних коефіцієнтів з цієї області призводить до найбільшого спотворення зображення;
2. **Область Н** (так звана *горизонтальна*, **HL**) – містить інформацію про деталі зображення і видалення коефіцієнтів цієї області означає видалення горизонтальних деталей;
3. **Область V** (так звана *вертикальна*, **LH**) – містить інформацію про деталі зображення і видалення коефіцієнтів цієї області означає видалення вертикальних деталей;
4. **Область D** (так звана *діагональна*, **HH**) – містить інформацію про деталі зображення і видалення коефіцієнтів цієї області означає видалення діагональних деталей і призводить до мінімальних спотворень зображення.

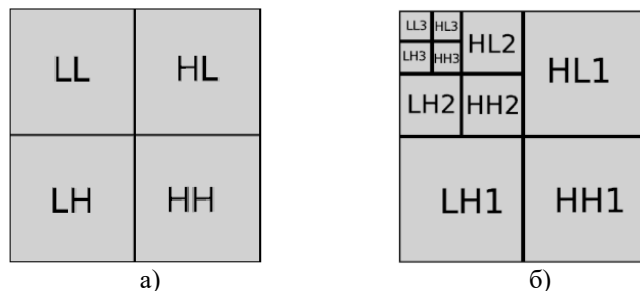


Рис. 9.5 – Позначення для блоків результуючої матриці:
а) для одного рівня; б) для 3-ох рівнів.

Стандартні позначення для блоків результуючої матриці, отриманої після ВП по рядках та стовпчиків, показано на Рис. 9.5 (а).

Вейвлет-перетворення можна застосовувати на декількох рівнях. В такому разі поділ вхідного зображення на області виглядатиме так, як показано на Рис. 9.5 б, де бачимо приклад ВП на трьох рівнях. Далі можна коректувати коефіцієнти деталізації в матриці (9.5), після чого здійснити зворотне ВП і реконструювати первинне зображення.

На Рис. 9.6 показаний приклад очищення від шумів фотографії за допомогою вейвлет-розкладання на декількох рівнях, послідовного коректування коефіцієнтів деталізації та наступної реконструкції первинного зображення.

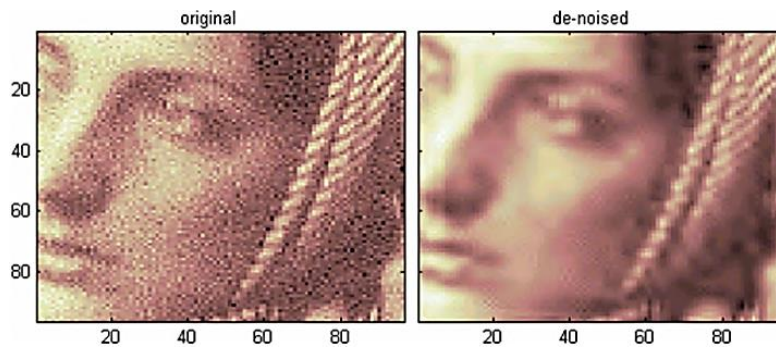


Рис. 9.6 – Приклад очищення від шумів фотографії за допомогою ВП [138].

9.2 АНАЛІТИЧНА ОБРОБКА ТА СТИСКАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

У галузі охорони здоров'я здійснюється **архівування** великої кількості зображень через постійне сканування та/або зберігання медичних зображень і документів. **Стискання** зображень передбачає, зокрема, таку перевагу як зберігання інформації без перевантаження системних серверів. Залежно від типу стискання, зображення можуть бути стиснені для економії апаратної пам'яті або для розсилки великій кількості абонентів (наприклад, пацієнтам для обстеження). Стиснуті медичні зображення можна **екстрагувати** з архіву для перегляду, при цьому зберігається їх якість та деталізація.

Процедури архівування та екстрагування виконуються двома **способами**:

- з частковою втратою інформації під час наступного розархівування;
- з повним відновленням інформації без її втрати під час розархівування.

Перший спосіб дозволяє стискати первинну сукупність даних в десятки разів. Він застосовується для роботи з даними, для яких втрата певної їх частини не впливає суттєво на їх функціональність. До таких даних відносять:

- медичні зображення,
- рисунки (графіки),
- аудіо-файли (звуки) тощо.

Втім, варто зауважити, що стискання медичних зображень, таких як томографи або рентгенографи, більше ніж в 5 разів, призводить до певних спотворень, які треба враховувати на практиці.

Другий спосіб є менш ефективним: сукупність даних стискається лише до 5-ти разів, інколи навіть в 1.5–2 рази. Таке стискання застосовують для даних, які не припускають втрати жодної інформації під час розархівування:

- медичні документи,
- бази даних,
- комп'ютерні програми тощо.

Основним форматами з частковою втратою даних під час стискання є:

1. для графічних зображень – формат .JPEG (JPG);
2. для відеофільмів – формат .MPG;
3. для звукозаписів – формат .MP3.

Базовими форматами без втрат інформації для стискання є такі:

1. для графічних зображень – формати .GIF; .TIFF; .PCX; .DJVU тощо;
2. для відеофільмів – формат .AVI;
3. для інших типів даних – формати .ARJ; .ZIP; .RAR тощо

Глибина пікселів (параметр *depth*, див. п. 9.1.1) суттєво впливає на об'єм пам'яті, потрібний для зберігання медичного зображення. Табл. 9.2 дає уявлення про потрібні значення для різного типу медичних зображень

Табл. 9.2

Глибина пікселів (біт) для різних медичних зображень.				
Метод	УЗД	Допплерівське картування	Сцинтиграфія	Рентгеноскопія
Depth	6–8	12	6–8	8
Метод	Рентгенографія	Ангіографія	Томографія	Радіонуклідна діагностика
Depth	10–14	10–12	16	8

Системи медичної діагностики для вивчення структур мають цифрові матриці порядку 256×256 , 512×512 , 1024×1024 пікселів (інколи навіть до 4096×4096 пікселів). Для формування таких 2D-зображень, навіть при 8-бітній глибині пікселя, потрібно до 5 Мб пам'яті комп'ютера. Ще більше ресурсів потребують об'ємні 3D- та потокові 4D-файли з кольоровим кодуванням. Сучасні томографи для виконання досліджень з поточними тривимірними зображеннями з кольоровим кодуванням потребують до 5 Гб оперативної пам'яті.

9.2.1 Формат JPEG та JPEG2000

Формат JPEG – основний формат для стискання та зберігання растрових медичних зображень. Він відновлює достатньо високоякісні копії оригіналу, дозволяючи стискати його у 5–10 разів без втрати суттєвої інформації. Останній варіант цього формату JPEG2000 дозволяє стискати медичні зображення до кратності 100 і використовує техніку вейвлет-розкладання.

Рис. 9.7 показує оригінальне (ліворуч) та стиснуте і потім розархівоване (праворуч) томографічне зображення грудної клітини. Оригінальне зображення в форматі .TIFF з розміром у 1.07 Мб. Стиснуте зображення в форматі .JPEG2000 з розміром 60.3 Кб, тобто, майже у 18 разів менший. Якість обох томограм можна оцінити візуально.

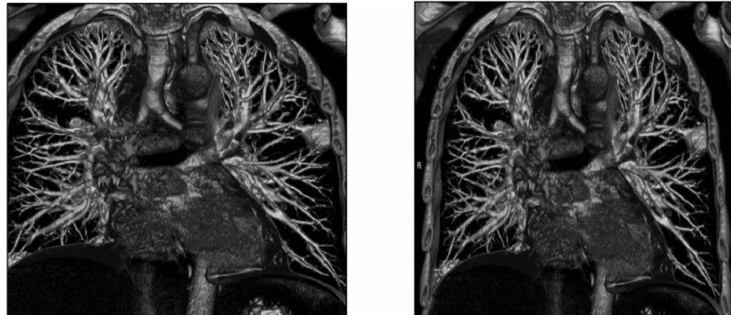


Рис. 9.7 – Оригінальне та розархівоване після стискання томографічне зображення грудної клітини.

Незалежно від типу обладнання та його походження, всі медичні діагностичні апарати обов'язково мають вихідний термінал, який підтримує стандарт DICOM (див. п. 8.1.1).

9.2.2 Комп'ютерна обробка медичних зображень

Суттєвою перевагою цифрових медичних зображень є можливість їх комп'ютерної обробки: на **першому етапі** – попередньої обробки, а далі фільтрування, корекції, очищення. Наприклад, корекція зображення з метою компенсації дефектів детекторів випромінювань, зокрема неоднорідності по полю великого сцинтиляційного кристалу в гамма-камері або лінійки УЗ датчиків. На цьому ж етапі коректують фізіологічні фактори, які створюють перешкоди і погіршують зображення, наприклад дихання пацієнта, наявність маркерів в оточуючих тканинах тощо. На деяких апаратах для візуалізації такі корекції зображень виконуються програмно в автоматичному режимі, на інших – вони здійснюються оператором (лікарем, наприклад).

Другий етап обробки – аналітичний. Його здійснюють вже під час аналізу зображення. Наприклад, з метою поліпшення якості зображення можна провести процедуру згладжування, тобто вирівнювання неоднорідності, контрастування органів шляхом придушення оточуючого фону, якщо він заважає візуальному сприйняттю. Можна виконати, наприклад, кольорове кодування зображення, що часто поліпшує якість його сприйняття.

Особливою формою аналітичної обробки зображень є так звана «алгебра кадрів»: складання, або віднімання декількох зображень за допомогою комп'ютера. Робиться це, як правило, автоматично під час дослідження. Таким шляхом, зокрема, отримують зображення судин під час дигітальної субтракційної та комп'ютерної томографічної ангіографії (Рис. 9.8).

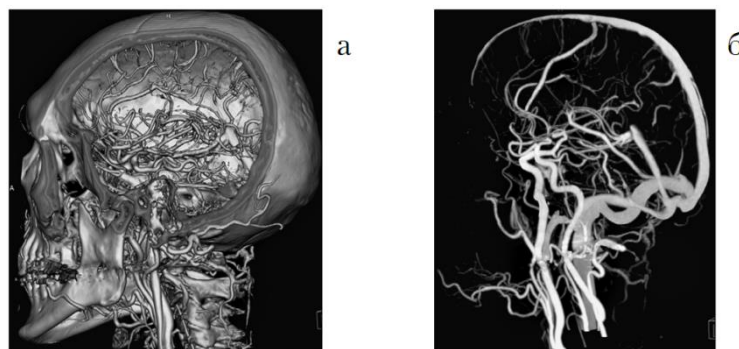


Рис. 9.8 – Дигітальна субтракційна та КТ ангіограми.

На Рис. 9.8 а зображена первинна комп'ютерна томограма судин головного мозку (ангіографія), на Рис. 9.8 б те саме зображення після комп'ютерного «віднімання» кісток скелету, які маскували систему судин.

Викремлення так званих «зон інтересу» на медичному зображенні – один з важливих етапів аналітичної обробки діагностичних зображень на комп'ютерах. Така зона – це певна ділянка зображення (субматриця), яка викликає найбільший інтерес у діагноста. Як правило, нині таке виділення здійснюють в ручному режимі оператор або лікар.

Втім, вже існують комп'ютерні програми які автоматично виділяють проблемні зони інтереса за допомогою так званих **CAD-технологій** (*Computer Assisted Detection*). Такі технології здатні деталізувати зображення та поліпшити його якість у виділених зонах. Сьогодні вже існують потужні віддалені сервери, які спеціалізуються на послугах в галузі таких CAD-технологій, так звані «хмарні технології». Деякі цифрові апарати (наприклад маммографи) вже зараз випускаються з вбудованою CAD-технологією (Рис. 9.9).

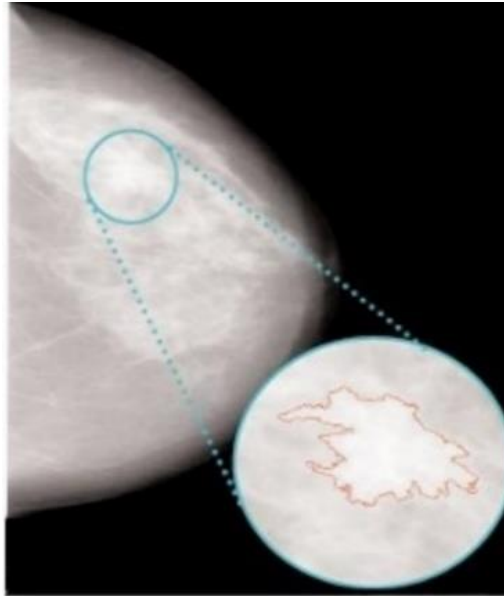


Рис. 9.9 – Маммограма з побудованою та збільшеною за допомогою CAD проблемною зоною інтересу.

На Рис. 9.9 представлена маммограма з побудованою та збільшеною за допомогою CAD проблемною зоною інтересу, в якій чітко видно пухлину, її розміри та контури.

9.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

1. Поясніть, що являє собою піксель зображення.
2. Якими способами можна здійснити перетворення зображення?
3. В чому полягає особливість вейвлетів Хаара, завдяки якій вони використовуються для обробки аудіо-файлів та цифрової фотографії?
4. Поясніть процес застосування перетворення Хаара до зображення.
5. В чому полягають особливості блоків (областей) матриці після застосування перетворення Хаара до зображення?
6. Що передбачає стискання зображень? Які переваги його використання у медицині?
7. Поясніть, що являють собою формати JPEG та JPEG2000. В чому полягають їх особливості та відмінності?
8. Поясніть етапи комп'ютерної обробки зображення.
9. Яке призначення CAD-технологій?

ПРАКТИКА

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ТА СПЕКТРИ СИГНАЛІВ

- 1  Дискретизація аналогових сигналів та частота Найквіста.
- 2  Фур'є спектри дискретизованих та аналогових сигналів.

10.1 ДИСКРЕТИЗАЦІЯ АНАЛОГОВИХ СИГНАЛІВ ТА ЧАСТОТА НАЙКВІСТА

10.1.1 Вступ і постановка задачі

Розглянемо задачу оцінки сигналу, отриманого від деякого сенсору під час зіткнення довільної структури з твердою поверхнею [139]. Для прикладу, це може бути краш-тест (*crash-test*) автомобілю [140], [141].

Результуючий сигнал стосовно прискорення (акселерації) об'єкту, зареєстрований від окремого сенсору, у таких випадках складатиметься з сигналу відносно низької частоти від фактичної фізичної, а отже й швидкоплинної акселерації (прискорення) об'єкту, на який обов'язково накладається сигнал внаслідок високочастотного сенсорного резонансу.

Нижче визначаємо декілька простих аналітичних функцій, щоб змодельовати ці складові результуючого сигналу. Також дослідимо та пояснимо вплив частоти дискретизації на результати обробки такого сигналу в світлі теореми відліків та з урахуванням частоти Найквіста.

10.1.2 Моделювання аналогового сигналу

Підключимо програмний пакет **Typesetting** Maple 2021 і за допомогою команди **Settings** та **interface** пропишемо деякі опції для зручності подальшої візуалізації:

```
> restart:
with (Typesetting):
> Settings(typesetdot=true, typesetprime=true):
interface(displayprecision=5, rtablesize=5):
plotopt:=labeldirections=[horizontal, vertical],
font=[TIMES, ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:
> hor:=440: ver:=hor/(1/2 + sqrt(5.)/2):
# "golden" size of plots
```

♦ 2.1 Фізичний відгук сенсора на зіткнення

Простим наближенням для представлення фізичної частини типового ударного імпульсу, викликаного зіткненням, є синусоїдальна хвиля з експоненціально згасаючою в часі амплітудою (Табл. 10.1).

Табл. 10.1

Вхідні значення краш-тесту.	
Параметр	Величина або значення
Фізична структурна частота (Гц)	> f1:=1e3:
Амплітуда ударної хвилі (мВ)	> A01:=1.5e3:
Напівширина ударної хвилі (Гц)	> BW1:=3e2:
Момент відліку часу (с)	> tau1:=0.:
Огинаюча функція сигналу	> alpha1:=- (Pi*BW1)^2/ln(0.5) ; $\alpha_1 := 1.281 \times 10^6$ > envelope1:=unapply($\exp(\alpha_1 \cdot (t - \tau_1)^2), t);$ $\text{envelope1} := t \mapsto e^{-1.281 \times 10^6 \cdot t^2}$
Фізичний імпульс зіткнення (корисний сигнал)	> a1:=unapply(A01*envelope1(t)* $\sin(2 \cdot \text{Pi} \cdot f_1 \cdot t), t);$ $\alpha_1 := t \mapsto 1.500 \times 10^3 \cdot e^{-1.281 \times 10^6 \cdot t^2}$ $\cdot \sin(6.283 \times 10^3 \cdot t)$

Зобразимо змодельований корисний сигнал сенсору, зумовлений фізичним імпульсом зіткнення, графічно.

```
> plot([0, a1], 0..2.0e-3, caption="\n Рис. 1 - Сигнал фізичного ім-
пульсу зіткнення від сенсору - модель.", color=["Black", blue],
thickness=[0, 2], tickmarks=[6,6], labels=["Time, t [s]",
"Amplitude, a1 [mV]"], view=[0..0.002, -1000..1500], plotopt,
size=[hor, ver]);
```

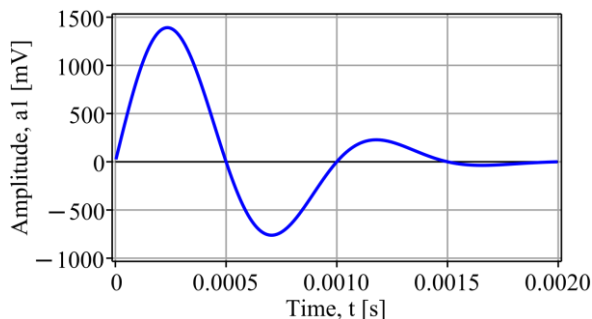


Рис. 10.1 – Сигнал фізичного імпульсу зіткнення від сенсору – модель.

Сигнал на Рис. 10.1 є аналоговим неперервним сигналом, який виникає на сенсорі (датчику) під час зіткнення.

♦ 2.2 Сенсорний резонансний сигнал

Під час зіткнення виникають коливання об'єкта, отже, й закріпленого на ньому сенсора, причому найрізноманитніших частот, зокрема й коливання на резонансній частоті сенсора.

Сигнал на резонансній частоті сенсора має велику амплітуду, яка є порівняною або навіть перевищує амплітуду сигналу від фізичного імпульсу зіткнення (див. п. ♦ 2.1) і накладається на нього. Як наслідок, корисний сигнал сенсора може бути цілком замаскований накладеним резонансним сигналом.

Типовий резонансний сигнал сенсору є швидко осцилюючою функцією часу, а його амплітуда спочатку зростає до максимуму, а потім спадає до нуля.

Використаємо високочастотну синусоїду, модульовану гаусівською функцією, для моделі цього сигналу (Табл. 10.2). Для простоти нехтуватимемо будь-яким випадковим шумом, який також накладається на сигнал фізичного імпульсу зіткнення в реальних вимірюваннях.

Табл. 10.2

Вхідні значення змодельованого сигналу.	
Параметр	Величина або значення
Резонансна частота сенсору (Гц)	> f2:=100e3:
Резонансна амплітуда (мВ)	> A02:=8e3:
Напівширина резонансної хвилі (Гц)	> BW2:=1e3:
Момент відліку часу (с)	> tau2:=0.5e-3:
Огинаюча функція сигналу	$\alpha2 := 1.424 \times 10^7$ $> \text{envelope2} := \text{unapply}(\exp(\alpha2 \cdot (t - \text{tau2})^2), t);$ $\text{envelope2} := t \mapsto e^{-1.424 \times 10^7 \cdot (t - 5.000 \times 10^{-4})^2}$
Резонансний сигнал сенсору	$> a2 := \text{unapply}(A02 \cdot \text{envelope2}(t) \cdot \sin(2 \cdot \text{Pi} \cdot f2 \cdot t), t);$ $a2 := t \mapsto 8.000 \times 10^3 \cdot e^{-1.424 \times 10^7 \cdot (t - 5.000 \times 10^{-4})^2} \cdot \sin(6.283 \times 10^5 \cdot t)$

```
> plot(a2, 0..2.0e-3, color="DarkSlateGray", caption="\n Рис. 2 -
Резонансний сигнал сенсору - модель.", thickness=1,
tickmarks=[6,6], labels=["Time, t [s]", "Amplitude, a2 [mV]"],
view=[0..0.002, -8500..8500], plotopt, size=[hor, ver]);
```

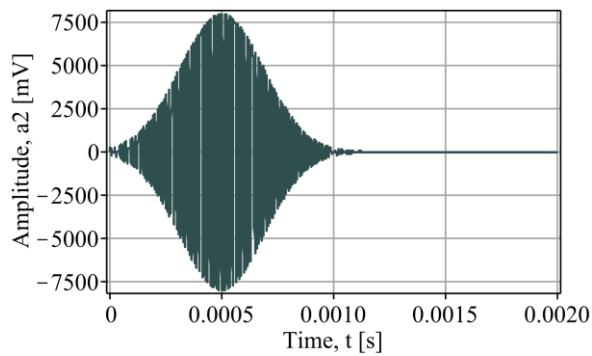


Рис. 10.2 – Резонансний сигнал сенсору (модель).

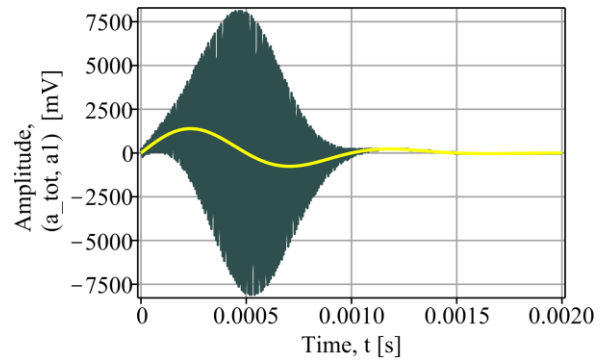


Рис. 10.3 – Фізичний імпульс зіткнення на фоні загального сигналу сенсору (модель).

♦ 2.3 Загальний сигнал сенсору

Накладемо тепер обидва неперервні, аналогові сигнали один на другий:

> $a_tot := \text{unapply}(a_1(t) + a_2(t), t);$

$$a_tot := t \mapsto 1500.00000 \cdot e^{-1.28149 \times 10^6 \cdot t^2} \cdot \sin(6283.18531 \cdot t) + 8000.00000 \cdot e^{-1.42388 \times 10^7 \cdot (t - 0.00050)^2} \cdot \sin(6.28319 \times 10^5 \cdot t) \quad (10.1)$$

І зобразимо результуючий сигнал від сенсору під час зіткнення, а на його фоні – сигнал фізичного імпульсу зіткнення, який власне й викликає практичний інтерес під час креш-тесту.

```
> plot([evalf(a_tot), a1], 0..2.0e-3, numpoints=1000, caption="\n
Рис. 3 - Фізичний імпульс зіткнення на фоні загального сигналу се-
нсору - модель.", color=["DarkSlateGray", yellow],
tickmarks=[6,6], labels=["Time, t [s]", "Amplitude,\n(a_tot, a1)
[mV]"], thickness=[1,2], plotopt, size=[hor, ver+20]);
```

Як видно з Рис. 10.3, сигнал фізичного імпульсу зіткнення практично повністю маскується високочастотним резонансним сигналом сенсора, якщо не виділяти його кольором, як це було зроблено на Рис. 10.3 задля наочності.

10.1.3 Дискретизація аналогових сигналів

Більшість аналогових сигналів перед обробкою комп'ютером піддаються дискретизації, тобто переводу у цифрову форму. Один зі способів оцифрування аналогового сигналу полягає у вимірюванні амплітуди сигналу через рівні проміжки часу («кванти часу», *sample*) на певному довшому часовому інтервалі.

Якщо вимірювати амплітуди сигналу відносно часто (тримати «квант часу» малим порівняно з усім довгим інтервалом вимірювання), то по отриманому дискретному сигналові можна доволі точно відновити форму аналогового сигналу. Під час такої дискретизації аналоговий сигнал перетворюється в дискретну послідовність чисел (амплітуд). Дискретизацію здійснюють АЦП.

Далі проведемо дискретизацію сигналу від сенсора (квантування) на інтервалі часу з двома різними частотами дискретизації (частота дискретизації обернено пропорційна «кванту» часу, див. (1.1) в п. 0) та дослідимо результати такої операції. Для цього створимо спеціальну процедуру **Linearsample**, яка визначатиме «квант часу», початковий та кінцевий моменти з досліджуваного інтервалу часу, кількість квантів часу на такому інтервалі, та дискретні моменти часу кратні «кванту часу»:

```
> Linearsample:=proc(t_start, t_end, f_sample) local dt, N, i, t;
description "Discretization on interval t_start, t_end with
frequency f_sample" ;
dt:=evalf(1/f_sample);
N:=(t_end-t_start)/dt;
t[1]:=t_start;
t[i]:=seq(t[1]+i*dt, i=1..N)];
end proc;
```

```

Linearsample := proc(t_start, t_end, f_sample)
    local dt, N, i, t;
    description
        "Discretization on interval t_start, t_end with frequency f_sample";
    dt := evalf(1/f_sample);
    N := (t_end - t_start) / dt;
    t[1] := t_start;
    t[i] := [seq(t[1] + i*dt, i = 1 .. N)]
end proc

```

(10.2)

Процедура (10.2) розбиває інтервал часу $[t_start, t_end]$ на N інтервалів (традиційно, це число є певним ступенем двійки) і обчислює набір дискретизованих моментів часу, починаючи з $t[1] = t_start$ і далі $t[i] = t[1] + i \cdot dt$,

де $(i = 1, 2, \dots, N)$. Визначимо інтервал часу, який підлягає дискретизації так, як на Рис. 10.3:

```

> t_start:=0;
   t_end:=2.5e-3;

                                t_start := 0
                                t_end := 0.00250

```

(10.3)

♦ **3.1** Низька частота дискретизації 32 кГц:
менша частоти Найквіста

Для першого прикладу дискретизованого сигналу оберемо низьку частоту дискретизації. Частота є низькою порівняно з частотою Найквіста, яка, згідно до теореми відліків, повинна бути щонайменше удвічі більшою за найвищу частоту сигналу, тобто 100 КГц, як видно з Табл. 10.2. Отже, частота Найквіста для сигналу складає 200 кГц.

```

> t_end*32e3;

                                80.00000

```

(10.4)

```

> f_sample1:=32e3; # Частота дискретизації
   t1:=Linearsample(t_start, t_end, f_sample1):
   N1:=nops (t1);
   # Кількість дискретизованих моментів часу, які укладаються на інтервали
   # часу (10.3) за даної частоти дискретизації
                                f_sample1 := 32000.00000
                                N1 := 80

```

(10.5)

```

> Sampled_Signal1:= [seq ([1e3*t1[i], evalf (a_tot(t1[i]))],
   i=1..nops(t1))]:
   # дискретизований сигнал

```

Дискретизований сигнал представляє собою послідовність значень сигналу в дискретні моменти часу (загалом $N1 = 80$ відліків), визначені процедурою (10.5). Моменти часу масштабовані множителем 1000, отже час далі вимірюється в мілісекундах. Збудуємо графік дискретизованого сигналу:

```

> ds32_pl:=plots[listplot](Sampled_Signal1, color="SteelBlue",
   labels=["Time, t [ms]", "Amplitude, mV"], caption=typeset("\n Рис.
   4 - Дискретизований сигнал: частота дискретизації=",
   f_sample1/(1e3), " kHz."), thickness=2, plotopt, size=[hor, ver]):
   zero:=plot(0, thickness=0, color=black):
   # Графік нульового рівня
   plots[display] (zero, ds32_pl, labels=["Time, t [ms]", "Amplitude,
   mV"], view=[0..2, -7500..7500], size=[hor, ver+20]);

```

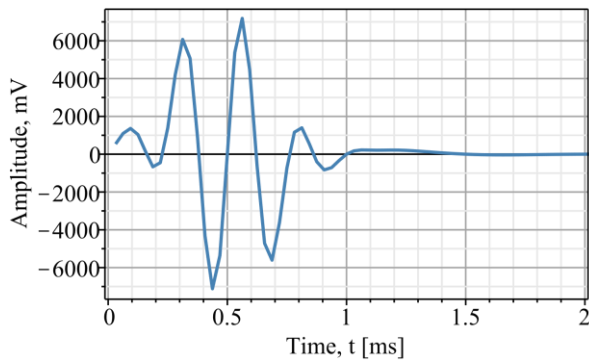


Рис. 10.4 – Дискретизований сигнал:
частота дискретизації 32 кГц.

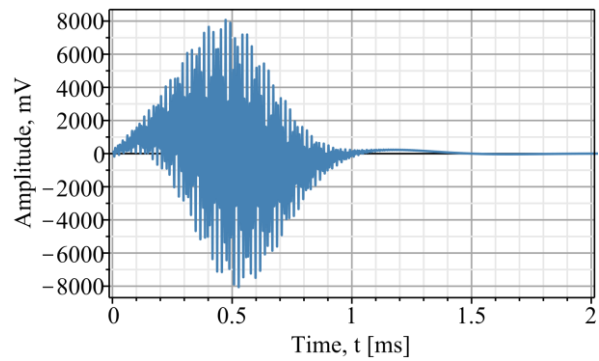


Рис. 10.5 – Дискретизований сигнал:
частота дискретизації 256 кГц.

Як видно з порівняння Рис. 10.4 та Рис. 10.3, дискретизований з частотою 32 кГц сигнал є доволі грубим наближенням до реального аналогового сигналу з Рис. 10.3. Відома теорема Котельникова стверджує, що по оцифрованому сигналу можна відновити форму аналогового, якщо частота дискретизації принаймні вдвічі перевищує найвищу частоту, яка входить в аналоговий сигнал. У нашому випадку найвища частота – резонансна частота сенсору – дорівнює 100 кГц, тоді як половина частоти дискретизації складає лише 8 кГц.

♦ **3.2** Висока частота дискретизації 256 кГц:
вища за частоту Найквіста

Оберемо високу частоту дискретизації, більшу від частоти Найквіста (200 кГц), розбиваючи інтервал на 640 дискретних «квантів»:

> 256/32;

8

```
> f_sample3:=256e3;
t3:=Linearsample(t_start, t_end, f_sample3):
N2:=nops(t3);
```

$$f_sample3 := 2.56000 \times 10^5$$

N2 := 640

(10.6)

```
> Sampled_Signal3:=[seq([1e3*t3[i], evalf(a_tot(t3[i]))],
i=1..nops(t3))];
> ds256_pl:=plots[listplot](Sampled_Signal3, color="SteelBlue",
labels=["Time, t [ms]", "Amplitude, mV"], caption=typeset("\n Рис.
5 - Дискретизований сигнал: частота дискретизації=",
f_sample3/(1e3), " kHz."), thickness=1, view=[0..2, -8500..8500],
plotopt, size=[hor, ver]):
plots[display](zero, ds256_pl, labels=["Time, t [ms]", "Amplitude,
mV"], view=[0..2, -8500..8500], size=[hor, ver+20]);
```

Дискретизований сигнал (Рис. 10.5) виглядає дуже подібним до аналогового сигналу (Рис. 10.3). Перевіримо умову теореми Котельникова: 256 кГц > 200 кГц.

10.2 ФУР'Є СПЕКТРИ ДИСКРЕТИЗОВАНИХ ТА АНАЛОГОВИХ СИГНАЛІВ

10.2.1 Спектральний аналіз дискретизованого сигналу

Підключимо потрібні для аналізу програмні пакети:

```
> with(DiscreteTransforms);
[DiscreteWaveletTransform, FourierTransform, InverseDiscreteWaveletTransform,
InverseFourierTransform, WaveletCoefficients, WaveletPlot]
```

♦ **1.1** Частота дискретизації 256 кГц

Задаємо ширший в 4 рази інтервал часу для спектрального аналізу та частоту дискретизації (256 кГц), більшу від частоти Найквіста:

```
> t_start:=0.; t_end:=10e-2; f_sample4:=256e3;
```

$$\begin{aligned}
 t_{start} &:= 0. \\
 t_{end} &:= 0.10000 \\
 f_{sample4} &:= 2.56000 \times 10^5
 \end{aligned}
 \tag{10.7}$$

Дискретизуємо інтервал часу та сигнал на «кванти»:

$$\begin{aligned}
 &> t4 := \text{Linearsample}(t_{start}, t_{end}, f_{sample4}); \\
 &N3 := \text{nops}(t4); \quad \# \text{число } N3 \\
 &N3 := 25600
 \end{aligned}
 \tag{10.8}$$

Дискретизуємо далі сигнал, визначивши час такої операції:

$$\begin{aligned}
 &> st1 := \text{time}(); \\
 &\text{Sampled_Signal4} := [\text{seq}([1e3 * t4[i], a_{tot}(t4[i])], i=1..nops(t4))]; \\
 &t_{samp} := \text{time}() - st1; \\
 &t_{samp} := 6.65700
 \end{aligned}$$

Велика кількість відліків (див. (10.8)) потребує певного часу на дискретизації інтервалу. Конвертуємо дискретизований сигнал у векторну форму:

$$> \text{SignalT} := \text{convert}(\text{Sampled_Signal4}, \text{Vector});$$

$$\text{SignalT} := \begin{bmatrix} 0.00391 \\ 189.40904 \\ 0.00781 \\ -175.65503 \\ 0.01172 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

51200 element Vector[column]

Підаємо сигнал у векторній формі ДПФ (команда **FourierTransform**), яке як видно з контролю часу, є досить швидким:

$$\begin{aligned}
 &> st2 := \text{time}(); \\
 &\text{SignalF} := \text{FourierTransform}(\text{SignalT}); \\
 &t_F := \text{time}() - st2; \\
 &\text{SignalF} := \begin{bmatrix} 5950.55776 + 0.I \\ 293.31116 + 1800.57584I \\ 293.46004 + 900.20099I \\ 293.70850 + 600.03352I \\ 294.05702 + 449.91348I \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 &t_F := 0.42200
 \end{aligned}$$

51200 element Vector[column]

Параметри перетворення:

$$\begin{aligned}
 &> N := \text{LinearAlgebra}[\text{Dimension}](\text{SignalF}); \\
 &\quad \# \text{Кількість квантів (точок дискретизації)} \\
 &dt := 1/f_{sample5}; \quad \# \text{"Квант" часу (s)} \\
 &df := 2/(N*dt); \quad \# \text{"Квант" частоти (Hz)} \\
 &N := 51200 \\
 &dt := 3.90625 \times 10^{-6} \\
 &df := 10.00000
 \end{aligned}$$

Запишемо послідовність дискретних значень частот на інтервалі частоти дискретизації, перенумерувавши їх від $-\frac{N}{2}$ до $+\frac{N}{2}$, що вважається стандартною нумерацією на частотному діапазоні (саме тому кількість точок прийнято брати кратній двом, тобто $N = 2^m$).

$$\begin{aligned}
 &> fs := \text{seq}(i*df, i=-N/2..N/2); \\
 &\text{maxVal}_2 := \text{max}(\text{abs}(\text{SignalF})); \\
 &\text{maxVal} := 5950.55776
 \end{aligned}
 \tag{10.9}$$

Нарешті визначаємо нормалізований на максимальну величину (10.9) Фур'є-спектр сигналу у напівлогарифмічних координатах. Зверніть увагу, частоти масштабовані множителем 1000, тобто вимірюються у кГц.

```
> Spectrum2:= [seq([(1/1e3)*fs[i],
20*log10(abs(SignalF[i])/maxVal_2)], i=1..N)]:
```

Візуалізуємо спектральний склад сигналу:

```
> plot(Spectrum, color="OrangeRed", style=line, labels=["Frequency,
kHz", "Normalized \n amplitude, dB"], caption=typeset("\n Рис. 6 -
Частотний спектр сигналу сенсора: \n частота дискретизації=",
f_sample4/(1e3), " kHz, інтервал=", t_end-t_start, " kHz."),
thickness=2, view=[0..115, -60..10], plotopt, size=[hor, ver+20]);
```

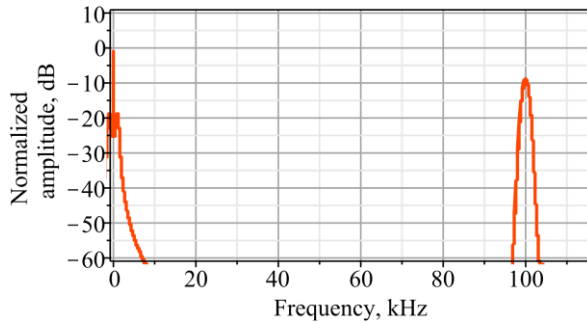


Рис. 10.6 – Частотний спектр сигналу сенсора: частота дискретизації 256 кГц, інтервал 0.10 кГц.

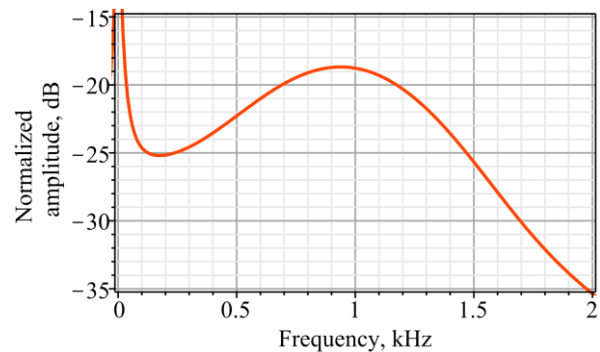


Рис. 10.7 – Частотний спектр сигналу сенсора з Рис. 10.6 в діапазоні від 0 до 2 кГц.

З графіка на Рис. 10.6 видно, що частотний спектр сигналу містить дві головні складові:

1. низькочастотну (порядку декількох кілогерц) з меншою амплітудою (власне фізичний імпульс зіткнення);
2. значно більший за амплітудою резонансний сигнал сенсору на частоті 100 кГц.

Саме ці параметри закладалися в наш модельний аналоговий сигнал. Отже, можна вважати, що він достатньо точно відновлений за своєю дискретизованою копією. Звідси також випливає, що внаслідок помітної різності частот ці компоненти можна легко розділити звичайною фільтрацією. Фільтр ВЧ дозволить відсікти високочастотний резонансний сигнал сенсору від сигналу фізичного імпульсу зіткнення значно меншої частоти.

Можна уточнити частоту низькочастотного сигналу (фізичного імпульсу зіткнення) перебудувавши графік на Рис. 10.6 у вузькому діапазоні частот:

```
> plot(Spectrum, color="OrangeRed", labels=["Frequency, kHz",
"Normalized \n amplitude, dB"], caption=typeset("\n Рис. 7 - Час-
тотний спектр сигналу сенсора з Рис. 6 \n в діапазоні від 0 до 2
кГц."), thickness=2, view=[0..2, -35..-15], plotopt, size=[hor,
ver+20]);
```

Як видно з графіку на Рис. 10.7, частота сигналу фізичного імпульсу (максимум амплітуди) зіткнення близька до 1 кГц, що також відповідає параметрам модельного аналогового сигналу.

♦ 1.2 Частота дискретизації 32 кГц

Тепер розглянемо спектр сигналу дискретизованого з частотою меншою від частоти Найквіста. Візьмемо частоту дискретизації 32 кГц, що заздалегідь менше від частоти Найквіста. Тоді:

```
> t_start:=0.; t_end:=10e-2; f_sample5:=32e3;
t_start := 0.
t_end := 0.10000
f_sample5 := 32000.00000
```

Дискретизуємо інтервал часу та сигнал на «кванти»:

```
> t5:=Linearsample(t_start,t_end,f_sample5):
N5:=nops(t5); # число N5
N5 := 3200 (10.10)
```

Дискретизуємо далі сигнал, визначивши час такої операції:

```
> st1:=time():
Sampled_Signal5:=[seq([1e3*t5[i], a_tot(t5[i])], i=1..nops(t5))]:
t_samp:=time()-st1;
t_samp := 0.98500
```

Велика кількість відліків (див. (10.10)) потребує певного часу на дискретизації інтервалу. Конвертуємо дискретизований сигнал у векторну форму:

```
> SignalT:=convert(Sampled_Signal5, Vector);
```

```
SignalT := 
$$\begin{bmatrix} 0.03125 \\ 1095.31828 \\ 0.09375 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

```

6400 element Vector[column]

Піддаємо сигнал у векторній формі дискретному перетворенню Фур'є, яке відбувається доволі швидко:

```
> st2:=time():
SignalF:=FourierTransform(SignalT);
t_F:=time()-st2;
```

```
SignalF := 
$$\begin{bmatrix} 2106.56815 + 0.1 \\ 105.33562 + 636.69597I \\ 105.47554 + 212.43307I \\ 105.59828 + 159.45444I \\ \vdots \end{bmatrix}$$

```

6400 element Vector[column]

$t_F := 0.01600$

Параметри перетворення:

```
> N:=LinearAlgebra[Dimension](SignalF);
# кількість квантів (точок дискретизації)
dt:=1/f_sample5; # "квант" часу (s)
df:=2/(N*dt); # "квант" частоти (Hz)
```

Як і в п. ♦ 1.1, для частоти дискретизації 256 кГц запишемо послідовність дискретних значень частот на інтервалі частоти дискретизації, перенумерувавши їх від $-\frac{N}{2}$ до $+\frac{N}{2}$, обравши таким чином нумерацію на частотному діапазоні кратною двом, тобто $N = 2^m$:

```
> fs:=seq(i*df, i=-N/2..N/2):
maxVal_2:=max(abs(SignalF));
maxVal_2 := 2106.56815 (10.11)
```

Нарешті визначаємо нормалізований на максимальну величину (10.11) Фур'є-спектр сигналу у напівлогарифмічних координатах. Як в п. ♦ 1.1, частоти масштабовані множителем 1000, тобто вимірюються у кГц.

```
> Spectrum2:=[seq([(1/1e3)*fs[i],
20*log10(abs(SignalF[i])/maxVal_2)], i=1..N)]:
```

Візуалізація спектрального складу сигналу відбувається звичайним шляхом, тобто побудовою графіка за допомогою командою `plot` (Рис. 10.8):

```
> plot(Spectrum2, color="Green", labels=["Frequency, kHz",
"Normalized \n amplitude, dB"], caption=typeset("\n Рис. 8 - Час-
тотний спектр сигналу сенсора: \n частота дискретизації=",
f_sample5/(1e3), " kHz, інтервал=", t_end-t_start, " kHz."),
thickness=2, view=[0..32, -65..5], plotopt, size=[hor, ver+20]);
```

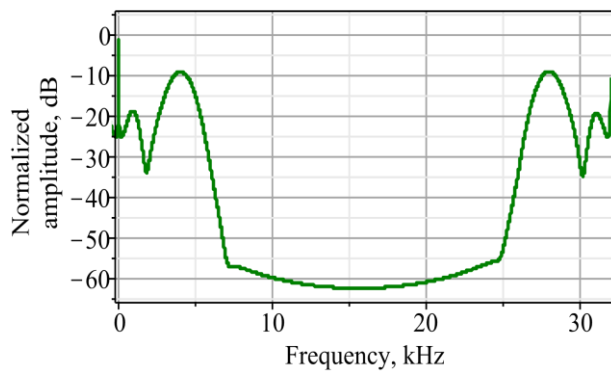


Рис. 10.8 – Частотний спектр сигналу сенсора: частота дискретизації 32 кГц, інтервал 0.10 кГц.

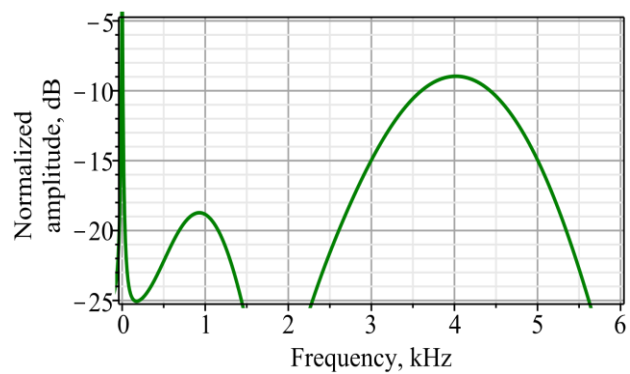


Рис. 10.9 – Частотний спектр сигналу сенсора з Рис. 10.8 в діапазоні від 0 до 6 кГц.

Спектр на Рис. 10.8 кардинально відрізняється від спектру на Рис. 10.6. Низькочастотних піків 4-и, причому 1-й залишився практично на своєму місці, тоді як другий з'явився на частоті 4 кГц, третій на частоті 27 кГц і четвертий – на 32 кГц. Тобто, ці додаткові піки потрапляють в діапазон гармонік модельного сигналу. Але ці піки виглядають як артефакти результату дискретизації на меншій частоті, ніж максимальна частота корисного сигналу.

```
> plot(Spectrum2, color="Green", labels=["Frequency, kHz",
    "Normalized \n amplitude, dB"], caption=typeset("\n Рис. 9 - Час-
    тотний спектр сигналу сенсора: \n частота дискретизації=",
    f_sample5/(1e3), " kHz, інтервал=", t_end-t_start, " kHz."),
    thickness=2, view=[0..6, -5..-25], plotopt, size=[hor, ver+20]);
```

Як видно з Рис. 10.9, низькочастотний пік майже не змістився від значення 1 кГц. Тобто, менша частота дискретизації не вплинула на положення низькочастотної гармоніки в 1 кГц. Однак, призвела до появи артефактів на 4 кГц, 27 кГц і 32 кГц, тобто появу «фальшивих» піків.

10.2.2 Спектральний аналіз аналогового сигналу

Здійсимо СА аналогового, тобто неперервного сигналу (10.1), наведеного на Рис. 10.3, для порівняння з результатами СА дискретизованих сигналів. Скопіюємо праву частину виразу (10.1):

```
> anss:=1.5e3*exp(-1.281494640e6*t^2)*sin(6283.18531*t)+8e3*exp(-
    1.423882933e7*(t-0.5e-3)^2)*sin(628318.531*t);
# Аналоговий сигнал сенсору (права частина виразу (10.1))

    anss := 1500.00000 e-1.28149 × 106 t2 sin(6283.18531 t)
    + 8000.00000 e-1.42388 × 107 (t - 0.00050)2 sin(6.28319 × 105 t)

> f_anss:=inttrans[fourier](anss,t,omega):
> spectrum:=abs(f_anss):
# Знаходження АЧХ як модуля комплексної функції Фур'є-образу
> omega:=2*Pi*1e3*f;
# Циклічна частота представлена через лінійну (у кГц)
    ω := 6283.18531 f
```

Зобразимо отриманий вище спектр графічно (Рис. 10.10):

```
> plot(20*log10(spectrum), f=0..110, color="Red", labels=["Frequency
    (kHz)", "Normalized \n amplitude, dB"], caption=typeset("\n Рис.
    10 - Спектр аналогового сигналу (неперервного)."), thickness=2,
    view=[0..110, -40..10], plotopt, size=[hor, ver]);
```

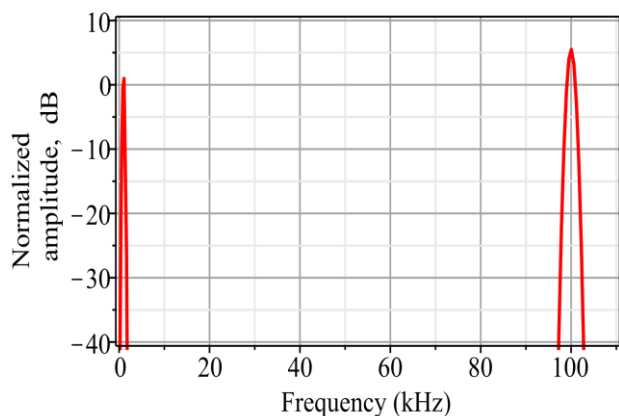


Рис. 10.10 – Спектр аналогового сигналу (неперервного).

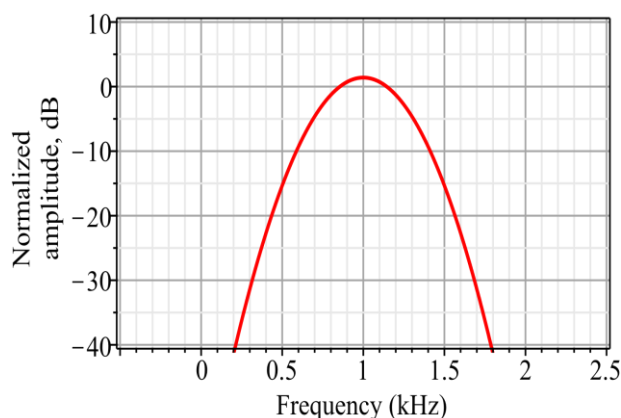


Рис. 10.11 – Спектр аналогового сигналу з Рис. 10.10 в діапазоні від 0 до 2.5 кГц.

Аналоговий сигнал на Рис. 10.10 має дві головні частоти, причому вища частота (100 кГц) має значно більшу амплітуду. Уточнення частоти сигналу фізичного імпульсу зіткнення:

```
> plot(20*log10(spectrum), f=0..2.5, color="Red", view=[-0.5..2.5, -40..10], axes=boxed, labels=["Frequency (kHz)", "Normalized \n amplitude, dB"], caption=typeset("\n Рис. 11 - Спектр аналогового сигналу (неперервного)."), thickness=2, plotopt, size=[hor, ver]);
```

Як видно з Рис. 10.11, частота корисного сигналу близька до 1 кГц, як було отримано вище під час аналізу дискретизованого сигналу з урахуванням вимог теореми відліків Найквіста-Котельникова.

З Рис. 10.10 та Рис. 10.11 також випливає, що спектральний аналіз аналогового сигналу в цілому підтримує висновки спектрального аналізу дискретизованого сигналу, зроблені в п. 10.2.1.

Порівняння Рис. 10.10, Рис. 10.11 з Рис. 10.6, Рис. 10.7 також показує, що під час дискретизації виникають певні побочні ефекти (артефакти) порівняно з точним спектральним аналізом аналогового сигналу, зумовлені втратою частини інформації під час операції дискретизації. Зменшення точності тим більше, чим меншою є частота дискретизації.

10.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. Що в теорії ЦОС розуміється під терміном «сигнал»?
2. Поясніть принцип роботи АЦП.
3. Поясніть поняття «частота дискретизації».
4. Що стверджує теорема Котельникова?
5. Поясніть принцип роботи сенсора для краш-тестів.
6. В чому особливість функції, що описує резонансний сигнал сенсора?
7. Яка мета застосування дискретного перетворення Фур'є до сигналу?
8. Що дозволяє встановити спектральний аналіз сигналу?

♦ 1.2 Maple

1. Яка команда в Maple здійснює очищення внутрішньої пам'яті?
2. Який пакет у Maple дозволяє здійснювати дискретне перетворення?
3. Яка команда забезпечує здійснення дискретного перетворення Фур'є?
4. Яка опція в команді **plot** додає підписувальний підпис?
5. Яка опція в дозволяє робити складні підписувальні підписи для графіків?
6. Яка команда і з якого пакету дозволяє визначити кількість елементів вектора?

10.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Виконайте індивідуальне завдання за варіантом з Табл. 10.3.
2. Оцініть вплив відмінності між величинами фактичної фізичної та резонансної частот сенсора на результати обрахунків та візуалізації.
3. Порівняйте з результатами оригінальних досліджень.
4. Зробіть висновки.

Табл. 10.3

Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 1.

Параметр та його позначення	Значення параметрів			
Номери варіантів	1	2	3	4
Фізична структурна частота (Гц), f1	100	100	500	2000
Амплітуда ударної хвилі (мВ), A01	150	2000	1000	3000
Напівширина ударної хвилі (Гц), BW1	30	200	200	600
Резонансна частота сенсору (Гц), f2	1e4	5e4	1e4	2e5
Резонансна амплітуда (мВ), A02	90	600	400	1600
Напівширина резонансної хвилі (Гц), BW2	100	300	500	2000
Момент відліку часу (с), tau2	0.0001	0.5e-1	0.2e-2	0.5e-3
Номери варіантів	5	6	7	8
Фізична структурна частота (Гц), f1	10	1000	3000	2000
Амплітуда ударної хвилі (мВ), A01	100	1000	45000	3000
Напівширина ударної хвилі (Гц), BW1	30	50	900	500
Резонансна частота сенсору (Гц), f2	1e4	1e3	1e5	1e5
Резонансна амплітуда (мВ), A02	100	200	3e4	1000
Напівширина резонансної хвилі (Гц), BW2	20	50	3000	2000
Момент відліку часу (с), tau2	0.2e-3	0.1e-2	0.1e-1	0.1
Номери варіантів	9	10	11	12
Фізична структурна частота (Гц), f1	100	1000	500	2000
Амплітуда ударної хвилі (мВ), A01	150	2000	1000	3000
Напівширина ударної хвилі (Гц), BW1	30	200	200	600
Резонансна частота сенсору (Гц), f2	1e4	5e4	1e4	2e5
Резонансна амплітуда (мВ), A02	90	600	400	1600
Напівширина резонансної хвилі (Гц), BW2	100	300	500	2000
Момент відліку часу (с), tau2	0.1e-3	0.5e-1	0.2e-2	0.5e-3
Номери варіантів	13	14	15	16
Фізична структурна частота (Гц), f1	10	1000	3000	2000
Амплітуда ударної хвилі (мВ), A01	100	1000	4500	3000
Напівширина ударної хвилі (Гц), BW1	30	50	900	500
Резонансна частота сенсору (Гц), f2	1e4	1e3	1e5	1e5
Резонансна амплітуда (мВ), A02	100	200	3e4	1000
Напівширина резонансної хвилі (Гц), BW2	20	50	3000	2000
Момент відліку часу (с), tau2	0.2e-3	0.1e-2	0.1e-1	0.1

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ

- 1  Статистичний аналіз електронейроміограм.
- 2  Автокореляційні функції та спектральний аналіз.

11.1 СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОНЕЙРОМІОГРАМ

Електроміографія допомагає виявити причину таких проблем, як біль, порушення чутливості (оніміння і ін.), м'язова слабкість в кінцівках [5], [6]. Також метод ЕМГ дозволяє виявити, з чим вони пов'язані: з патологією спинного мозку, корінців, нервів або м'язів. Так, наприклад, у хворих на цукровий діабет може розвиватися патологія периферичних нервів. Для раннього виявлення та попередження розвитку цієї патології лікар може призначити хворому ЕМГ.

11.1.1 Попередні налагодження

Підключимо необхідні для подальшої роботи програмні пакети та пропишемо додаткові опції:

```
> restart:
with(Statistics):
with(Spread):
with(plots):
with(SignalProcessing[Engine]):
# Підключення пакетів статистики, роботи з таблицями, графіками та спект-
# рального аналізу даних

> interface(displayprecision=5, rtablesize=7):
plotopt:=font=[TIMES, ROMAN, 12], labeldirections=[horizontal,
vertical], gridlines:
plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], 'font'=[TIMES,
ROMAN, 12], 'axesfont'=[TIMES, ROMAN, 12], 'labelfont'=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines:

> hor:=460: ver:=260: # size of plots
```

11.1.2 Імпорт даних з .txt в Excel

Перед тим, як завантажувати дані у Maple 2021, для зручності подальшої роботи спочатку їх варто імпортувати з txt-файлів в таблиці Excel. Для цього необхідно виконати дії за прикладом нижче:

1. Створіть новий Excel-файл.
2. Одразу збережіть його з ім'ям за таким прикладом: «EMG-Prizvysche-Variant.xlsx».
3. Перейдіть у вкладку «Data» і в першому блоці «Get & Transform Data» оберіть команду «From Text» (Рис. 11.1 а).

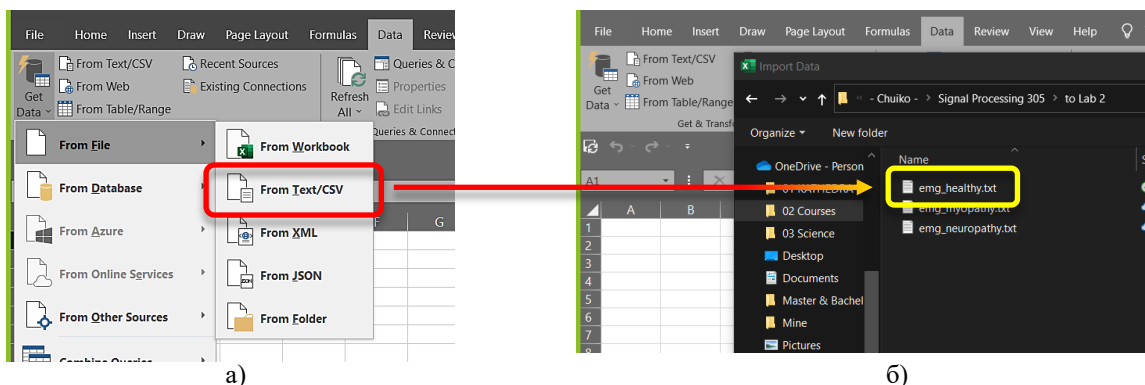


Рис. 11.1 – Підготовка імпортування даних в Excel.

4. У діалоговому вікні, що відкриється, перейдіть за адресою директорії, де зберігаються txt-файли з даними, і оберіть `emg_healthy.txt` файл (Рис. 11.1 б).
5. Відкриється діалогове вікно імпортування даних, в якому встановіть опції: «1252 Western European (Windows)»; «Delimiter» – «Custom», або оберіть з переліку те, що відповідає налагодженням встановленої на вашому комп'ютері ОС, і дали внизу вікна оберіть команду «Transform Data» (Рис. 11.2).

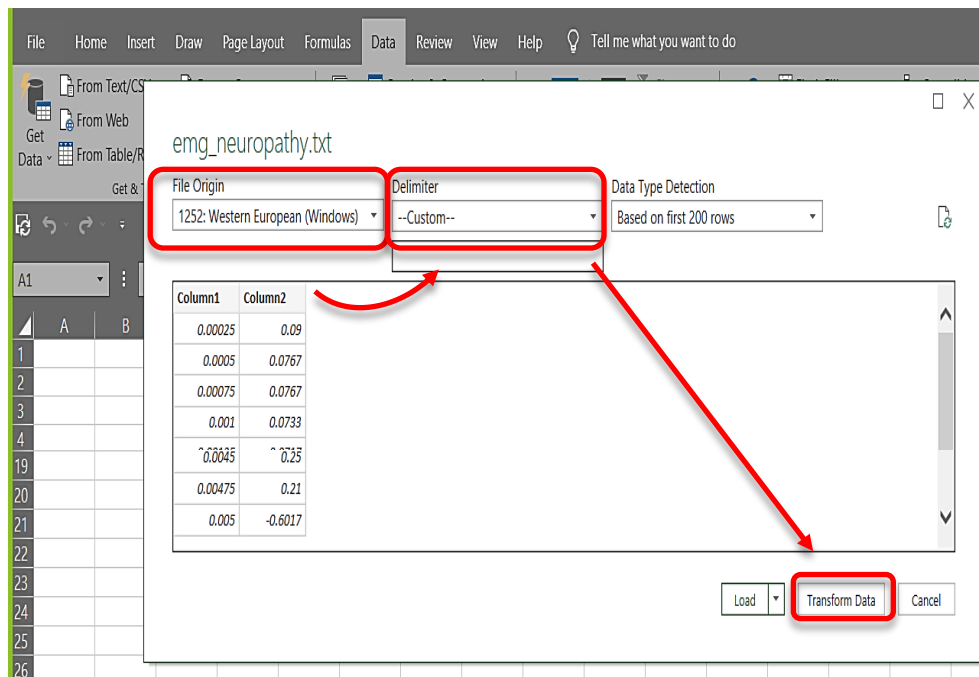


Рис. 11.2 – Діалогове вікно налагоджень для імпортування даних з txt-файлу в Excel.

6. У наступному діалоговому вікні в блоці «Remove Rows» ➔ «Remove Alternate Rows» і встановіть наступні параметри (
7. Рис. 11.3):
 - «First Row» – 1,
 - «Number of Rows to remove» – 3,
 - «Number of Rows to keep» – 1.
8. Натисніть «Ок» і потім «Close and Load».
9. Перейменуйте Лист 1 на «Healthy».
10. Повторіть кроки для завантаження на 2 та 3 листи даних пацієнтів хворих на нейропатію та міопатію.
11. Перейменуйте листи відповідно до хвороби.

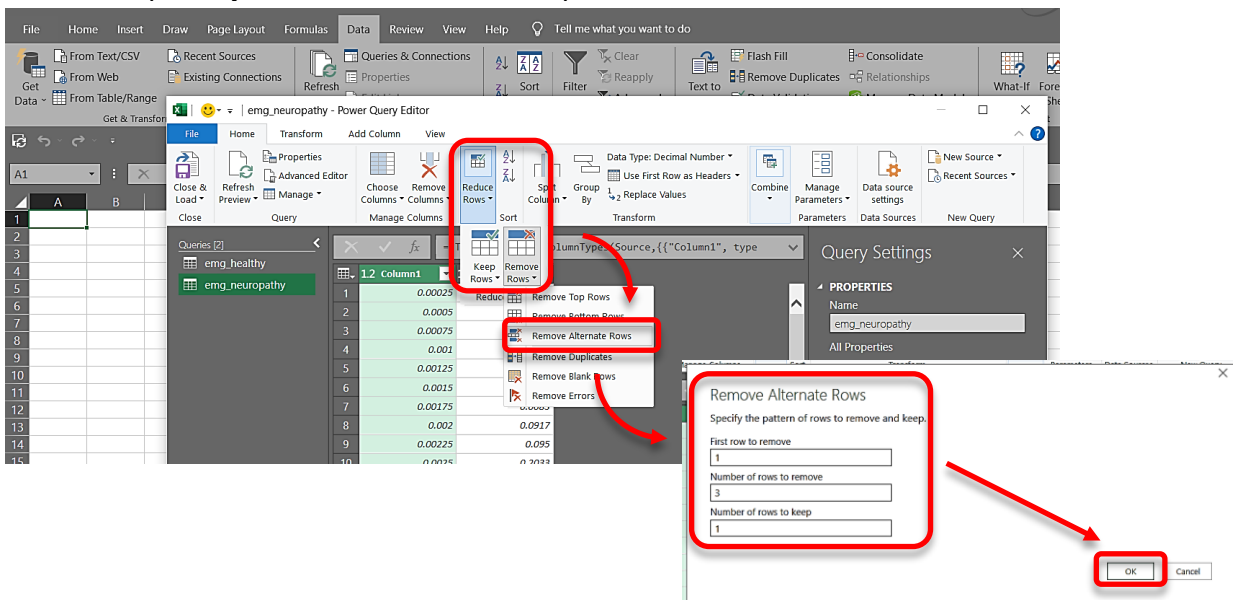


Рис. 11.3 – Встановлення параметрів Excel для завантаження даних з txt-файлу.

11.1.3 Завантаження даних з Excel у Maple 2021

Для завантаження даних з Excel-таблиці у Maple 2021 необхідно виконати дії за переліком нижче (Рис. 11.4):

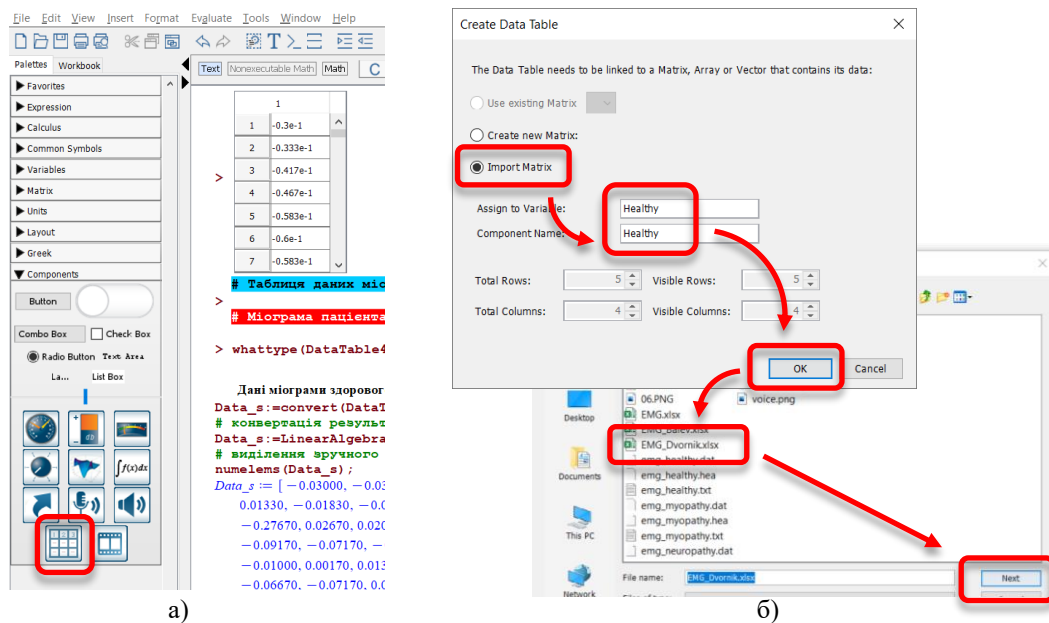


Рис. 11.4 – Підготовка до імпортування даних з Excel у Maple 2021.

1. Зліва у вікні Maple на панелі палітр в блоці «Components» оберіть команду «Data Table» (Рис. 11.4 а).
2. У діалоговому вікні, що відкриється, оберіть Import Matrix (Рис. 11.4 б) та вкажіть ім'я для масиву даних та компоненти (змінної) в таблиці:
 - «Assign Variable» – Healthy;
 - «Component Name» – Healthy.
3. Натисніть кнопку «Next» (Рис. 11.4 б).
4. У діалоговому вікні (Рис. 11.5), що відкриється, оберіть ім'я відповідного листа («Healthy») і вкажіть діапазон з B2 (якщо за варіантом від початку) до комірки з адресою, що відповідає кінцю діапазону часу за індивідуальним варіантом.
5. Натисніть «Next» для завантаження даних у Maple-таблицю даних.

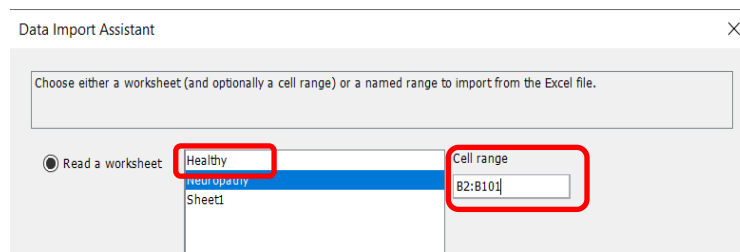


Рис. 11.5 – Діалогове вікно у Maple 2021 з обранням імені листа Excel-таблиці та діапазону комірок, що відповідають часу за індивідуальним завданням.

11.1.4 Первинні сигнали

Вимірювання електронейроміограм (ЕНМГ, міограми – запис біологічних потенціалів з м'язів пацієнта) проводилися з рівними інтервалами в часі, результати вимірювань зберігалися у вигляді txt-файлів [5], [6]. Експериментальні дані запозичені з джерела [142]. Після завантаження таблиця даних міограми для здорового пацієнта у Maple виглядатиме, як на Рис. 11.6 а, б. Відповідно, міограма пацієнта, хворого на нейропатію – як на Рис. 11.6 в, г.

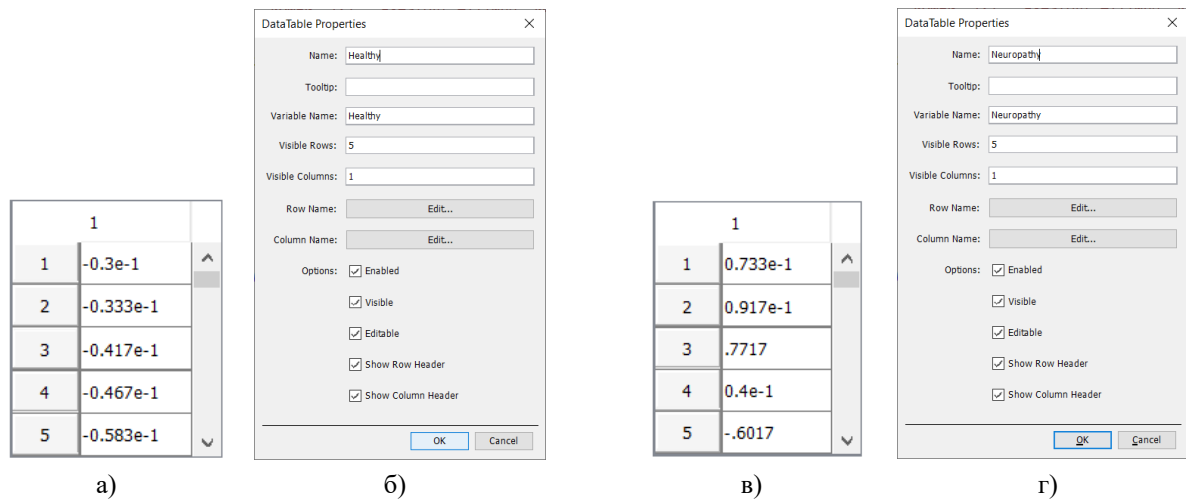


Рис. 11.6 – Вигляд таблиц із завантаженими даними та їх властивостями у Maple 2021 для: а), б) здорового пацієнта; в), г) хворого на нейропатію.

Перевіримо тип даних завантажених таблиць:

> **whattype(Healthy) ;**

Matrix

> **whattype(Neuropathy) ;**

Matrix

Дані міограми здорового пацієнта, з яких оберемо для подальших досліджень перші 96 значень зі 100 наявних, тобто 2⁵:

```
> Data_s:=convert(Healthy, Vector[row], datatype=float[8] );
# конвертація результатів вимірювань у вектор
Data_s:=LinearAlgebra[SubVector] (Data_s, 1..96);
# виділення зручного для аналізу піднабору результатів довжиною в 96 від-
ліків
numelems(Data_s);
Data_s := [-0.03000, -0.03330, -0.04170, -0.04670, -0.05830, -0.06000,
-0.05830,..., ... 89 row vector entries not shown]
```

Дані міограми пацієнта з нейропатією:

```
> Data_d:=convert(Neuropathy, Vector[row], datatype=float[8]):
# конвертація результатів вимірювань у вектор
Data_d:=LinearAlgebra[SubVector] (Data_d, 1..96);
# виділення піднабору результатів довжиною в 96 відліків
numelems(Data_d);
Data_d := [0.07330, 0.09170, 0.77170, 0.04000, -0.60170, -0.75000, 0.11830,...,
... 89 row vector entries not shown]
```

11.1.5 Статистичний аналіз ЕМГ здорової людини

Зобразимо графік ЕМГ здорової людини (Рис. 11.7):

```
> zero:=plot(0, 0..100, thickness=0, color=black):
# Графік лінії нульового значення
LineChart(Data_s, linestyle=solid, thickness=1, symbol=diamond,
symbolsize=15, tickmarks=[15,8], color="Blue", labels=["Samples",
"Biopotential, mV"], axes=boxed, caption=typeset("\n Рис. 1 - Ча-
совий ряд спостережень: міограма здорової людини."), view=[0..96,-
0.3..0.3], plotopt, size=[hor, ver+20]): rs:=%:
display(zero, rs, labels=["Samples", "Biopotential, mV"],
view=[0..96,-0.3..0.3]);
```

Визначимо основні статистичні параметри первинного сигналу:

```
> tbl:=Statistics:-DataSummary(Data_s);
Statistics[DataSummary] (Data_s):
```

$$tbl := \begin{cases} \text{mean} = -0.00700 \\ \text{standarddeviation} = 0.06292 \\ \text{skewness} = 0.10708 \\ \text{kurtosis} = 9.51411 \\ \text{minimum} = -0.27670 \\ \text{maximum} = 0.26500 \\ \text{cumulativeweight} = 96.00000 \end{cases} \quad (11.1)$$

Відносно мале значення коефіцієнту асиметрії (див. п. 2.1♦ 1.6) в (11.1) $\text{skewness} \approx 0.108$, свідчить про доволі високу симетрію розподілу даних міограми здорової людини.

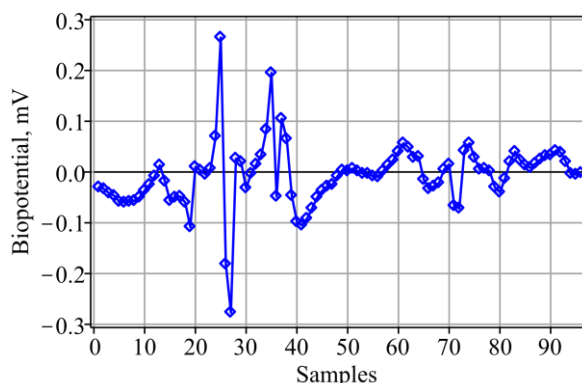


Рис. 11.7 – Часовий ряд спостережень: міограма здорової людини.

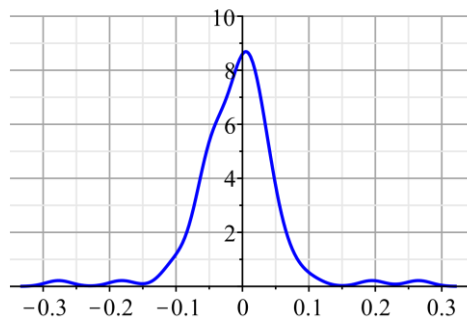


Рис. 11.8 – Розподіл густини ймовірності для ЕМГ здорової людини.

Велике значення ексцесу ($\text{kurtosis} \approx 9.5$) в (11.1) для розподілу часового ряду (див п. 2.1♦ 1.7) свідчить про відмінність розподілу від нормального, тобто для розподілу ймовірності за тих самих значень середнього арифметичного (математичного сподівання) (див п. 2.1♦ 1.2) та середнього квадратичного (стандартного) відхилення (див п. 2.1♦ 1.3).

Побудуємо графік розподілу густини ймовірності для даних міограми здорового пацієнта (Рис. 11.8) за допомогою команди **KernelDensityPlot**:

```
> KernelDensityPlot(Data_s, color="Blue", thickness=2, labels=[" ",
    ""], caption=typeset("Рис. 2 – Розподіл густини ймовірності для
    даних міограми здорової людини."), view=[-0.35..0.35, 0..10],
    axes=normal, plotopt, size=[hor-80, ver-20]); gs:=%:
```

Створимо випадковий вектор такої самої довжини, що і міограма, тобто в 96 відліків, з нормальним розподілом компонентів з тими же математичним сподіванням та стандартним відхиленням, як і у компонентів міограми (11.1).

```
> Sam:=Sample(Normal(rhs(tbl[1]), rhs(tbl[2])), 96):
# Випадковий вектор на 96 компонент з нормальним розподілом:
'rhs(tbl[1])'=lhs(tbl[1]); # Середнє значення
'rhs(tbl[2])'=lhs(tbl[2]); # Стандартне відхилення
    rhs(tbl[1]) = mean
    rhs(tbl[2]) = standarddeviation
```

Тепер побудуємо графік густини ймовірності, але нормального розподілу (див. п. 2.1♦ 1.5), тобто для значень, що відповідають ЕМГ здорової людини: $\mu_h \approx -0.007$, $\sigma_h \approx 0.063$ з (11.1). Також визначимо час, необхідний Maple (встановлений на вашому PC) для обрахунку:

```
> st:=time():
KernelDensityPlot(Sam, range=-0.35..0.35, color="DarkRed",
    linestyle=solid, labels=[" ", ""], thickness=2): gn:=%:
# Графік густини ймовірності нормального розподілу
time()-st;

0.73500
```

Для порівняння реального розподілу густини ймовірності (Рис. 11.8) з нормальним за тих самих значень середнього μ_h та стандартного відхилення σ_h виведемо їхні графіки на одну площину:

```
> plots[display](gs, gn, labels=[" ", ""], legend=[typeset(" Real"),
typeset(" Normal \n distribution")], legendstyle=[location=right],
caption=typeset("Рис. 3 - Порівняння розподілу рис. 2 з нормальним
для здорової людини."), axes=normal, plotopt, size=[hor+40, ver-
20]);
```

Як видно з Рис. 11.9, розподіл ймовірностей для первинного (реального) сигналу є близьким до нормального (гаусівського) розподілу, хоча у той же час є різкішим за рахунок більшого ексцесу.

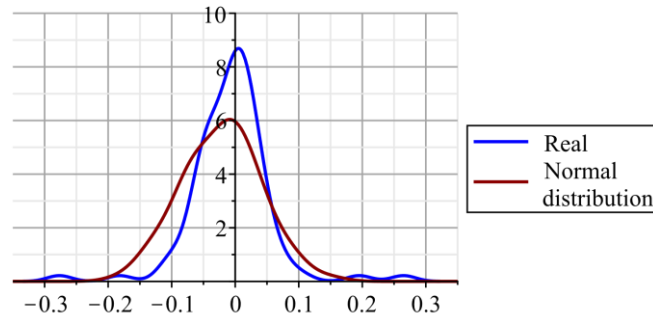


Рис. 11.9 – Графіки реального (Рис. 11.8) та нормального розподілів густини ймовірності даних міограми здорової людини.

11.1.6 Статистичний аналіз ЕМГ хворого на нейропатію

Графік первинних даних ЕМГ хворого на нейропатію (Рис. 11.10):

```
> LineChart(Data_d, linestyle=solid, thickness=2, tickmarks=[15,12],
color="LightCoral", caption=typeset("\n Рис. 4 - Часовий ряд спос-
тережень: міограма хворого на нейропатію."), labels=["Samples",
"Biopotential, mV"], axes=boxed, view=[0..96,-3.0..1.5], plotopt,
size=[hor, ver]): rd:=%:
display(zero, rd, labels=["Samples", "Biopotential, mV"],
view=[0..96,-3.0..1.5], size=[hor, ver+20]);
```

Визначимо основні статистичні параметри первинного сигналу міограми хворого на нейропатію:

```
> b2:=Statistics:-DataSummary(Data_d);
```

```
tb2 :=
    mean = 0.02391
    standarddeviation = 0.45099
    skewness = -2.86722
    kurtosis = 19.27405
    minimum = -2.83170
    maximum = 1.27670
    cumulativeweight = 96.00000
```

(11.2)

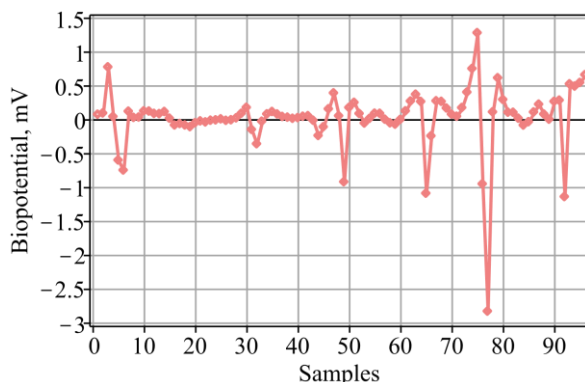


Рис. 11.10 – Часовий ряд спостережень: міограма хворого на нейропатію.

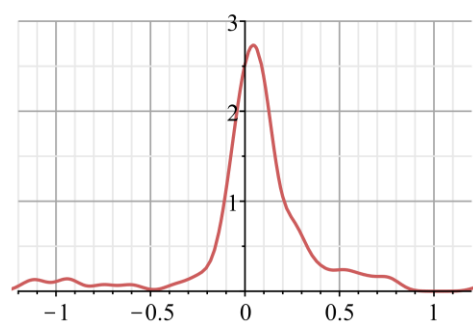


Рис. 11.11 – Розподіл густини ймовірності для даних хворого на нейропатію.

Зверніть увагу на відносно велику дисперсію та помітну і від'ємну асиметрію даних, а також великий ексцес, порівняно з ЕМГ здорової людини (11.1).

```
> KernelDensityPlot(Data_d, thickness=2, color="IndianRed",
  linestyle=solid, labels=[" ", ""], caption=typeset("Рис. 5 - Роз-
  поділ густини ймовірності для даних хворого на нейропатію."),
  view=[-1.2..1.2,0..3], axes=normal, plotopt, size=[hor-80, ver-
  20]); gd:=%:
```

Знову створимо випадковий вектор такої самої довжини, що і ЕМГ з Рис. 11.10, але для нормального розподілу компонентів з тим же μ_n та σ_n , як у компонентів ЕМГ пацієнта хворого на нейропатію (11.2).

```
> Samd:=Sample(Normal(rhs(tb2[1]), rhs(tb2[2])), 96):
# Випадковий вектор на 96 компонентів з нормальним розподілом
KernelDensityPlot(Samd, range=-1.2..1.2, color="LimeGreen",
  thickness=2, labels=[" ", ""], axes=normal, plotopt, size=[320,
  240]): gnd:=%:
# Графік густини ймовірності нормального розподілу
> plots[display](gnd, gd, legend=[typeset(" Normal \n
  distribution"), typeset(" Real")], legendstyle=[location=right],
  caption=typeset("Рис. 6 - Порівняння розподілу рис. 12 з нормаль-
  ним для даних хворої людини."), plotopt, size=[hor+40, ver-20]);
```

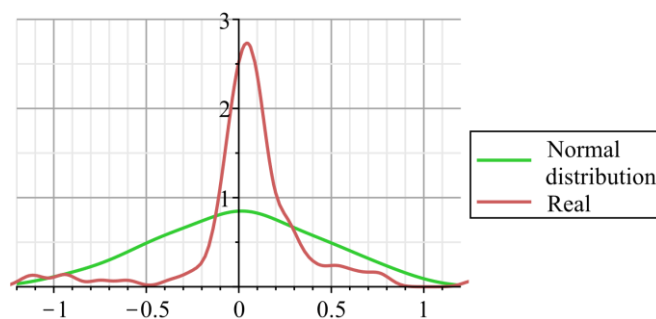


Рис. 11.12 – Графіки реального (Рис. 11.11) та нормального розподілів густини ймовірності ЕМГ хворого на нейропатію.

З Рис. 11.12 видно, що розподіл ймовірності ЕМГ хворого на нейропатію суттєво відрізняється від нормального розподілу з тими ж параметрами математичного сподівання μ_n та дисперсії σ_n^2 , яка, до речі, майже на порядок вища, ніж у здорового пацієнта. Порівняйте: $\sigma_h \approx 0.063$ та $\sigma_n \approx 0.450$.

11.2 АВТОКОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ТА СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЕМГ

Аналіз АФ і корелограми (див. п. 2.1.3) дозволяє виявити структуру сигналу, тобто виявити наявність в ряді тій чи іншій компоненти [69]. Так, якщо найбільш високим виявляється коефіцієнт автокореляції 1-го порядку, то ряд містить тільки **тенденцію**. Якщо найбільш високим виявляється коефіцієнт автокореляції порядку k , то ряд містить **циклічні коливання** з періодичністю в k моментів часу. Якщо жоден з коефіцієнтів не є значимим, то сигнал (ряд) **не** містить тенденцій та циклічних коливань.

Для якісних досліджень часто буває зручніше користуватися не абсолютними величинами, як то було, наприклад, при побудові гістограми Рис. 2.1 у досліді з підкидання гральної кістки (див. п. 2.1♦ 1.1), – а нормованими (Рис. 2.2). Так само й дослідження АФ доцільніше здійснювати у **нормованому** вигляді, оскільки вона має такий самий ймовірнісний зміст, що й коефіцієнт кореляції: чим ближче модуль цієї функції до одиниці, тим лінійний зв'язок між перетинами сильніший. І чим ближчий модуль до нуля, тим зв'язок слабкіший.

11.2.13 здорова людина

Дослідимо нормовані автокореляційні функції сигналу ЕМГ здорового пацієнта та хворого на нейропатію, застосувавши до наборів даних міограм команду **AutoCorrelation** з пакету **Statistics**. Графік отриманої функції (корелограми, див. п. 2.1.3) побудуємо за допомогою команди **ColumnGraph**.

```
> AutoCorrelation(Data_s):
Statistics:-ColumnGraph(%, 'color'="Blue", 'style'='polygon',
  tickmarks=[12,8], view=[0..96, -0.07..0.15], labels=["Samples",
  "Values"], caption=typeset("\n Рис. 7 - Автокореляційна функція
  міограми здорового пацієнта."), gridlines, plotopt, size=[hor,
  ver]): acfs:=%;
```

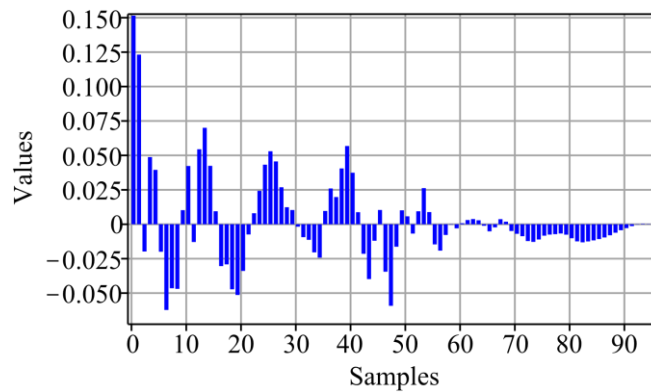


Рис. 11.13 – Автокореляційна функція міограми здорової людини.

АФ здорової людини, як видно з Рис. 11.13, свідчить про можливий незначний внесок (не більше 5-10%) в сигнал відносно повільно згасаючих періодичних процесів (з періодом приблизно 12–13 відліків). У той же час в первинному сигналі домінує випадкова компонента ($\approx 95\%$). Періодичні процеси в міограмі є відносно стійкими: на корелограмі простежується не менше 3-4 періодів.

Для дослідження спектру сигналу міограми здійснимо дискретне швидке перетворення Фур'є ряду значень. При цьому необхідно враховувати, що особливість ШПФ полягає у тому, що довжина масиву, який перетворюється, повинна дорівнювати цілому ступеню двійки. Тому спочатку з'ясуємо, до якого ступеня двійки можна подати число 96. Для цього скористаємося логарифмом:

```
> log[2](96.);
```

6.58496

Округлюємо до найменшого и отримаємо «6». Тепер обчислимо дискретне ШПФ від сигналу для перших $2^6 = 64$ відліків за допомогою команди **FFT**:

```
> fdata_s:=FFT(Data_s[1..2^6]);
# Швидке перетворення Фур'є
fdata_s := [-0.10166 + 0.I, -0.02125 + 0.03909I, 0.07314 + 0.08893I, -0.06312
+ 0.05939I, 0.05784 - 0.03266I, -0.04057 + 0.16772I, 0.06420 - 0.05754I,
..., ... 57 Array entries not shown]

> mdata_s:=Magnitude(fdata_s);
# Амплітудно-частотна характеристика Фур'є образу
mdata_s := [0.10166, 0.04450, 0.11514, 0.08666, 0.06643, 0.17256, 0.08621, ...,
... 57 Array entries not shown]
```

(11.3)

Здійснимо дискретне ШПФ в частотному домені у вигляді послідовності, елементами якої є двокомпонентні переліки типу [частота, амплітуда]:

```
> samplingRate:=1:
FDs:=[seq([i*samplingRate/2^6, mdata_s[i]],
i=1..(1/2)*numelems(mdata_s))]:
# Частотний домен для амплітудно-частотної характеристики
```

Для подальшої фільтрації сигналу від шумів застосуємо так звану техніку трешолдінгу (порогова обробка даних) [143], [144], яка дозволяє пригнічувати шуми сигналів або зображень. Фактично ця техніка здійснює декомпозицію початкового сигналу у спектр, який потім обробляється [159].

Визначимо статистичні параметри масиву амплітуд (11.3) та універсальний шумовий поріг [144] для цього ряду:

```
> tb2:=DataSummary(mdata_s);
```

<pre>tb2 :=</pre>	<pre>mean = 0.06692 standarddeviation = 0.03183 skewness = 0.92241 kurtosis = 4.80878 minimum = 0.01443 maximum = 0.17256 cumulativeweight = 64.00000</pre>
-------------------	---

```
> lhs(tb2[2]):
`threshold_s=%*sqrt(2*ln((1/2)*numelems(mdata_s)))';
threshold_s:=evalf(rhs(tb2[2])*sqrt(2*ln((1/2)*numelems(mdata_s)))
);
```

$$threshold_s = standarddeviation \sqrt{2 \ln \left(\frac{numelems(mdata_s)}{2} \right)}$$

$$threshold_s := 0.08379$$

(11.4)

Візуалізуємо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) сигналу в частотному домені (Рис. 11.14), де частоти виражені у «1/відлік» $\rightarrow \left(\frac{1}{count}\right)$:

```
> plots[listplot](FDs, labels=[typeset("Frequency, ", 1/count),
"Amplitude"], thickness=2, color=blue, axes=boxed, plotopt,
size=[400, 240]): orig_s:=%:
```

За допомогою інструменту з контекстного меню **Probe Info** $\rightarrow$ **Cursor Position** визначимо приблизні значення, що відповідають першим п'яти максимумам на графіку. І конвертуємо їх у звичайні дробі:

```
> '0.327'=convert(0.328, rational); 'max_2'=3/64.; %/3;
rhs(%); 0.327/%; 21/64.;
```

$$0.32700 = \frac{41}{125}$$

$$max_2 = 0.04688$$

$$\frac{max_2}{3} = 0.01562$$

$$0.01562$$

$$20.92800$$

$$0.32812$$

```
> lin_max:=plot([<<3/32, 3/32>|<0, 0.2>>, <<3/64, 3/64>|<0, 0.2>>,
<<21/64, 21/64>|<0, 0.2>>, <<1/4, 1/4>|<0, 0.2>>, <<0.42,
0.42>|<0, 0.2>>], style=line, linestyle=dash, thickness=1,
color=[blue, "DimGrey", "DimGrey", "DimGrey", "DarkGrey"],
axes=boxed, plotopt, size=[400, 240]):
# вертикальні лінії, що відповідають максимумам амплітуд
lin_title:=textplot([[3/32, 0.18, "3/32"], [3/64, 0.18, "3/64"],
[1/4, 0.18, "1/4"], [21/64, 0.18, "21/64"]], 'align'={ 'above',
'right' }, axes=boxed, plotopt, size=[400, 240]):
# lin_title - текстові написи до вертикальних ліній
plots[display](orig_s, lin_max, lin_title, caption=typeset("\n
Рис. 8 - Фур'є-спектр міограми здорового пацієнта."),
size=[hor+40, ver]);
```

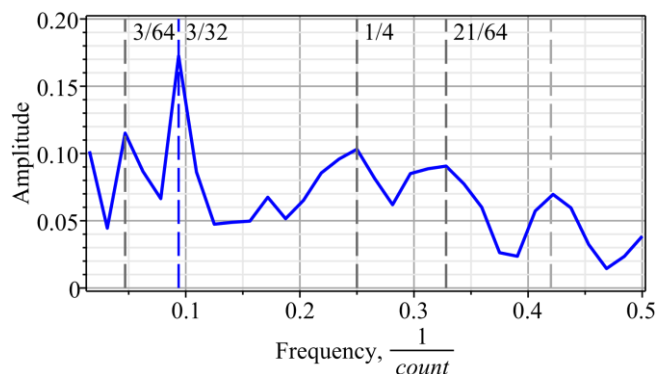


Рис. 11.14 – Фур'є-спектр міограми здорового пацієнта.

Головна частота дорівнює 3/32, тобто відповідає приблизно періоду головних коливань в 11 відліків. Окрім того, помітні амплітуди мають частоти 3/64, 1/4 та 1/3, які відповідають періодам приблизно 21 та 3-4 відліки (Табл. 11.1). Ці дані добре узгоджуються з графіком автокореляційної функції (Рис. 11.13).

Табл. 11.1

Частоти коливань АФ (Рис. 11.13) та відповідні їм максимуми Фур'є-спектру міограми здорового пацієнта (Рис. 11.14).

Частота коливань (Рис. 11.13)	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{3}$
Максимум (Рис. 11.14)	0.09375	0.04688	0.33333

Проведемо трешолдінг Фур'є-спектру міограми, тобто очищення сигналу від шумів, в даному випадку за допомогою вейвлетів, користуючись порогом (11.4):

```
> data_filtered_s:=map(proc (data) options operator, arrow;
  data*Heaviside(abs(data)-threshold_s) end proc, fdata_s):
data_filtered_s:=convert(data_filtered_s, Array,
  datatype=complex[8]):
# Фільтрований спектр міограми

> mdata_fs:=Magnitude (data_filtered_s):
# Амплітуди спектру Фур'є фільтрованої міограми

> samplingRate:=1:
DSfs:=[seq([i*samplingRate/2^6, mdata_fs[i]],
  i=1..(1/2)*numelems(mdata_fs))]:
# Частотний домен фільтрованого спектру
```

Побудуємо графік фільтрованого Фур'є-спектру міограми:

```
> plots[listplot](DSfs, labels=[typeset("Frequency, ", 1/count),
  "Amplitude"], thickness=2, caption=typeset("\n Рис. 9 а - Фільтро-
  ваний Фур'є-спектр міограми здорового пацієнта."),
  color="OrangeRed", axes=boxed, size=[hor, ver+20], plotopt):
filt_s:=%:
```

Порівняємо графіки Фур'є-спектру та первинного та фільтрованого сигналів міограми здорового пацієнта (Рис. 11.15):

```
> plots[display](filt_s, orig_s, lin_max, lin_title,
  caption=typeset("\n Рис. 9 б - Фур'є-спектр (blue) та фільтрований
  спектр (orange) міограми здорового пацієнта."), size=[hor+40,
  ver+20]);
```

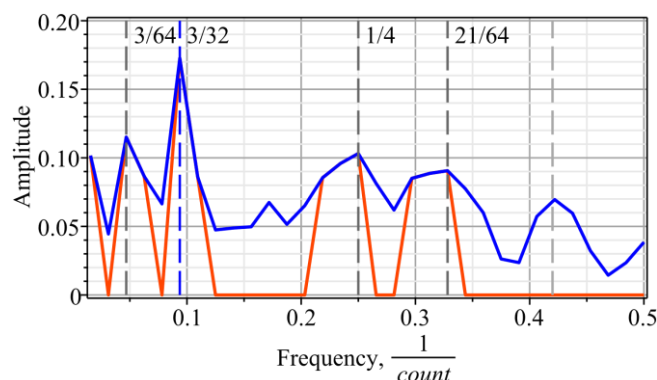


Рис. 11.15 – Фур'є-спектр (blue) та фільтрований спектр (orange) міограми здорового пацієнта.

Головною частотою є частота $3/32$, що відповідає періоду приблизно в 11 відліків. Окрім того, помітні періоди довжиною у 21 відлік, а також короткі періоди в 3-5 відліків.

Здійснимо зворотне перетворення Фур'є для відновлення фільтрованої міограми та побудуємо графік (Рис. 11.16):

```
> data_filtered_s:=InverseFFT(data_filtered_s):
# Зворотне ПФ, відновлення фільтрованої міограми

> LineChart(Data_s, linestyle=solid, thickness=1, symbol=diamond,
  symbolsize=15, tickmarks=[15,8], color="DarkGrey",
  labels=["Samples", "Biopotential, mV"], axes=boxed, view=[0..96,-
  0.3..0.3], plotopt, size=[500, 240]): rs_grey:=%:
```

```
# Часовий ряд спостережень: міограма здорової людини з Рис. 1, зафарбо-
вана у сірий колір
> filteredData_s_Plot:=plots[pointplot] ([seq([i,
Re(data_filtered_s)[i]], i=1..64)], connect=true, color=blue,
thickness=2):
> plots[display](rs_grey, filteredData_s_Plot, caption=typeset("\n
Рис. 10 - Первинний сигнал з Рис. 1, попередньо зафарбований у сі-
рий колір, і фільтрований (blue)."), plotopt, size=[hor+60,
ver+20]);
```

Порівняння показує, що фільтрований сигнал непогано узгоджується з первинним в межах перших 64 відліків. Побудуємо корелограму фільтрованого сигналу (Рис. 11.17):

```
> AutoCorrelation (Re(data_filtered_s)):
ColumnGraph(%, 'color'="OrangeRed", 'style'='polygon',
tickmarks=[16,15], view=[0..64, -0.07..0.24], labels=["Samples",
""], caption=typeset("\n Рис. 11 - АФ фільтрованої міограми здоро-
вого пацієнта."), size=[hor, ver], plotopt);
```

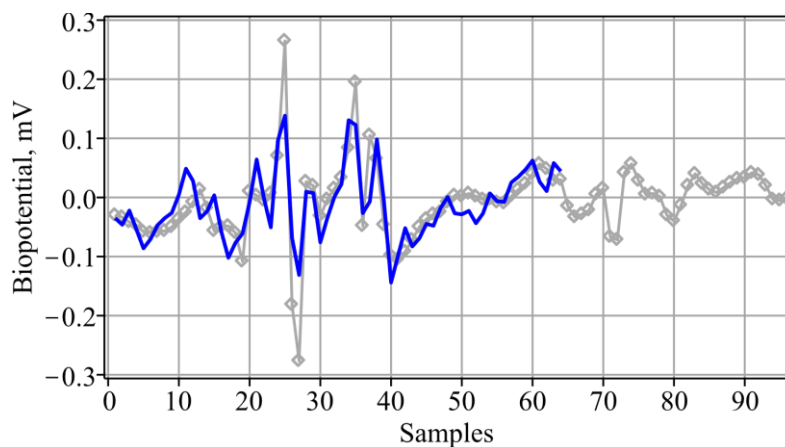


Рис. 11.16 – Первинний сигнал з Рис. 11.7, попередньо зафарбований у сірий колір, та фільтрований сигнал (blue).

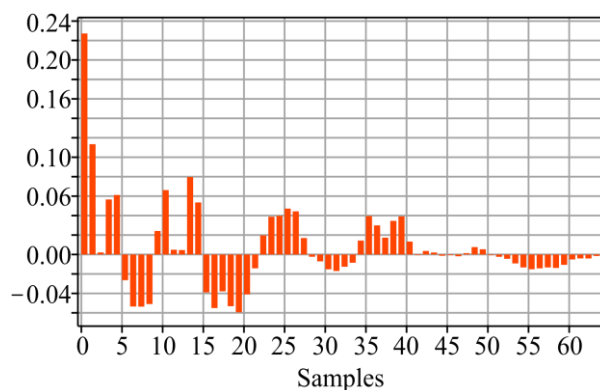


Рис. 11.17 – АФ фільтрованої міограми здорового пацієнта.

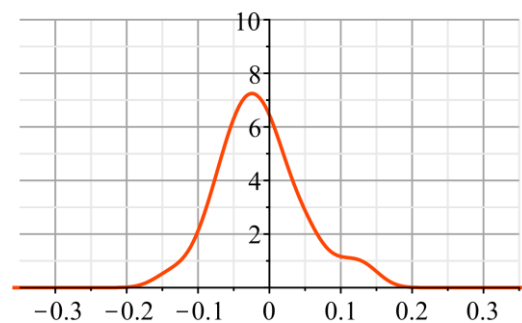


Рис. 11.18 – Густина ймовірності фільтрованого сигналу.

На корелограмі фільтрованого сигналу з Рис. 11.17 переважає період коливань приблизно в 10-13 відліків, модульований довгими хвилями.

```
> DataSummary( Re(data_filtered_s) );
# Статистичні характеристики фільтрованого сигналу міограми здорового па-
цієнта
```

$$\begin{aligned}
 & \text{mean} = -0.01271 \\
 & \text{standarddeviation} = 0.05867 \\
 & \text{skewness} = 0.47936 \\
 & \text{kurtosis} = 3.30762 \\
 & \text{minimum} = -0.14394 \\
 & \text{maximum} = 0.13840 \\
 & \text{cumulativeweight} = 64.00000
 \end{aligned}
 \tag{11.5}$$

Графік густини ймовірності фільтрованого сигналу (Рис. 11.18):

```

> KernelDensityPlot(Re(data_filtered_s), labels=[" ", ""],
caption=typeset("\n Рис. 12 - Густина ймовірності фільтрованого
сигналу."), range=-0.4..0.4, thickness=2, color="OrangeRed",
view=[-0.35..0.35, 0..10], axes=normal, plotopt, size=[hor-80,
ver-20]); gfs:=%:

```

Порівняємо розподіли ймовірностей первинного сигналу ЕМГ, нормального розподілу із значеннями μ_h , σ_h з (11.1), та фільтрованого здорової людини:

```

> pl_tx_hr:=textplot([0.025, 7.1, "Real Distr."], color="Blue",
'align'={'above', 'right'}, axes=boxed, size=[hor, ver], plotopt):
pl_tx_hn:=textplot([-0.15, 1.1, "Normal Distr."], color="DarkRed",
'align'={'above', 'left'}, axes=boxed, size=[hor, ver], plotopt):
pl_tx_hf:=textplot([-0.07, 5.1, "Filtered Distr."],
color="OrangeRed", 'align'={'above', 'left'}, axes=boxed,
size=[hor, ver], plotopt):
plots[display](gfs, gn, gs, pl_tx_hr, pl_tx_hn, pl_tx_hf,
caption=typeset("\n Рис. 13 - Розподіли ймовірностей \n для даних
міограми здорової людини."), axes=normal, size=[hor+20, ver+20]);

```

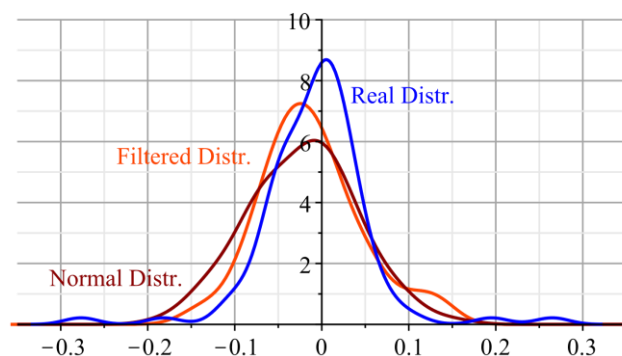


Рис. 11.19 – Розподіли густини ймовірностей даних ЕМГ здорової людини.

З Рис. 11.19 видно, що розподіли ймовірностей для первинного сигналу, фільтрованого сигналу та нормального (гаусівського) в цілому близькі між собою.

11.2.2 Пацієнт, хворий на нейропатію

Нормована АФ сигналу міограми хворого на нейропатію (Рис. 11.20):

```

> Statistics:-AutoCorrelation (Data_d):
Statistics:-ColumnGraph(% , 'color'="Black", 'style'='polygon',
tickmarks=[12,8], view=[0..96,-0.3..0.3], labels=["Samples", ""],
caption=typeset("\n Рис. 14 - АФ міограми хворого пацієнта."),
gridlines, plotopt, size=[hor, ver]): acfd:=%;

```

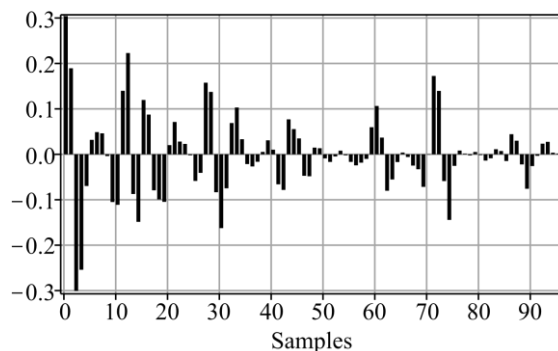


Рис. 11.20 – Автокореляційна функція міограми пацієнта хворого на нейропатію.

З корелограми видно, що внесок коливальних процесів в корелограму суттєво вищий, а період основних коливань суттєво коротший (5-6 відліків), ніж це було зафіксовано у здорового пацієнта (Рис. 11.13).

Обчислимо дискретне ШПФ від сигналу для перших 2^6 відліків:

```
> fdata_d:=FFT(Data_d[1..64]):
# Швидке перетворення Фур'є
> mdata_d:=Magnitude(fdata_d):
# Амплітудна характеристика Фур'є-образу
```

Зобразимо отримане дискретне ШПФ в частотному домені у вигляді послідовності, як то було зроблено для даних міограми здорового пацієнта:

```
> samplingRate:=1:
FDd:=[seq([i*samplingRate/2.^6, mdata_d[i]],
i=1..(1/2)*numelems(mdata_d))];
FDd := [[0.01562, 0.10956], [0.03125, 0.16302], [0.04688, 0.15973],
...
0.17377], [0.45312, 0.09775], [0.46875, 0.06980], [0.48438, 0.19866],
[0.50000, 0.14834]]
```

(11.6)

Визначимо статистичні параметри масиву амплітуд (11.6) та універсальний шумовий поріг для цього масиву:

```
> tb3:=DataSummary(mdata_d);
```

$tb3 :=$

```
mean = 0.19476
standarddeviation = 0.12335
skewness = 1.00215
kurtosis = 3.11453
minimum = 0.02706
maximum = 0.52743
cumulativeweight = 64.00000
```

```
> threshold_d:=evalf(rhs(tb3[2])*sqrt(2*ln((1/2)*numelems(mdata_d))))
);
```

$threshold_d := 0.32475$ (11.7)

Візуалізуємо Фур'є-образ сигналу в частотному домені:

```
> plots[listplot](FDd, labels=[typeset("Frequency, ", 1/count),
"Amplitude"], thickness=2, caption=typeset("\n Рис. 15 - Фур'є
спектр міограми пацента з нейропатією."), color="LightCoral",
axes=boxed, size=[hor, ver], plotopt): orig_s_N:=%:
convert(0.173, rational, 3):
lin_max_N:=plot([<<13/64, 13/64>|<0, 0.6>>, <<1/4, 1/4>|<0, 0.6>>,
<<3/32, 3/32>|<0, 0.6>>, <<5/16, 5/16>|<0, 0.6>>, <<0.173,
0.173>|<0, 0.6>>], style=line, linestyle=dash, thickness=1,
color=["LightCoral", "DimGrey", "DimGrey", "DimGrey", "DarkGrey"],
axes=boxed, size=[hor, ver], plotopt):
# lin_max - графік вертикальних ліній, що відповідають максимумам амплі-
туд
lin_title_N:=textplot([[13/64, 0.53, "13/64"], [1/4, 0.53, "1/4"],
```

```

[3/32, 0.53, "3/32"], [5/16, 0.53, "5/16"]], 'align'={'above',
'right'}, axes=boxed, size=[hor, ver], plotopt):
# lin_title - підписи значень для вертикальних ліній, що відповідають ма-
ксимумам амплітуд
> plots[display](orig_s_N, lin_max_N, lin_title_N, size=[hor+40,
ver]);

```

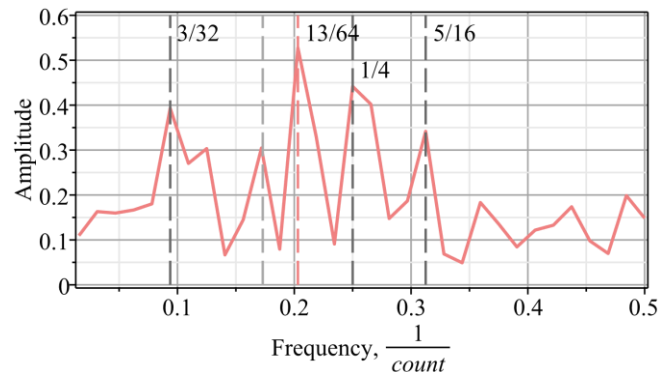


Рис. 11.21 – Фур'є-спектр міограми пацієнта з нейропатією.

Основною в цьому випадку є частота 13/64, що приблизно відповідає періоду в 5 відліків. Разом з тим помітні періоди в 4 відліки та 11 відліків.

Проведемо трешолдінг (очищення) спектру міограми, користуючись порогом (11.7):

```

> data_filtered_d:=map(proc (data) options operator, arrow:
data*Heaviside(abs(data)-threshold_d) end proc, fdata_d):
data_filtered_d:=convert(data_filtered_d, Array,
datatype=complex[8]):
# Фільтрований спектр міограми
> mdata_fd:=Magnitude(data_filtered_d);
# Амплітуди спектру Фур'є фільтрованої міограми
mdata_fd := [0., 0., 0., 0., 0., 0.39302, 0., ..., ... 57 Array entries not shown]
> samplingRate:=1:
DSfd:=[seq([i*samplingRate/2^6, mdata_fd[i]],
i=1..(1/2)*numelems(mdata_fd))]:
# Частотний домен фільтрованого спектру
> plots[listplot](DSfd, labels=[typeset("Frequency, ", 1/count),
"Amplitude"], thickness=2, caption=typeset("\n Рис. 16 а - Фільт-
рований Фур'є-спектр міограми пацієнта з нейропатією."),
color="RoyalBlue", axes=boxed, size=[hor+40, ver], plotopt):
filt_s_N:=%;

```

Порівняємо графіки Фур'є-спектру первинного та фільтрованого сигналу міограми пацієнта, хворого на нейропатію:

```

> plots[display](lin_max_N, lin_title_N, orig_s_N, filt_s_N,
caption=typeset("\n Рис. 16 б - Фур'є-спектр первинного сигналу
(coral) та фільтрований спектр (azure) міограми пацієнта з нейро-
патією."), size=[hor+40, ver+20]);

```

Як було також видно з корелограми на Рис. 11.20, в сигналі домінують коливання коротших періодів.

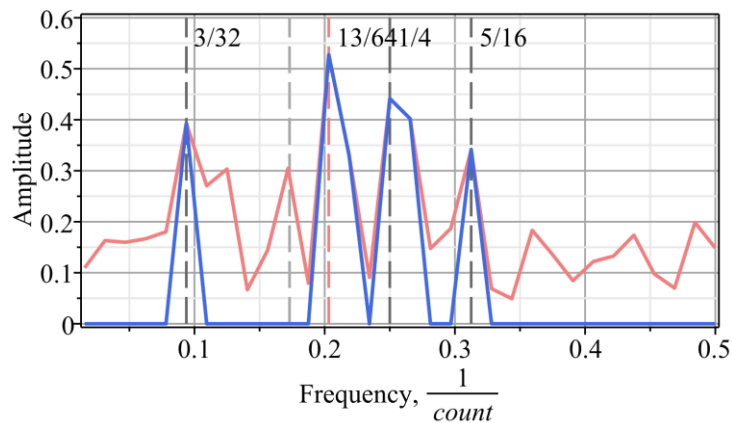


Рис. 11.22 – Фур'є-спектр первинного сигналу (coral) та фільтрований спектр (azure) міограми пацієнта з нейропатією.

Після зворотного ПФ відновимо сигнал фільтрованої міограми:

```
> data_filtered_d:=InverseFFT(data_filtered_d):
# Зворотне ПФ для відновлення фільтрованої міограми
> LineChart(Data_d, linestyle=solid, thickness=1, symbol=diamond,
symbolsize=15, tickmarks=[15,8], color="DarkGrey",
labels=["Samples", "Biopotential, mV"], view=[0..96,-1..1.4],
size=[hor, ver+20], plotopt): d_grey:=%:
filteredData_d_Plot:=plots[pointplot]([seq([i,
Re(data_filtered_d)[i]], i=1..64)], connect=true,
color="RoyalBlue", thickness=2, plotopt):
> plots[display](rd_grey, filteredData_d_Plot, caption=typeset("\n
Рис. 17 - Первинний сигнал, попередньо зафарбований у сірий колір,
та з фільтрований (RoyalBlue)."), size=[hor, ver], axes=boxed,
plotopt, size=[hor+60, ver+20]);
```

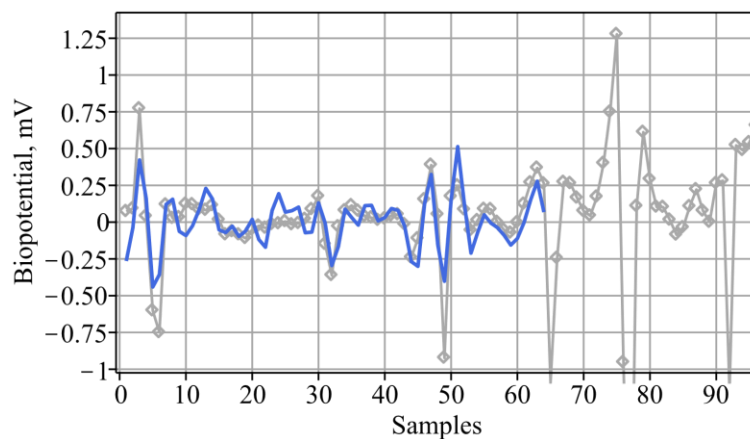


Рис. 11.23 – Первинний сигнал з Рис. 11.10, попередньо зафарбований у сірий колір, та фільтрований сигнал (RoyalBlue).

Корелограма автокореляційної функції фільтрованого сигналу:

```
> Statistics:-AutoCorrelation(Re(data_filtered_d)):
ColumnGraph(% , 'color'="RoyalBlue", 'style'='polygon',
tickmarks=[16,15], view=[0..64,-0.4..0.4], caption=typeset("Рис.
18 - АКФ фільтрованої міограми пацієнта."), size=[hor, ver],
plotopt);
```

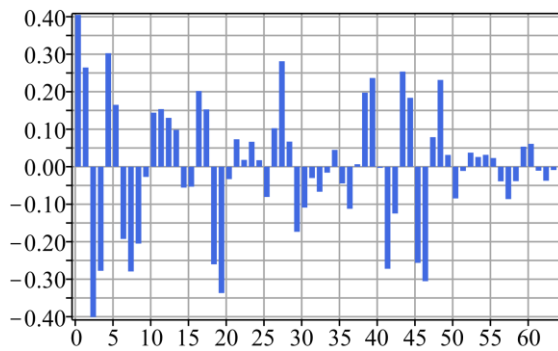


Рис. 11.24 – АФ фільтрованої міограми хворого на нейропатію.

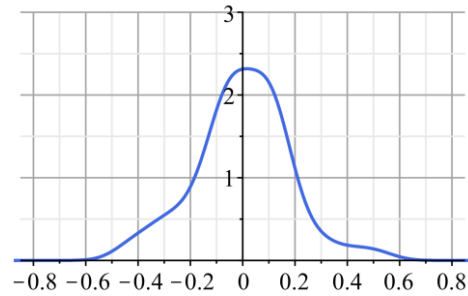


Рис. 11.25 – Розподіл густини ймовірності фільтрованої ЕМГ хворого на нейропатію.

На корелограмі фільтрованої міограми хворого на нейропатію (Рис. 11.24) домінують коротші періоди коливань, модульовані довгими хвилями, що узгоджується з набором частот Рис. 11.22.

> **DataSummary(Re(data_filtered_d));**

Статистичні характеристики фільтрованої ЕМГ (нейропатія)

```

mean = -3.25261 × 10-18
standarddeviation = 0.17951
skewness = -4.76011 × 10-18
kurtosis = 3.64650
minimum = -0.44088
maximum = 0.51346
cumulativeweight = 64.00000

```

(11.8)

Фільтрований сигнал на Рис. 11.25 практично втратив асиметрію і має значно меншу дисперсію та ексцес у порівнянні з первинним сигналом, як то можна бачити з порівняння основних статистичних характеристик в Табл. 11.2.

Табл. 11.2

Основні статистичні показники сигналів міограм.

	Здоровий пацієнт		Хворий на нейропатію	
	Первинний сигнал (11.1)	Фільтров. сигнал (11.5)	Первинний сигнал (11.2)	Фільтров. сигнал (11.8)
Середнє (mean)	-0.007	-0.0127	0.024	$-3.25 \cdot 10^{-18}$
Стандартне відхилення	0.063	0.0587	0.451	0.1795
Коефіцієнт асиметрії (skewnes)	0.107	0.4794	-2.867	$-4.76 \cdot 10^{-18}$
Коефіцієнт ексцесу (kurtosis)	9.514	3.3076	19.274	3.6465

Порівняємо розподіли густини ймовірностей для первинних та фільтрованих даних міограми хворого на нейропатію:

```

> KernelDensityPlot(Re(data_filtered_d), labels=[" ", ""],
caption=typeset("\n Рис. 19 - Розподіл густини ймовірності фільт-
рованого сигналу людини хворої на нейропатію."), range=-0.9..0.9,
thickness=2, color="RoyalBlue", view=[-0.85..0.85, 0..3],
axes=normal, plotopt, size=[hor-80, ver]); gfd=%:

> pl_tx_Nr:=textplot([0.12, 2.3, "Real Distr."], color="IndianRed",
'align'={'above', 'right'}, axes=boxed, size=[hor, ver], plotopt):
pl_tx_Nn:=textplot([-0.5, 0.5, "Normal Distr."],
color="LimeGreen", 'align'={'above', 'left'}, axes=boxed,
size=[hor, ver], plotopt):
pl_tx_Nf:=textplot([-0.12, 1.5, "Filtered Distr."],
color="RoyalBlue", 'align'={'above', 'left'}, axes=boxed,
size=[hor, ver], plotopt):
# Підписи кривих на графіках

```

```
plots[display](gnd, gd, gfd, pl_tx_Nr, pl_tx_Nn, pl_tx_Nf,
caption=typeset("Рис. 20 - Розподіл ймовірності первинного сигналу
ЕМГ, нормального розподілу, та фільтрованої ЕМГ хворого на нейро-
патію."), axes=normal, size=[hor+40, ver]);
```

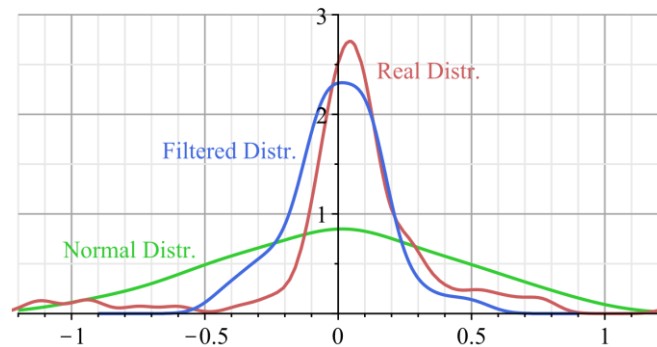


Рис. 11.26 – Розподіл ймовірності первинного сигналу, нормальний розподіл до нього, та фільтрованого сигналу за даними ЕМГ хворого на нейропатію.

З Рис. 11.26 видно, що розподіл фільтрованого сигналу майже збігається з розподілом первинного сигналу і суттєво відрізняється від нормального гаусівського (зелена лінія).

11.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. Поясніть зміст коефіцієнтів ексцесу та асиметрії.
2. Для чого в даній роботі використовується розподіл ймовірності?
3. Як визначається густина ймовірності неперервної випадкової величини?
4. Дайте визначення математичного сподівання в загальному вигляді.
5. Як визначається математичне сподівання дискретної випадкової величини?
6. Як визначається і що показує стандартне відхилення? Чим стандартне відхилення відрізняється від дисперсії?
7. Запишіть формулу визначення дисперсії для дискретної випадкової величини та поясніть зміст величин.
8. В чому полягає сутність методу кореляційного аналізу?
9. Поясніть поняття кореляційної функції.
10. Поясніть призначення та особливості використання АФ.
11. Як здійснюється нормування АФ?
12. Поясніть призначення дискретного ШПФ. В чому особливість його використання?
13. Яке призначення операції трешолдінгу? Поясніть її особливості.
14. Що дозволяє відслідкувати корелограма?

♦ 1.2 Maple

1. Яка команда в Maple дозволяє встановити для всього документу кількість відображуваних цифр після коми та кількість відображуваних рядків в матрицях? Які інші важливі, на вашу думку, опції дозволяє встановлювати ця команда?
2. Поясніть можливості команди з перетворення виразу з однієї форми в іншу.
3. Які опції команди **convert** використані в цій лабораторній роботі?
4. Як в Maple перетворити вектор-стовпчик у вектор-рядок?
5. Яка команда і з якого пакета вибирає з масиву даних певний набір?
6. Поясніть в чому відмінність команди **LineChart** від **plot**?
7. Які є два способи в Maple викликання команди без підключення всього пакету?
8. За допомогою якої команди можна визначити такі статистичні характеристики масиву даних як середнє, стандартне відхилення та ін.?
9. Яка команда і з якого пакета будує графік розподілу густини ймовірності для даних?
10. Яка команда створює випадковий вектор на певну кількість компонентів з нормальним розподілом? Яка величини для цього потрібні?
11. Яка команда і з якого пакета обчислює АФ? Які її особливості?
12. Яка команда будує графік АФ? Яка команда використана в цій роботі?
13. Поясніть можливості візуалізації пакету **Statistics**.
14. Як визначити довжину масиву для дискретного ШПФ?

15. Яка команда і з якого пакета обчислює дискретне ШПФ? Як отримати зворотне перетворення Фур'є масиву фільтрованих даних?
16. Як обчислити АЧХ Фур'є образу?
17. Яка команда і з якого пакету створює напис на графіку?

11.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Виконайте індивідуальне завдання за варіантом з Табл. 11.3.
2. Оцініть якість діагностування за окремими інтервалами даних.
3. Порівняйте з результатами оригінальних досліджень.
4. Зробіть висновки.

Табл. 11.3

Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 2.

Параметр	Часові інтервали, с			
Номери варіантів	1	2	3	4
Healthy	0 – 4	4 – 8	8 – 12.715	0 – 4
Myopathy	0 – 4	4 – 8	8 – 12.715	
Neuropathy				0 – 4
Номери варіантів	5	6	7	8
Healthy	4 – 8	8 – 12.715	0 – 4	4 – 8
Myopathy			12 – 16	16 – 20
Neuropathy	4 – 8	8 – 12.715		
Номери варіантів	9	10	11	12
Healthy	8 – 12.715	0 – 4	4 – 8	8 – 12.715
Myopathy	20 – 24.715			
Neuropathy		12 – 16	16 – 20	20 – 24.715
Номери варіантів	13	14	15	16
Healthy	0 – 4	4 – 8	6 – 10	10 – 14
Myopathy			6 – 10	10 – 14
Neuropathy	24 – 28.715	28 – 32.715		

АНАЛІЗ ЧАСОВИХ ЗМІН СОНЯЧНОЇ АКТИВНОСТІ

- 1  Спектральний аналіз часових послідовностей на прикладі сонячної активності.
- 2  Фільтрація даних часової послідовності.

12.1 СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЧАСОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ НА ПРИКЛАДІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ СОНЯЧНОЇ АКТИВНОСТІ

12.1.1 Сонячні цикли

Цикли сонячної активності – це періодичні процеси появи й розвитку на Сонці так званих активних областей (Рис. 12.1) [145], які характеризуються виходом на його поверхню сильних магнітних полів (Рис. 12.2) [146]. Кожен сонячний цикл охоплює весь диск Сонця й може бути простежений по багатьом явищам у фотосфері, хромосфері та короні Сонця. Найбільш наочним проявом Сонячних циклів вважають циклічну зміну, з періодом близько 11 років [147], числа сонячних плям, які входять до складу активних областей.

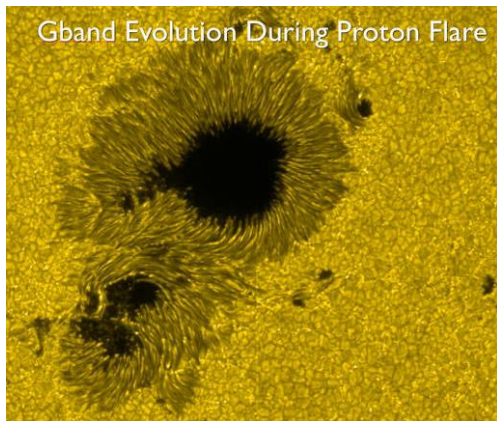


Рис. 12.1 – Група плям на Сонці (у центрі).
Світлина зроблена у видимому світлі
космічним апаратом Hinode
13 грудня 2006 року [148].

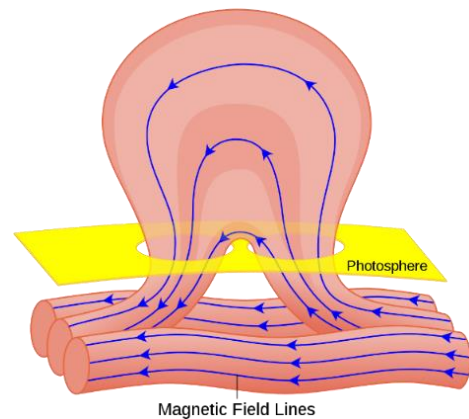


Рис. 12.2 – Лінії магнітного поля
сонячної плями, які пронизують
поверхню Сонця [146].

Сонячні плями (*sunspot*) – це порівняно темні області на фотосфері Сонця (Рис. 12.1), в яких інтенсивне магнітне поле пригнічує конвекцію плазми і знижує її температуру приблизно на 2000 K [149]. Кількість сонячних плям обчислюють так званим числом Вольфа (*Wolf number*) [147], яке характеризує кількість плям і груп плям на Сонці:

$$W = 10g + f \quad (12.1)$$

де g – кількість груп плям,

f – загальна кількість усіх плям, які є в цей момент на диску Сонця.

Теоретично передбачається наявність відносно великої кількості сонячних циклів з періодами у:

- 11 років – цикл Швабе (*S. H. Schwabe*): поступове збільшення кількості сонячних плям з їх подальшим швидким зникненням [147];
- 22 роки – цикл Хейла (*G. E. Hale*): обертання магнітного поля Сонця протягом 11 років, а потім протягом ще 11 – повернення у початковий стан;
- 87 років – цикл Глейшберга (*W. Gleißberg*): за припущеннями являє собою модуляцію 11-річного циклу;
- 210 років – відомий як Швейцарський цикл або цикл Де Врайеса (*H. De Vries*);
- 2 300 років – цикл Холштата (*Hallstatt*): названий на честь прохолодного та вологого періоду в Європі, коли наступали льодовики;
- 6 000 років – гіпотетичний цикл, який з'явився за результатами радіовуглецевого аналізу ^{14}C .

Проте, станом на сьогоднішній день з астрономічних спостережень достовірно підтверджено існування лише 11 та 22-річних циклів [147].

Задача цієї практичної роботи – проаналізувати астрономічні спостереження за кількістю сонячних плям за останні 313 років та продемонструвати наявність 11-річного циклу Швабе двома різними способами [150]-[152].

12.1.2 Дані спостережень за сонячними плямами

Здійснення перетворення Фур'є для подальшого спектрального аналізу потребує підключення пакету **SignalProcessing[Engine]**.

```

> restart:
  with(plots): with(SignalProcessing[Engine]):
  with(SignalProcessing):
> interface(displayprecision=3, rtablesize=7):
  plotopt:=font=[TIMES, ROMAN, 12], labeldirections=[horizontal,
  vertical], gridlines, axes=boxed:
  plotoptDP:=labeldirections=[horizontal,vertical], gridlines,
  axes=boxed:
> hor:=380: ver:=280: # size of plots

```

Використаємо для аналізу доступні в мережі результати багаторічних спостережень за кількістю сонячних плям, починаючи з червня 1700 року і до червня 2013 року [153]. Таблиця даних після завантаження виглядатиме так:

	1	2	
1	1700.5	5.0	^
2	1701.5	11.0	
3	1702.5	16.0	
4	1703.5	23.0	
5	1704.5	36.0	
6	1705.5	58.0	
7	1706.5	29.0	v

Рис. 12.3 – Вигляд у Maple 2021 таблиці даних спостережень за кількістю сонячних плям (1700 р. – 2013 р.).

Перевіримо, що наведена таблиця спостережень має формат масиву даних, та дізнаємося про об'єм масиву:

```

> whattype(data); numelems(data);
Array
626

```

Також можна скористатися командами завантаження даних безпосередньо з сайту, як показано у прикладі «Sunspot Periodicity» [154]. Виконання команд заблоковане хешем, який перед виконанням команд необхідно видалити.

```

> # DataReference:=Reference("quandl", "SIDC/SUNSPOTS_A");
> # data:=convert(DataReference, Matrix);

```

Розділимо вхідний масив даних на два масиви меншої розмірності:

```

> Years:=data[() .. (), 1]; # Роки
WolfNumbers:=data[() .. (), 2];
# Число Вольфа для сонячних плям
Years := [1.700 × 103, 1.702 × 103, 1.702 × 103, 1.704 × 103, 1.704 × 103,
1.706 × 103, 1.706 × 103, ..., ... 306 Array entries not shown]
WolfNumbers := [5.000, 11.000, 16.000, 23.000, 36.000, 58.000, 29.000, ...,
... 306 Array entries not shown]

```

Представимо результати спостережень в графічному вигляді:

```

> dat_pl_fill:=plot([seq([Years[i], WolfNumbers[i]], i=1..313)],
style=line, labels=["Years", "Wolf Numbers"], thickness=0,
color="DarkOrange", filled=[color="DarkOrange", transparency=0.5],
size=[3/2*hor, ver], plotopt):
# Заливка кольором площі під кривою даних
> dat_pl_grad:=plot([seq([Years[i], WolfNumbers[i]], i=1..313)],
style=line, labels=["Years", "Wolf Numbers"], thickness=2,
colorscheme=["zgradient", ["Orange", "Red", "DarkRed", black]],
size=[3/2*hor, ver], plotopt):
# Градієнтний колір кривої даних
plots[display](dat_pl_fill, dat_pl_grad, caption="Рис. 3 - Дані
сонячних плям за час спостережень.",
axis=[gridlines=[color="DimGrey"]], size=[2*hor, ver], plotopt);

```

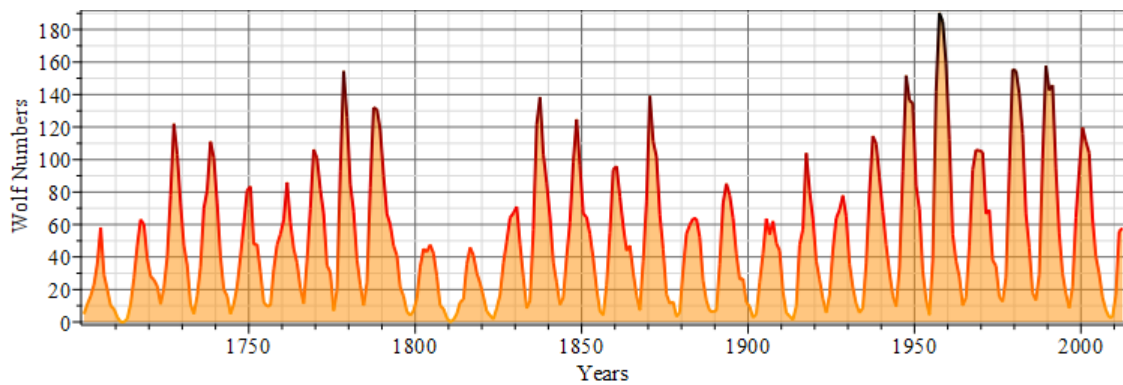


Рис. 12.4 – Дані сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р.

Побудуємо графік з використанням команди **DiscretePlot** пакету **DynamicSystems**:

```
> dp_pl:=DynamicSystems[DiscretePlot](convert(Array([seq(i,
i=1..313)]), Vector), convert(WolfNumbers, Vector), style=stem,
symbolsize=1, thickness=0, labels=["Sample", "Wolf Numbers"],
color="OrangeRed", caption="Рис. 4 - Дані сонячних плям за час
спостережень.\n Команда DynamicSystems[DiscretePlot].",
size=[2*hor, ver], plotoptDP);
```

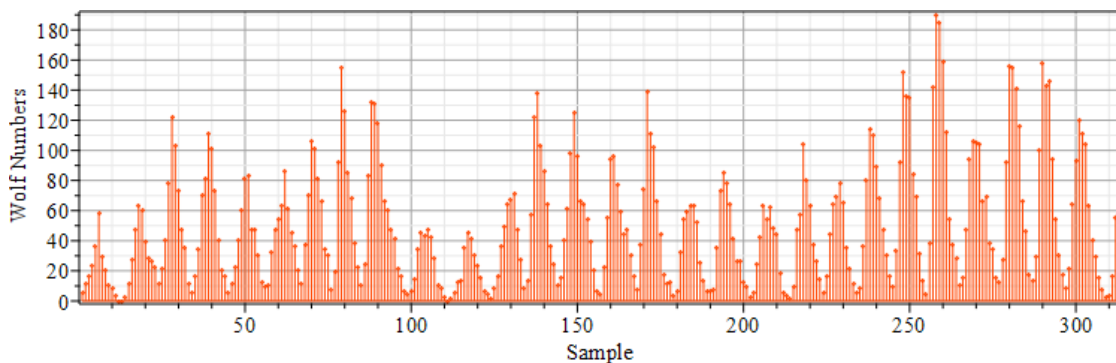


Рис. 12.5 – Дані сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р.
Команда **DynamicSystems[DiscretePlot]**.

Статистичні характеристики часового ряду представленого на Рис. 12.4:

```
> Statistics[DataSummary] (WolfNumbers);
```

mean = 49.540

standarddeviation = 40.327

skewness = 0.990

kurtosis = 3.427

minimum = 0.

maximum = 190.200

cumulativeweight = 313.000

(12.2)

Як видно з (12.2), розподіл густини ймовірності числа Вольфа для сонячних плям суттєво відрізняється від нормального розподілу своєю асиметрією (*skewness* = 0.990) та ексцесом (*kurtosis* = 3.427):

```
> Statistics[KernelDensityPlot] (WolfNumbers,
colorscheme=["zgradient", ["Orange", "Red", "DarkRed", black]],
thickness=2, labels=[" ", ""], axes=boxed, caption="Рис. 5 - Гус-
тина ймовірності розподілу чисел Вольфа.", view=[-50..250,
0..0.013], size=[hor-60, ver-40], plotopt);
```

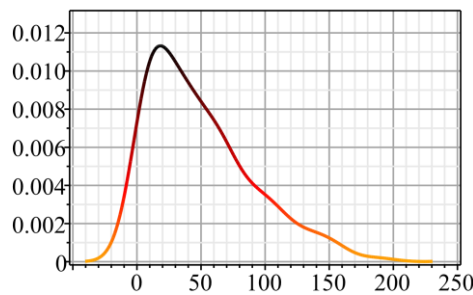


Рис. 12.6 – Густина ймовірності розподілу чисел Вольфа.

12.1.3 АКФ даних спостережень та її аналіз

Використання **автокореляційної функції** (АФ) та побудова корелограм – один з потужних засобів виділення гармонічних коливань у випадковому процесі. При цьому можна знаходити навіть певні числові характеристики сигналу, який досліджується, зокрема, середній період коливань, ступінь періодичності процесу, стабільність коливань тощо.

Отримаємо автокореляційну функцію у нормованому вигляді для кількості сонячних плям за допомогою команди **AutoCorrelation** з пакету **Statistics**:

```
> ACF_WN:=Statistics[AutoCorrelation] (WolfNumbers);
```

```
ACF_WN :=
[
  1.000
  0.822
  0.454
  0.044
 -0.271
 -0.421
 -0.375
  ⋮
]
313 element Vector[column]
```

Візуалізуємо отриману АФ за допомогою команди **listplot** пакету **plots**:

```
> listplot(ACF_WN, labels=["Years", ""],
  labeldirections=[horizontal, vertical],
  axis=[gridlines=[color="Grey"]], caption="Рис. 6 – Автокореляційна
  функція даних сонячних плям за час спостережень.", view=[0..320,-
  0.5..1], numpoints=800, color="Crimson", thickness=1,
  tickmarks=[10,8], size=[hor+50, ver-20], plotopt);
```

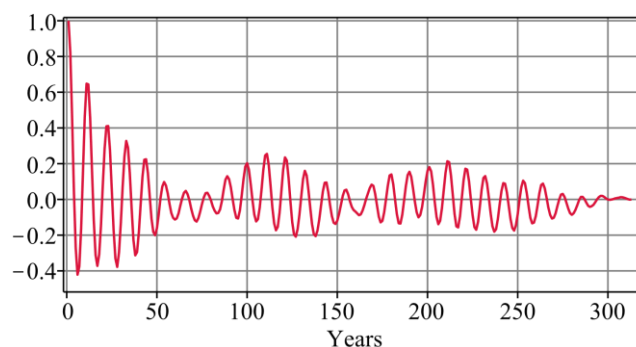


Рис. 12.7 – Автокореляційна функція даних кількості сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р.

Як видно з вигляду автокореляційної функції на Рис. 12.7, проявляються щонайменше два циклічні процеси:

1. з коротким періодом ≈ 11 років, що приблизно відповідає циклу Швабе;
2. з довгим періодом, ≈ 100 років, що приблизно відповідає циклу Глейшберга.

Ці циклічні процеси характеризують сонячну активність як таку, що має періодичні коливання. Час спостережень (трохи більше 300 років) надто короткий для детального вивчення параметрів довгоперіодичного циклу. Зауважимо лише, що середній період (приблизно 100 років) характеризує близький до циклу відомого астронома Глейшберга (з періодом 87 років).

Розглянемо детальніше короткоперіодичні (високочастотні) коливання сонячної активності, зменшивши масштаб Рис. 12.7 по осі часу:

```
> listplot(convert(ACF_WN[1..88],list), labels=["Years", ""],
  labeldirections=[horizontal, vertical], connect=true,
  axis=[gridlines=[color="DimGrey"]], caption="Рис. 7 - Частина ав-
  токореляційної функції даних спостережень з Рис. 12.7.",
  view=[0..88,-0.5..1], numpoints=800, color="Crimson", thickness=2,
  size=[hor+50, ver-20], plotopt);
```

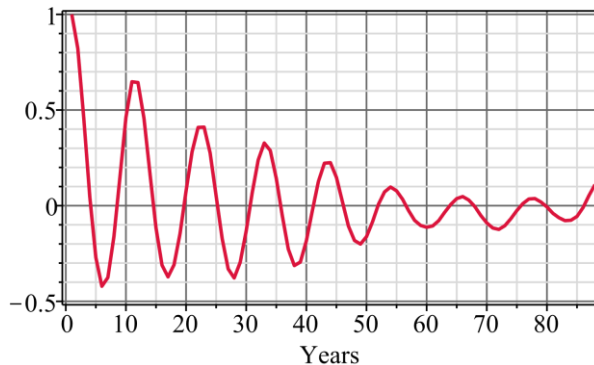


Рис. 12.8 – Частина автокореляційної функції даних спостережень з Рис. 12.7.

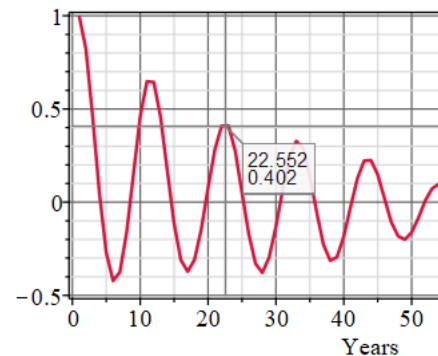


Рис. 12.9 – Трекер значень, підключений у контекстному меню графіка.

З графіку на Рис. 12.8 чітко виникає циклічність сонячних плям з періодом приблизно в 11 років, причому спостерігається принаймні 7 максимумів протягом 80 років спостереження. Середній період (приблизно 11 років) можна визначити за допомогою трекера (Рис. 12.9), визначаючи відстані між послідовними максимумами на автокореляційній функції Рис. 12.7. Запишемо ці відстані у вигляді переліку:

```
> distances:=[11.57, (22.552-11.57), (33.22-22.55),
  (43.55-33.22), (54.11-43.55), (65.84-54.11)];
  distances := [11.570,10.980,10.670,10.330,10.560,11.730] (12.3)
```

Далі визначимо статистичні параметри набору (12.3):

```
> T1:=Statistics[Mean] (distances);
  # Середнє значення періоду Швабе (в роках)
std1:=sqrt(Statistics[Variance] (distances));
  # Стандартне відхилення результатів від середнього
accuracy:=std1*100/T1;
  # Точність визначення періоду Швабе (у відсотках)
  T1 := 10.973
  std1 := 0.560
  accuracy := 5.104 (12.4)
```

Визначимо також середню величину нормованої амплітуди періодичних коливань – усередненням половинних амплітуд перших восьми екстремумів, відслідкованих за допомогою трекера (Рис. 12.9), тобто, попередньо встановивши відповідну опцію, наводимо курсор на конкретний максимум і дивимося значення:

```
> A_m:=(1+0.417+0.542+0.358+0.402+0.368+0.314+0.31)/16;
  A_m := 0.232
```

Далі знаходимо амплітуду випадкової складової та коефіцієнт відношення амплітуд:

```
> A_p:=1-A_m; K:=A_m/A_p;
  A_p := 0.768
  K := 0.302
```

Згідно оцінкам, зробленим за корелограмою на Рис. 12.8, коливальний процес Швабе робить помітний внесок у процес сонячної активності (понад 20%) і має період близький до 11 років. Стабільність циклу Швабе визначається часовою затримкою (в роках), протягом якої амплітуда коливань зменшується до 10% від початкової. Згідно з даними Рис. 12.8, така затримка складає приблизно 50-55 років, тобто впевнено виявляються як мінімум 5 повних послідовних циклів Швабе.

12.1.4 Команда FindPeakPoints з пакету SignalProcessing

Для порівняння отриманих результатів скористаємося командою **FindPeakPoints**, яка дозволяє знаходити точки піків та спадів одновимірних наборів даних. Цю корисну команду було додано у програмний пакет **SignalProcessing** у 2019 році.

```
> fp:= FindPeakPoints(Years, WolfNumbers, output=record,
includeendpoints=false, plotincludepoints=[peaks, valleys],
curveplotoptions=[thickness=1, connect=true, color=grey],
peakpointplotoptions=[symbolsize=9, color=red],
valleypointplotoptions=[symbolsize=6, color=blue],
labels=["Years", "Wolf Numbers"], caption="Рис. 9 - Дані сонячних
плям.\n Команда FindPeakPoints.", tickmarks=[12, 8],
view=[1700..2013, 0..200], size=[2*hor, ver], plotopt):
```

Побудуємо графік даних сонячних плям із визначення пікових значень.

```
> fp[plot];
```

На Рис. 12.10 можна бачити достатньо велику кількість помилкових піків. Відфільтруємо їх, задавши в опціях команди мінімальне значення *minimumprominence* = 25. Ця опція дозволяє вказати найменшу припустиму помітність для фільтрації піків/впадин, за замовчуванням її значення дорівнює 0.

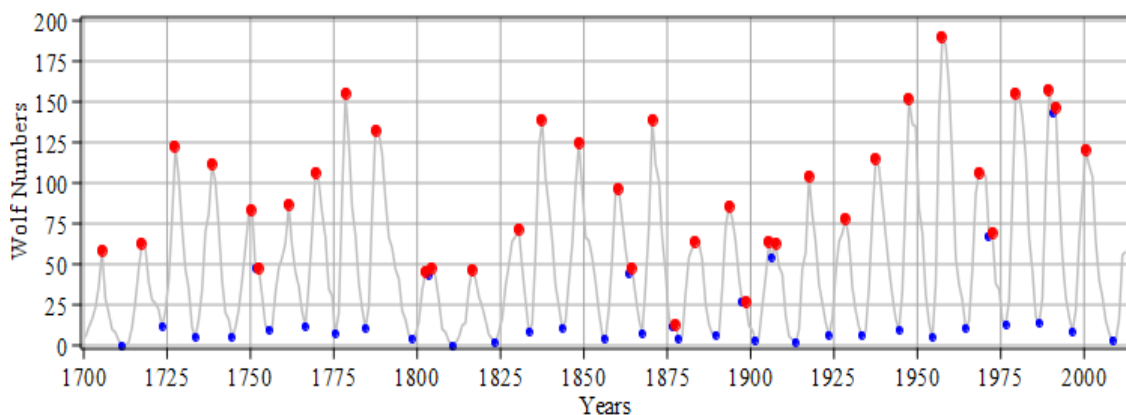


Рис. 12.10 – Дані сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р.
Команда **SignalProcessing[FindPeakPoints]**.

На графіку залишимо тільки ті точки, що відповідають піковим значенням, для цього задамо точність *tolerance* = 15 для відповідної фільтрації (Рис. 12.11):

```
> fp_filt:=FindPeakPoints(Years, WolfNumbers, output=record,
includeendpoints=false, minimumprominence=25,
plotincludepoints=[peaks], curveplotoptions=[thickness=1,
connect=true, color=grey], peakpointplotoptions=[symbolsize=9,
color=red], labels=["Years", "Wolf Numbers"], caption="Рис. 10 -
Дані сонячних плям.\n Найменша припустима помітність
minimumprominence=25.", tickmarks=[12, 8], view=[1700..2013,
0..200], size=[2*hor, ver], plotopt): fp_filt[plot];
```

Виведемо пікові значення:

```
> sp:=fp_filt[peaks][() .. (), 1];
```

```
sp :=
[ 1705.5000
  1750.5000
  1761.5000
  1769.5000
  ⋮
  28 element Vector[column]
```

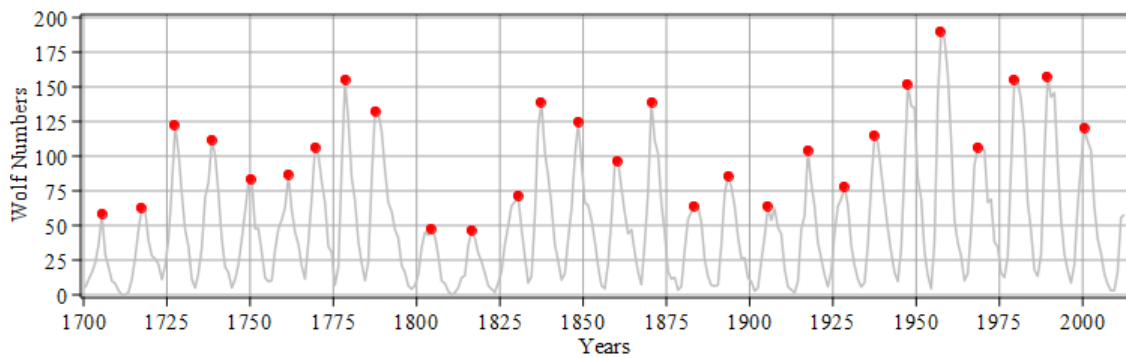


Рис. 12.11 – Дані сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р.
Найменша припустима помітність $minimumprominence = 25$.

Тепер визначимо період за допомогою команди **SignalProcessing[Mean]**, яка, доречі, відрізняється за синтаксисом від команди **Statistics[Mean]** в (12.4), але за своєю суттю є такою ж самою і на результат розрахунку не вплине. Також визначимо стандартне відхилення і точність:

```
> Solar_Circle:=SignalProcessing[Mean](sp[2..()]-sp[()..-2]);
# Середнє значення періоду Швабе (в роках), визначених за командою
FindPeakPoints
std_sc:=sqrt(Statistics[Variance](sp[2..()]-sp[()..-2]));
# Стандартне відхилення результату від середнього
accuracy_sc:=std_sc*100/Solar_Circle;
# Точність визначення періоду Швабе (у відсотках) командою FindPeakPoints
Solar_Circle := 10.9259
std_sc := 1.9400
accuracy_sc := 17.7558
```

(12.5)

Дещо незвичайно виглядає точність визначення середнього значення за набором у 35 піків у порівнянні з (12.4): лише 17.8%. Однак, потрібно зважати на об'єм набору: у (12.3) набір складається лише з 6-ти значень, тоді як в (12.5) розрахунок здійснюється за 35-ма значеннями, розкид яких складає 1.94 року на протиставлення з $std1 = 0.56$ року.

Порівняємо результати розрахунків майже «вручну» (12.4) та результат, отриманий за допомогою спеціальної команди **FindPeakPoints** (12.5):

```
> ['T1'=T1, 'Solar_Circle'=Solar_Circle];
T_2methods:=Statistics[Mean]([T1, Solar_Circle]);
# Середнє значення періодів Швабе (в роках), визначених за двома різними методами
std_2methods:=sqrt(Statistics[Variance]([T1, Solar_Circle]));
# Стандартне відхилення результатів від середнього
accuracy_2methods:=std_2methods*100/T_2methods;
# Точність визначення періоду Швабе (у відсотках)
[T1 = 10.9733, Solar_Circle = 10.9259]
T_2methods := 10.9496
std_2methods := 0.0335
accuracy_2methods := 0.3061
```

Результат співпадає з точністю до сотих, яка складає 0.3%.

12.1.5 Спектральний аналіз ряду чисел Вольфа

Тепер обчислимо дискретне швидке ПФ від даних спостережень за числами Вольфа за перших $2^8 = 256$ років спостережень за методом [150]. Особливість ШПФ, зокрема полягає у тому, що довжина масиву, який перетворюється, повинна дорівнювати цілому ступеню двійки. Для визначення ступеня двійки для відповідної кількості спостережуваних даних необхідно просто відшукати логарифм за основою 2 від числа:

```
> log[2](313.);
```

8.290

Округлюємо до найменшого і розраховуємо ШПФ за 256 років:

```
> fSunspots:=FFT(WolfNumbers[1 .. 2^8]);
# Швидке ПФ для підмасиву з перших 256 чисел Вольфа
```

```
fSunspots := [ 716.506 + 0.I, -8.009 - 13.392 I, -24.818 - 15.786 I,
41.296 + 104.742 I, -27.420 - 30.337 I, -52.208 + 88.856 I, 25.191
+ 39.691 I, ..., ... 249 Array entries not shown ]
```

(12.6)

Знайдемо амплітудну характеристику отриманого Фур'є-образу (12.6):

```
> mSunspots:=Magnitude(fSunspots) ;
# Коефіцієнти (амплітуди) Фур'є
mSunspots := [ 716.506, 15.604, 29.413, 112.589, 40.893, 103.058, 47.010,
..., ... 249 Array entries not shown ]
```

(12.7)

Зобразимо (12.7) в частотному домені у вигляді послідовності (переліку), елементами якого є двокomпонентні переліки типу [частота, амплітуда]:

```
> samplingRate:=1:
SS_FD:=[seq([i*samplingRate/2.^8, mSunspots[i]],
i=1..(1/2)*numelems(mSunspots))];
whattype(SS_FD);
SS_FD := [[0.004, 716.506], [0.008, 15.604], [0.012, 29.413], [0.016, 112.589], ...
[0.473, 11.960], [0.477, 8.922], [0.480, 1.652], [0.484, 8.820], [0.488,
8.189], [0.492, 2.487], [0.496, 8.791], [0.500, 12.063]]
list
```

(12.8)

Візуалізуємо Фур'є-образ сигналу (12.8) в частотному домені, при цьому частоти виразимо в 1/рік:

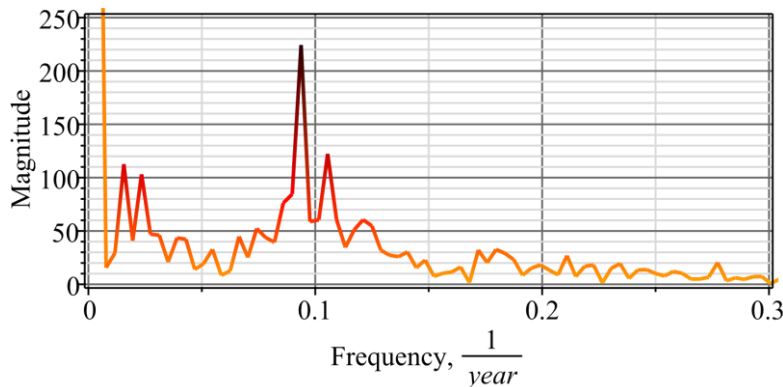


Рис. 12.12 – Фур'є-спектр масиву даних сонячних плям.

Головний максимум амплітуди Фур'є припадає приблизно на частоту $f \approx 0.0936$. Більш точне значення частоти можна отримати з аналізу компонентів переліку (12.8). Максимум припадає на частоту $f = \left(\frac{3}{32} \pm \frac{1}{256}\right)$, точність визначається квантом дискретизації інтервалу у 256 років, який дорівнює одному рокові, тобто складає приблизно 4%.

Отже, середній період складатиме:

```
> T2:=evalf(32/3) *years; std2:=(32/(3*256)) *T2;
T2 := 10.667years
std2 := 0.444years
```

(12.9)

Отриманий таким способом період $T2 = 10.67 \pm 0.44$ добре узгоджується (різниця складає менше 3%) з періодом, отриманим у (12.4): $T1 = 10.97 \pm 0.56$ років. Отже, результати спектрального аналізу набору даних спостережень за кількістю сонячних плям також дозволяють доволі точно визначити період циклу Швабе, який складає приблизно 11 років (див. Табл. 12.1). Відносна точність визначення періоду Швабе приблизно однакова в обох розглянутих методах і складає декілька відсотків: (4-6)%.

Одинадцятирічний цикл Швабе є найбільш коротким основним періодом сонячної активності з усіх відомих періодів.

12.2 ФІЛЬТРАЦІЯ МАСИВУ ДАНИХ СОНЯЧНИХ ПЛЯМ

Як вам вже відомо з п. 12.1.5, для здійснення ШПФ довжина масиву, який перетворюються, повинна дорівнювати цілому ступеню двійки. В (12.6) вже є результат здійснення дискретного ШПФ, а в (12.7) можна бачити амплітудно-частотну характеристику Фур'є-образу. Частотний домен для амплітудно-частотної характеристики уведено в (12.8).

Визначимо статистичні параметри масиву амплітуд (12.7) та універсальний **шумовий поріг** (див. п. 11.2.1) для цього масиву:

```
> tb2:=Statistics[DataSummary](mSunspots);
```

$$tb2 := \begin{bmatrix} \text{mean} = 23.2623 \\ \text{standarddeviation} = 52.1874 \\ \text{skewness} = 9.7784 \\ \text{kurtosis} = 124.0906 \\ \text{minimum} = 0.3657 \\ \text{maximum} = 716.5062 \\ \text{cumulativeweight} = 256.0000 \end{bmatrix}$$

```
> lhs(tb2[2]):
```

$$\text{'threshold} = \% * \sqrt{2 * \ln((1/2) * \text{numelems}(m\text{Sunspots}))} \text{'}$$

```
threshold:=evalf(rhs(tb2[2])*
```

$$\sqrt{2 * \ln((1/40) * \text{numelems}(m\text{Sunspots}))});$$

$$\text{threshold} := 100.5553 \quad (12.10)$$

У виразі для шумового порога (12.10) множник (1/40) підібраний вже після побудови графіка на Рис. 12.13. Величина цього множника впливає на кількість пікових значень, які будуть відфільтровані.

Проведемо **трешолдінг** (очищення сигналу від шумів за допомогою вейвлетів) Фур'є-спектру масиву даних спостережень кількості сонячних плям, користуючись порогом (12.10):

```
> data_filtered:=map(proc (data) options operator, arrow;
```

$$\text{data} * \text{Heaviside}(\text{abs}(\text{data}) - \text{threshold}) \text{ end proc, fSunspots):}$$

$$\text{data_filtered:=convert(data_filtered, Array, datatype=complex[8]):}$$

$$\# \text{ Фільтрований спектр даних сонячних плям}$$

```
> mdata_f:=Magnitude(data_filtered): numelems(%);
```

$$\# \text{ Амплітуди спектру Фур'є фільтрованого даних сонячних плям}$$

$$256$$

```
> samplingRate:=1:
```

$$\text{DSfs}:=[\text{seq}([i * \text{samplingRate} / 2^8, \text{mdata_f}[i]],$$

$$i=1..(1/2) * \text{numelems}(\text{mdata_f}))]: \text{ numelems}(\%);$$

$$\# \text{ Частотний домен фільтрованого спектру даних сонячних плям}$$

$$128$$

Побудуємо графік фільтрованого спектру даних (Рис. 12.13) та порівняємо його з первинним на Рис. 12.12:

```
> plots[listplot](DSfs, labels=[typeset("Frequency, ", 1/year),
```

$$\text{"Magnitude"}], \text{thickness}=1, \text{color}=\text{"Blue"}, \text{caption}=\text{typeset}(\text{"Рис. 12}$$

$$\text{ - Фільтрований Фур'є-спектр масиву даних сонячних плям."}),$$

$$\text{view}=[0..0.5, 0..250], \text{plotopt}, \text{size}=[5/4 * \text{hor}, \text{ver}-20]):$$

$$\text{filt}:=\%;$$

```
> plots[display](filt, orig, caption=typeset("Рис. 13 - Фур'є-спектр
```

$$\text{початкового (red) та фільтрованого масивів даних (blue)."}),$$

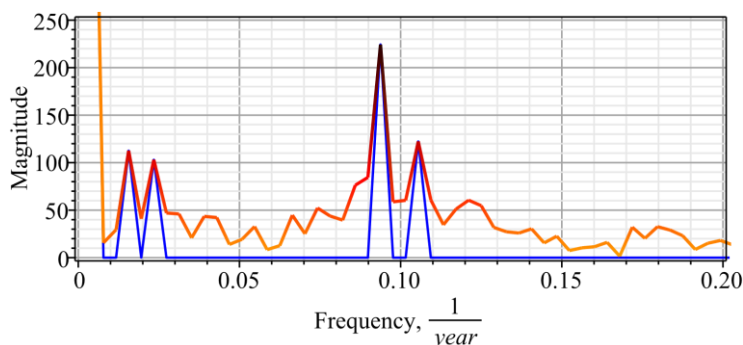
$$\text{plotopt}, \text{size}=[5/4 * \text{hor}, \text{ver}-20]);$$


Рис. 12.13 – Фур'є-спектр початкового (Рис. 12.12) та фільтрованого масивів даних кількості сонячних плям (blue).

Скористаємося командою **FindPeakPoints** з п. 12.1.4 для визначення пікових значень і виведемо графік з результатами:

```
> peak_val:=SignalProcessing[FindPeakPoints](DSfs,
includeendpoints=false, output=record, labels=[typeset("Frequency",
", 1/year), "Magnitude"], caption=typeset("Рис. 14 – Фільтрований
Фур'є-спектр з позначенням піків."), view=[0..0.5, 0..250],
plotopt, size=[5/4*hor, ver-20]): peak_val[plot];
```

Координати 4-ох піків з Рис. 12.14 є такими:

```
> p:=peak_val[peaks];
```

$$p := \begin{bmatrix} 0.0156 & 112.5885 \\ 0.0234 & 103.0585 \\ 0.0938 & 224.3251 \\ 0.1055 & 122.3210 \end{bmatrix}$$

(12.11)

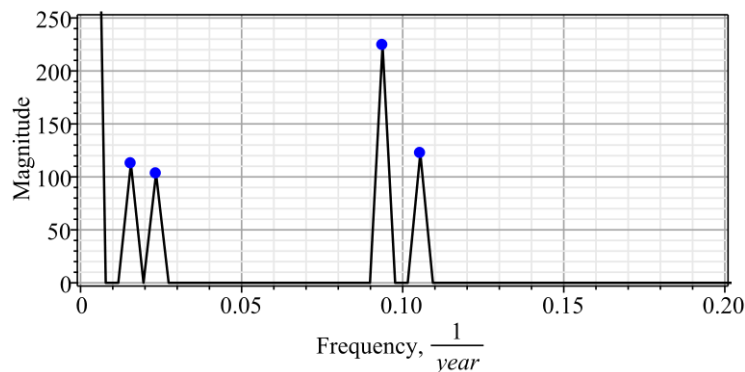


Рис. 12.14 – Фільтрований Фур'є-спектр даних спостережень сонячних плям з позначенням піків.

Визначимо відповідні в (12.11) частотам – періоди:

```
> periods:=[p1=1/p[1,1], p2=1/p[2,1], p3=1/p[3,1], p4=1/p[4,1]];
[p1 = 64.0000, p2 = 42.6667, p3 = 10.6667, p4 = 9.4815]
```

Третє пікове значення відповідає 11-річному періоду Швабе, є цілком задовільним і практично співпадає з результатом, отриманим в (12.9):

```
> `T2-p3`=(T2-rhs(periods[3]))*Units[Unit](`yr`);
`T2-p3`=convert(3.3333*10^(-9), `units`, `yr`,
`s`)*Units[Unit](`s`);
```

$$T2-p3 = 3.3333 \times 10^{-9} \text{ yr}$$

$$T2-p3 = 0.1052 \text{ s}$$

Порівняємо результати розрахунків періоду Швабе за різними методами, а саме: аналіз автокореляційної функції даних спостережень, спектральний аналіз та трешолдінгу даних (Табл. 12.1). Також додамо в таблицю результат розрахунків періоду Швабе вбудованою у Maple 2021 командою **FindPeakPoints** з програмного пакету **SignalProcessing**.

Табл. 12.1

Результати визначення періоду Швабе за 4-ма методами.				
Статистичний параметр	Автокореляційна функція (12.4)	Спектральний аналіз (12.9)	FindPeakPoint (12.5)	Фільтровані дані
Середнє значення	10.97	10.67	10.93	10.67
Стандартне відхилення	0.56	0.44	1.94	–
Точність (відносна похибка)	5 %	4 %	18 %	–

З результатів проміжних обчислень по п. 12.1.3-12.1.5 та п. 12.2 можна бачити, що дослідження автокореляційної функції, спектральний аналіз та трешолдінг дозволяють виявляти також й довгоперіодичні коливання.

12.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. Що дозволяє прослідкувати корелограма?
2. Поясніть термін «Hemisferic Sunspot Number».
3. Яка вимога висувається до довжини масиву для здійснення ШПФ? Як її визначити?
4. Поясніть процедуру здійснення перетворення Фур'є.
5. В чому полягає суть метода трешолдінгу?

♦ 1.2 Maple

1. Яка команда в Maple здійснює обчислення АКФ?
2. Якими способами можна побудувати в Maple корелограму?
3. Як використовувати трекер для графіків у Maple?
4. Як здійснити перетворення Фур'є набору даних у Maple.
5. Яка команда і з якого пакету дозволяє визначати пікові значення наборів даних?

12.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. За даними з джерела за посиланням [153] здійсніть розрахунки характеристик спостережень за індивідуальним завданням з Табл. 12.2. Методика завантаження даних з .txt-файлів у Excel і потім до Maple описана в [☞ Практика 2](#).
2. Обчислення супроводжуйте поясненнями та висновками з графіків і розрахунків.
3. Порівняйте результати досліджень сонячної активності з результатами у методичних рекомендаціях.
4. Наведіть приклади часових рядів у вигляді таблиці у кількості не менше 100 рядків. Побудуйте графіки. Додайте посилання на джерело.
5. Зробіть висновки.

Табл. 12.2

Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 3.

Параметр	Назва	набору даних	спостережень	
Номери варіантів	1	2	3	4
Total Sunspot Number	Daily all time	Monthly all time	13-month all time	Yearly all time
Номери варіантів	5	6	7	8
Hemisferic Sunspot Number	Daily all time	Monthly all time	13-month all time	Daily last 50 years
Номери варіантів	9	10	11	12
Total Sunspot Number	Daily last 100 years	Monthly last 100 years	13-month last 100 years	Yearly last 100 years
Номери варіантів	13	14	15	16
Hemisferic Sunspot Number	Daily last 100 years	Monthly last 100 years	13-month last 100 years	13-month last 200 years

АНАЛОГОВІ ЧАСТОТНІ ФІЛЬТРИ ТА ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ

- 1  Аналогові частотні фільтри 1-го порядку.
- 2  Фільтри 2-го та вищих порядків.
- 3  Фільтри спеціальних типів.

13.1 АНАЛОГОВІ ЧАСТОТНІ ФІЛЬТРИ 1-ГО ПОРЯДКУ

Фільтри використовуються у джерелах живлення для фільтрації сигналів, в якості коректуючих ланцюгів в системах управління і таке інше [155]. Як вже зазначалось у п. 5.2, аналогові фільтри ділять на два класи [98], [156]:

1. пасивні – складаються тільки з пасивних компонентів, таких як резистори, конденсатори, котушки індуктивності;
2. активні – відрізняються від пасивних наявністю підсилюючого елемента, зазвичай операційного підсилювача.

Якщо у фільтрі наявний **один** реактивний елемент (ємність C або індуктивність L), то такий фільтр називається фільтром **першого порядку**, якщо **два** – фільтром **другого порядку** і так далі.

13.1.1 Фільтр нижніх частот

Найбільш розповсюдженим пасивним фільтром 1-го порядку є *інтегруюче RC-коло*, яке входить до складу інтегратора, який в свою чергу може розглядатися як активний фільтр НЧ 1-го порядку. Цей фільтр в техніці електроживлення називається Г-подібним, в аудіотехніці – **фільтром нижніх частот** (ФНЧ, *low-pass filter*), в техніці управління – коректуючою або інтегруючою ланкою.

Основними характеристиками фільтру є АЧХ та ФЧХ (див. п. 4.2). Наприклад, для інтегруючого кола на Рис. 13.1 вони описуються виразами:

> `'K(f)=20*log(1/sqrt(1+(2*Pi*R*C)^2))'; # АЧХ`

$$K(f) = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2 R^2 C^2 + 1}} \right)$$

> `'phi(f)=arctg(-2*Pi*f*R*C)'; # ФЧХ`

$$\phi(f) = \arctg(-2\pi fRC)$$

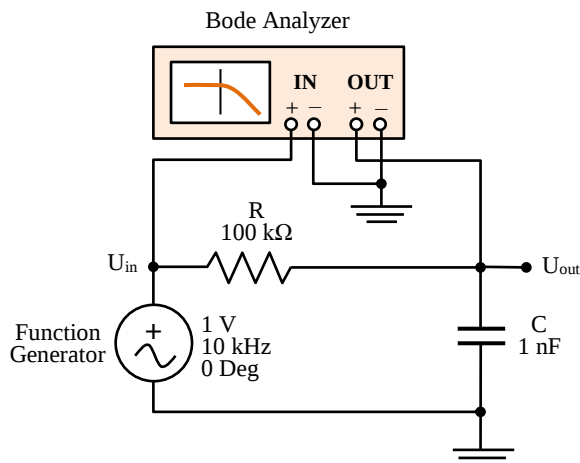


Рис. 13.1 – Схема електрична принципова пасивного НЧ-фільтру 1-го порядку (інтегруюче коло).

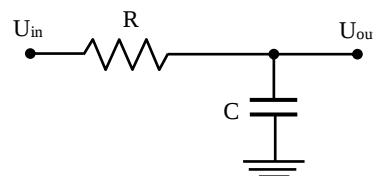


Рис. 13.2 – Схема електрична принципова простого RC-фільтру нижніх частот.

Фільтри на базі RC-кіл мають дуальність: якщо поміняти місцями на Рис. 13.1 або на Рис. 13.2 елементи R та C , то можна отримати **фільтр верхніх частот** (ФВЧ), про який детальніше буде викладено у п. 13.1.2.

Простий електронний ФНЧ 1-го порядку, що на Рис. 13.2, *реалізується* шляхом під'єднання вхідної напруги U_{in} до послідовно з'єднаних резистора R та конденсатора C і з використанням напруги на конденсаторі у якості вихідного сигналу U_{out} .

Зверніть увагу на відмінність у схемах Рис. 13.1 та Рис. 13.2: вона обумовлена особливостями у дизайні та реалізації лінійних аналогових фільтрів. Схема на Рис. 13.1 подана у **топології Саллена-Кі** [157], яка найчастіше використовується для активної реалізації схем. Схема на Рис. 13.2 реалізована у **топології Кауера**, яка є найбільш уживаною для пасивної реалізації [157].

Передавальна функція такого фільтру є відношенням лаплас-образів вихідної напруги до вхідної напруги (див. п. 4.1.2). Вихідна напруга U_{out} (Рис. 13.2) пропорційна реактивному опору (імпедансу) конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{sC}$$

де $s = \sigma + i\omega$ – комплексна лапласівська змінна (див. п. 4.1),

C – ємність конденсатору.

Вхідна напруга U_{in} є сумою напруг на резисторі та конденсаторі, отже пропорційна сумі їх імпедансів:

$$R + X_C = R + \frac{1}{sC}$$

```
> restart:
with(DynamicSystems):
> interface(displayprecision=5, rtablesize=5):
plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:
plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], gridlines=true,
labelfont=[TIMES, ROMAN, 12], axesfont=[TIMES, ROMAN, 12]:
> hor:=360: ver:=240: # size of plots
```

Отже, комплексну передавальну функцію фільтру нижніх частот можна описати такою функцією:

```
> G1:=simplify((1/(s*C))/(R+1/(s*C)));
```

$$G1 := \frac{1}{CRs + 1}$$

де $\Omega = \frac{1}{CR}$ – характеристична частота фільтру (так звана частота обрізання), яка залежить від його параметрів.

Запишемо комплексну передавальну функцію НЧ фільтру як функцію від частоти обрізання:

```
> G1:=unapply(1/(s/Omega+1), Omega);
```

$$G1 := \Omega \mapsto \frac{1}{\frac{s}{\Omega} + 1} \quad (13.1)$$

Покладемо $\Omega = 1$, тоді передавальну функцію (13.1) можна вважати нормованою. Тоді маємо комплексну передавальну функцію у вигляді:

```
> Gln:=G1(1); # Нормована (Omega=1) комплексна передавальна функція фі-
льтру НЧ
```

$$Gln := \frac{1}{s + 1} \quad (13.2)$$

Нормована передавальна функція фільтру НЧ (13.2) вочевидь має поліном нульового порядку в чисельнику, і поліном 1-го порядку в знаменнику. Отже, не має нулів і має єдиний полюс в точці $s = -1$.

Опишемо **нормований фільтр НЧ** (Рис. 13.2) як динамічну систему користуючись програмним пакетом **DynamicSystems** та відомою з (13.2) комплексною передавальною функцією:

```
> sys_low1:=TransferFunction(1/(s+1)):
PrintSystem(sys_low1);
```

```
Transfer Function
continuous
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(s)]
outputvariable = [yI(s)]
tf1,1 =  $\frac{1}{s + 1}$ 
```

Дослідимо ЛАФЧХ та ФЧХ (логарифмічну амплітудно-фазову частотну характеристику та фазово-частотну характеристику, див. п. 4.2.1) нормованого фільтру, користуючись командою **BodePlot**:

```
> BodePlot(sys_low1, thickness=2, color=blue, hertz=false,
output=horizontalplot, tickmarks=[4,8], caption="Рис. 3 - Bode
plot.", size=[hor, ver], plotopt);
```

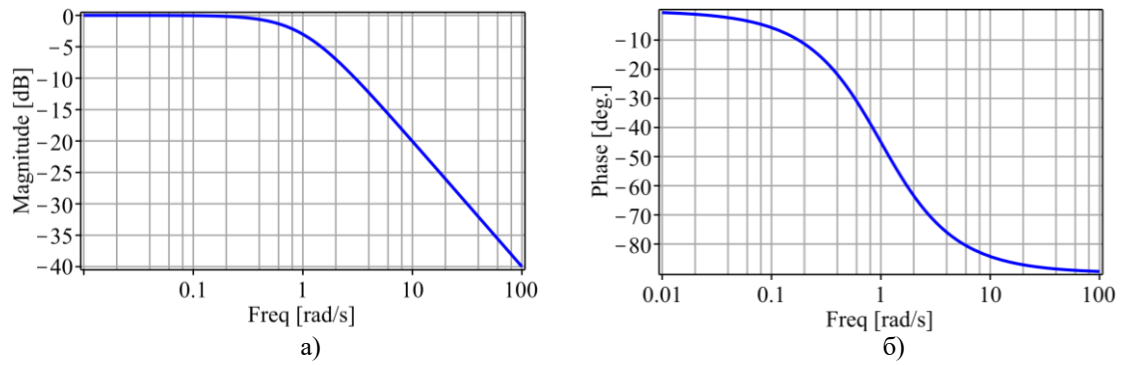


Рис. 13.3 – Графіки Бode для ФНЧ 1-го порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.

Логарифмічний коефіцієнт підсилення фільтру 1-го порядку дорівнює нулю в смузі пропускання (приблизно до частоти обрізання $\Omega = 1$). На частоті обрізання він зменшується на 3 дБ, а далі падає зі швидкістю 20 дБ/декада, як це видно з графіків Бode на Рис. 13.3 а ([85], Рис. 6.2 на стор. 96).

Фазово-частотна характеристика (ФЧХ, графік на Рис. 13.3 б) показує зміну фази вихідної напруги відносно вхідної. Вона зростає від 0 до 45° в смузі пропускання до частоти обрізання фільтру ($\Omega = 1$), а далі з частотою поступово змінюється від 45 до 90° .

Побудуємо тепер АФЧХ, графік якої називають годографом Найквіста або діаграмою Найквіста [158] для простого фільтру НЧ 1-го порядку [159]:

```
> NyquistPlot(sys_low1, labels=[typeset("Freq. ", "(", '\omega', ") [rad/s]"), typeset("Frequency response")], caption="Рис. 4 - Діаграма Найквіста \n фільтру НЧ.", scaling=constrained, thickness=2, color=red, size=[hor, ver+20], plotopt2);
```

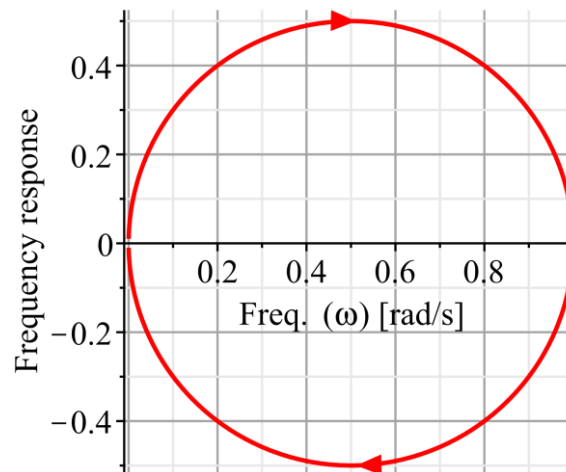


Рис. 13.4 – Діаграма Найквіста ФНЧ 1-го порядку.

Окрім того, визначимо **імпульсну перехідну функцію** фільтру, яка, як відомо з теорії в п. 4.1.2, є оригіналом його комплексної передавальної функції в розумінні перетворення Лапласа. В ЦОС та теорії керування називається **імпульсною характеристикою** (*impulse response*) або функцією імпульсної характеристики (*impulse response function, IRF*) динамічної системи і є відгуком на короткий сигнал, який називається імпульсом ($\delta(t)$).

Побудуємо графіки імпульсної перехідної функції та відгуку НЧ-фільтру на імпульс $\delta(t)$ у вигляді **сходинки Хевісайда**:

```
> ImpulseResponsePlot(sys_low1, thickness=2, color="DarkGreen", labels=[typeset("Freq. ", "(", '\omega', ") [rad/s]"), typeset("IRF, arb. units")], caption="Рис. 5 - Імпульсна перехідна функція фільтру НЧ.", size=[hor-40, ver+20], plotopt2);
> ResponsePlot(sys_low1, Step(1,2), duration=15, thickness=2, color=navy, labels=["t", "y(t)"], caption="Рис. 6 - Відгук фільтру на вхідний імпульс у \n вигляді сходинки Хевісайда.", size=[hor, ver], plotopt);
```

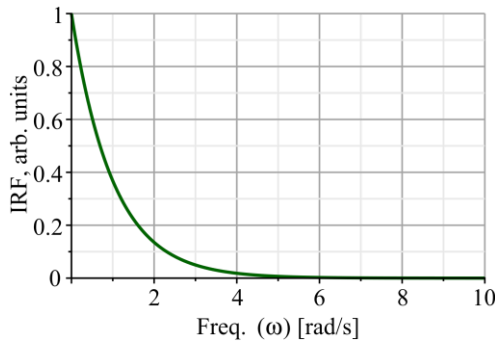


Рис. 13.5 – Імпульсна перехідна функція (IRF) ФНЧ 1-го порядку.

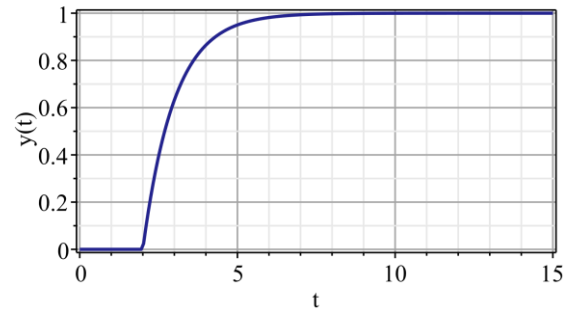


Рис. 13.6 – Відгук ФНЧ 1-го порядку на імпульс $\delta(t)$.

Рис. 13.6 показує **реакцію** (відгук) фільтру НЧ на вхідний сигнал у вигляді сходишки Хевісайда, яка починається в момент часу $t = 2$.

Визначимо реакцію НЧ-фільтру на гармонійні вхідні сигнали (Рис. 13.7).

```
> Omega_1:=Pi/6:
# Циклічна частота менша від частоти обрізання Pi/6<1
ResponsePlot(sys_low1, Sine(1,Omega_1,1,0), duration=50,
thickness=2, color=navy, view=[0..50,-1..1], labels=["t", "y(t)"],
caption=typeset("Рис. 7 - Відгук фільтру на синусоїду з частотою
\n в смузі пропускання: ", `Omega[1]`, "=", `Omega_1`, "."),
size=[hor, ver+20], plotopt);
```

Як видно з Рис. 13.7, гармонійний сигнал з одиничною амплітудою і частотою в смузі пропускання фільтру практично не зменшується за амплітудою на виході фільтру.

```
> Omega_2:=3*Pi/2:
# Циклічна частота більша від частоти обрізання 3Pi/2>1
ResponsePlot(sys_low1, Sine(1, Omega_2, 1, 0), duration=50,
thickness=2, color=navy, view=[0..50,-1..1], labels=["t", "y(t)"],
caption=typeset("Рис. 8 - Відгук фільтру на синусоїду з частотою
\n поза смугою пропускання: ", `Omega[2]`, "=", `Omega_2`, "."),
size=[hor, ver+20], plotopt);
```

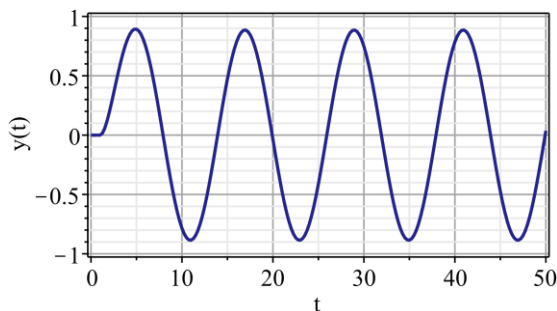


Рис. 13.7 – Відгук ФНЧ 1-го порядку на синусоїду з частотою в смузі пропускання: $\Omega_1 = \frac{1}{6}\pi$.

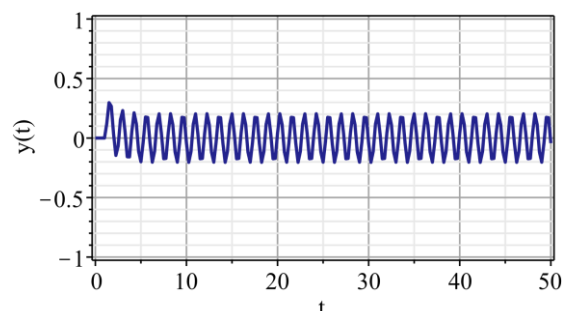


Рис. 13.8 – Відгук ФНЧ 1-го порядку на синусоїду з частотою поза смугою пропускання: $\Omega_2 = \frac{3}{2}\pi$.

З Рис. 13.8 видно, що гармонійний сигнал з одиничною амплітудою і частотою за межами смуги пропускання фільтру помітно зменшується за амплітудою (більше ніж в 4 рази, тобто на 12 децибел) на виході фільтру.

13.1.2 Фільтр верхніх частот

Для створення фільтру ВЧ в схемі на Рис. 13.2 потрібно лише поміняти місцями резистор R та конденсатор C (Рис. 13.9, Рис. 13.10). Тепер вихідна напруга знімається з резистора, а вхідна напруга прикладається до суми імпедансів резистора та конденсатора.

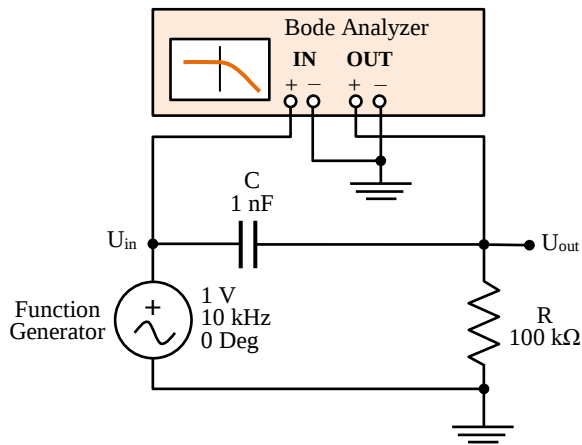


Рис. 13.9 – Схема електрична принципова пасивного ВЧ-фільтру 1-го порядку.

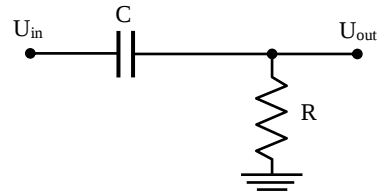


Рис. 13.10 – Схема електрична принципова простого RC-фільтру верхніх частот.

Комплексна передавальна функція для ВЧ-фільтру має такий вигляд:

> G2:=simplify(R/(R+1/(s*C)));

$$G2 := \frac{R s C}{R s C + 1}$$

Запишемо комплексну передавальну функцію ВЧ-фільтру як функцію від частоти обрізання Ω :

> G2:=unapply(s/(Omega*(s/Omega+1)),Omega);

$$G2 := \Omega \mapsto \frac{s}{\Omega \cdot \left(\frac{s}{\Omega} + 1 \right)} \quad (13.3)$$

Як і в (13.2), для нормування комплексної передавальної функції покладемо частоту обрізання $\Omega = 1$, тоді:

> G2n:=G2(1);

Нормована комплексна передавальна функція фільтру ВЧ

$$G2n := \frac{s}{s + 1} \quad (13.4)$$

З виразу (13.4) випливає, що фільтр ВЧ 1-го порядку має один нуль ($s = 0$) та один полюс ($s = -1$).

Побудуємо модель фільтру ВЧ 1-го порядку, користуючись передавальною функцією (13.4) з програмного пакету **DynamicSystems**:

> sys_high1:=TransferFunction(s/(s+1));
PrintSystem(sys_high1);

```
Transfer Function
continuous
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(s)]
outputvariable = [yI(s)]

tf1,1 = s / (s + 1)
```

Побудуємо графіки Бодє (ЛАЧФХ та ФЧХ) нормованого ФВЧ (Рис. 13.11):

> BodePlot(sys_high1, thickness=2, color=blue, hertz=false,
output=horizontalplot, tickmarks=[4,8], caption="Рис. 9 - Bode
plot.", size=[hor, ver], plotopt);

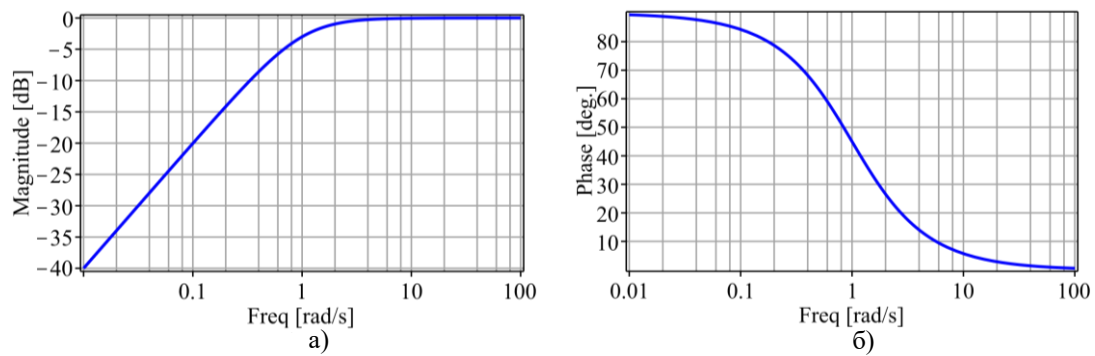


Рис. 13.11 – Графіки Бode для ФВЧ 1-го порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.

Як видно з Рис. 13.11, в смузі пропускання нормованого ФВЧ ($\Omega > 1$) ЛАЧХ має нульове значення (в дБ), а зсув фаз між входом та виходом згідно з ФЧХ наближається до нуля.

13.2 ФІЛЬТРИ 2-ГО ТА ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Класична схема **пасивного фільтру 2-го порядку** наведена на Рис. 13.12: RLC-коло має резонансні властивості, а її АЧХ та ФЧХ описуються виразами:

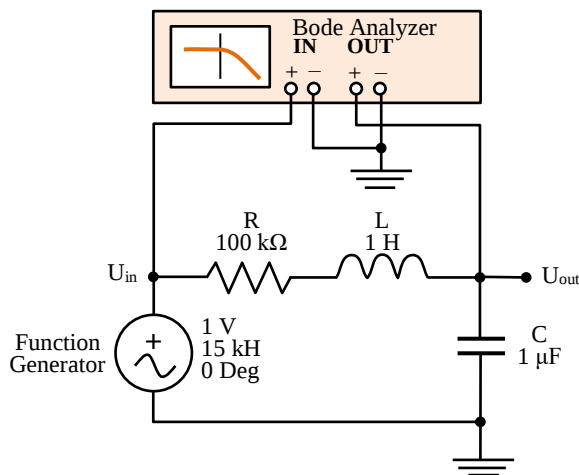


Рис. 13.12 – Схема електрична принципова фільтру нижніх частот 2-го порядку.

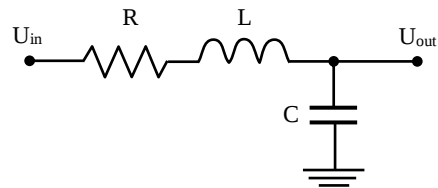


Рис. 13.13 – Схема електрична принципова простого пасивного RLC-фільтру НЧ 2-го порядку.

> 'K(f)=(1/sqrt((2*d*f/F[0])^2+(1+(1+f/F[0])^2)^2))'; # АЧХ

$$K(f) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4d^2 f^2}{F_0^2} + \left(1 + \left(1 + \frac{f}{F_0}\right)^2\right)^2}}$$

> 'phi(f)=arctg(-2*d*(f/F[0]-F[0]/f))'; # ФЧХ

$$\phi(f) = \arctg\left(-2d\left(\frac{f}{F_0} - \frac{F_0}{f}\right)\right)$$

Пасивний фільтр 2-го прядку нижніх частот реалізується ланцюжком з котушки індуктивності L, ємності C та резистору R, як показано на Рис. 13.13.

У виразах для АЧХ та ФЧХ пасивного фільтру 2-го порядку наявні наступні додаткові параметри:

– коефіцієнт згасання:

> 'd=R/2*sqrt(C/L)';

$$d = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

– величина, обернена до коефіцієнта згасання, – добротність:

> 'Q=1/d';

– добротність часто визначається так:

$$Q = \frac{1}{d}$$

$$> 'Q=F/\delta';$$

$$Q = \frac{F}{\delta}$$

– де ширина смуги пропускання за рівнем 0.707 (–3 дБ):

$$> '\delta=R/2*\sqrt{C/L[F]}';$$

$$\delta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L_F}}$$

– резонансна частота:

$$> 'F[0]=1/(2*\pi*\sqrt{L*C})';$$

$$F_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Під час практичної реалізації RLC-фільтрів (особливо нижніх частот) найбільші складнощі виникають у виготовленні котушок індуктивності, їх екранування, а за великих значень індуктивності – з проблемою маси та геометричних розмірів. З появою ОП (операційних підсилювачів) ці проблеми вирішені використанням RC-фільтрів [85]. З'явилися безіндуктивні частотні фільтри.

13.2.1 Фільтр НЧ 2-го порядку

На Рис. 13.14 наведено схему активного ФНЧ 2-го порядку на ОП. Фільтр 2-го порядку має s^2 (другий порядок комплексної частоти) у знаменнику передавальної функції і, відповідно, два полюси в комплексній площині.

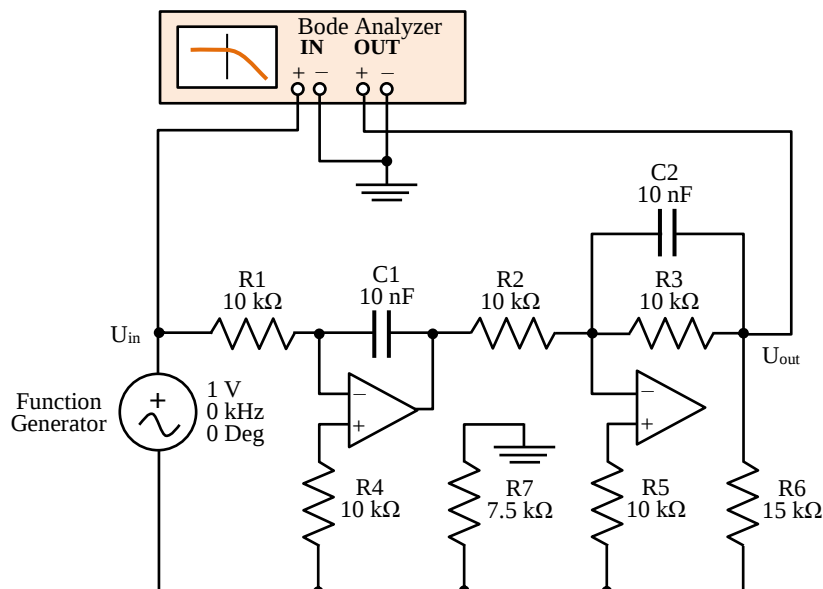


Рис. 13.14 – Схема електрична принципова активного ФНЧ 2-го порядку на операційних підсилювачах.

Одержати таку передавальну функцію можна за допомогою використання індуктивності L та ємності C в пасивній схемі, або ж за допомогою створення активної схеми з резисторів R , конденсаторів C і підсилювачів ОП.

Розглянемо для прикладу пасивний RLC-фільтр на Рис. 13.13. Можна показати, що його комплексна передавальна функція має таку форму:

$$> G2_low:=unapply(simplify(\Omega^2/(s^2+\Omega*s/Q+\Omega^2)), \Omega, Q);$$

$$G2_low := (\Omega, Q) \mapsto \frac{Q \cdot \Omega^2}{(\Omega^2 + s^2) \cdot Q + \Omega \cdot s} \quad (13.5)$$

Параметри схеми на Рис. 13.13 (характерна частота обрізання Ω та добротність Q) визначені такими співвідношеннями:

$$\Omega = \frac{1}{LC}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Полюси виникають при тих значеннях комплексної змінної s , для яких знаменник (13.5) стає нульовим, тобто, за виконання умови:

$$s^2 + \frac{s\Omega}{Q} + \Omega^2 = 0 \quad (13.6)$$

Можна вирішити рівняння (13.6) за умови, що корені квадратичного рівняння даються виразом:

$$\begin{aligned} &> \text{rts} := [\text{solve}(s^2 + \Omega s / Q + \Omega^2, s)]; \\ &\text{rts} := \left[\frac{(-1 + \sqrt{-4Q^2 + 1})\Omega}{2Q}, -\frac{(1 + \sqrt{-4Q^2 + 1})\Omega}{2Q} \right] \end{aligned} \quad (13.7)$$

Якщо добротність Q менша ніж 0.5, обидва корені (13.7) дійсні і лежать на негативній дійсній осі. Властивості фільтру за таких умов дуже подібні властивостям двох RC-фільтрів 1-го порядку, поєднаних у каскаді. Такий випадок не надто цікавий, тому далі розглядатимемо лише випадок, в якому $Q > 0.5$, і який означає, що $1 - 4Q^2 < 0$, а корені (13.7) комплексні і спряжені один одному.

Дійсна частина обох коренів (13.7) однакова і дорівнює $-\frac{\Omega}{2Q}$. Уявні частини коренів є рівними за величиною і протилежними за знаками. Обчислюючи положення обох коренів в комплексній площині, можна знайти, що вони лежать на відстані Ω від початку координат, оскільки добуток двох коренів з одного боку є квадратом їх модуля, а з іншого боку, згідно з відомою теоремою Вієта, дорівнюють вільному члену квадратичного поліному, тобто Ω^2 . Зміна величини Ω змінює дистанцію полюсів від початку координат. Дійсно:

$$> \text{simplify}(\text{rts}[1] * \text{rts}[2]); \quad \Omega^2$$

Таким чином, полюси фільтрів 2-го порядку завжди розташовані на півколі радіусу Ω з центром на початку координат комплексної площини у негативній (відносно дійсної координати σ) половині цієї площини.

Дослідимо фільтр 2-го порядку так само, як вище в п. 13.1 досліджували фільтр 1-го порядку. Нормуємо фільтр, покладаючи $\Omega = 1$, $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\begin{aligned} &> \text{G2_low_n} := \text{simplify}(\text{G2_low}(1, \text{sqrt}(2)/2)); \\ &\text{G2_low_n} := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}s^2 + \sqrt{2}s + 2} \\ &> \text{sys_low2} := \text{TransferFunction}(1/(s^2 + 1 + \text{sqrt}(2)*s)); \\ &\text{PrintSystem}(\text{sys_low2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Transfer Function} \\ &\text{continuous} \\ &1 \text{ output}(s); 1 \text{ input}(s) \\ &\text{inputvariable} = [uI(s)] \\ &\text{outputvariable} = [yI(s)] \\ &\text{tf}_{1,1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \end{aligned}$$

ЛАЧФХ та ФЧХ (графіки Бode) нормованого НЧ-фільтру 2-го порядку:

$$\begin{aligned} &> \text{BodePlot}(\text{sys_low2}, \text{thickness}=2, \text{color}=\text{blue}, \text{hertz}=\text{false}, \\ &\text{output}=\text{horizontalplot}, \text{tickmarks}=[4,8], \text{caption}=\text{"Рис. 13 - Bode plot."}, \text{size}=[\text{hor}, \text{ver}], \text{plotopt}); \end{aligned}$$

Порівнюючи графіки на Рис. 13.15 з відповідними характеристиками фільтру 1-го порядку на Рис. 13.3, помічаємо, що падіння ЛАФЧХ для фільтру 2-го порядку є удвічі крутішим – 40 дБ/декада, а ФЧХ фільтру 2-го порядку змінюється на 90° до частоти обрізання, і ще на 90° поза її межами.

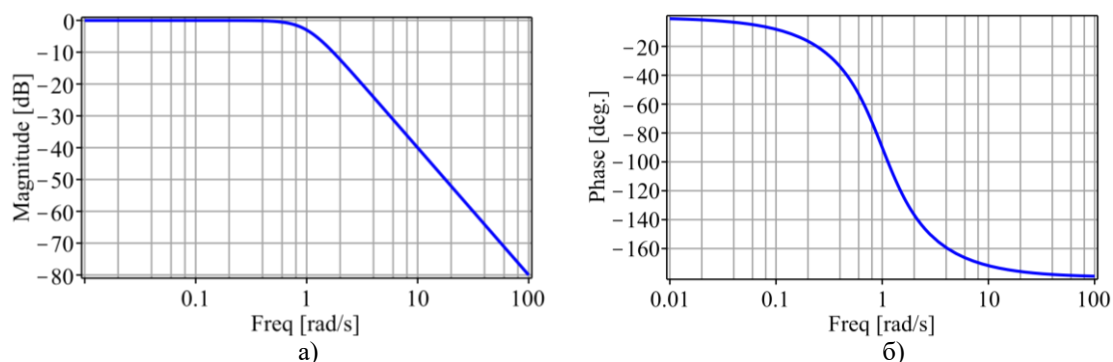


Рис. 13.15 – Графіки Бode для ФНЧ 2-го порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.

Побудуємо годограф Найквіста для аналогового ФНЧ 2-го порядку (Рис. 13.16):

```
> NyquistPlot(sys_low2, thickness=2, labels=[typeset("Freq. ", " (" ,
'omega', ") [rad/s]"), typeset("Frequency response")],
labeldirections=[horizontal, vertical], color=red, caption="Рис.
14 - Діаграма Найквіста фільтру НЧ 2-го порядку.",
scaling=constrained, size=[ver, hor], plotopt2);
```

Завдяки тому, що дійсна негативна частина комплексних координат полюсів є меншою, ніж у фільтрів НЧ 1-го порядку: $\sigma = -\frac{\Omega}{2Q}$ проти $\sigma = -\Omega$, причому $Q > \frac{1}{2}$, – вхідна східчаста функція (функція Хевісайда) викликає довшу релаксацію на виході фільтру.

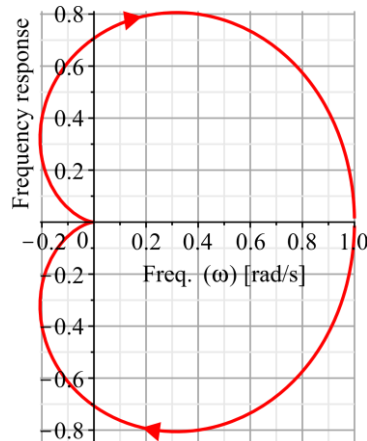


Рис. 13.16 – Діаграма Найквіста фільтру нижніх частот 2-го порядку.

Розглянемо також імпульсну перехідну функцію фільтру нижніх частот 2-го порядку (Рис. 13.17) та порівняємо її з Рис. 13.5 для фільтру 1-го порядку:

```
> ImpulseResponsePlot(sys_low2, thickness=2, color="DarkGreen",
labels=[typeset("Freq. ", " (" , 'omega', ") [rad/s]"),
typeset("IRF, arb. units")], caption="Рис. 15 - Імпульсна перехідна
функція (IRF)\n фільтру НЧ 2-го порядку.", view=[0..10, -
0.1..0.5], size=[hor, ver], plotopt2);
```

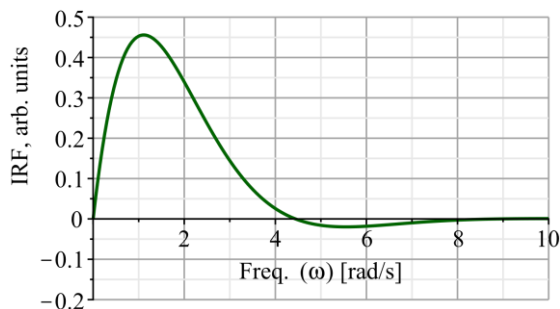


Рис. 13.17 – Імпульсна перехідна функція (IRF) ФНЧ 2-го порядку.

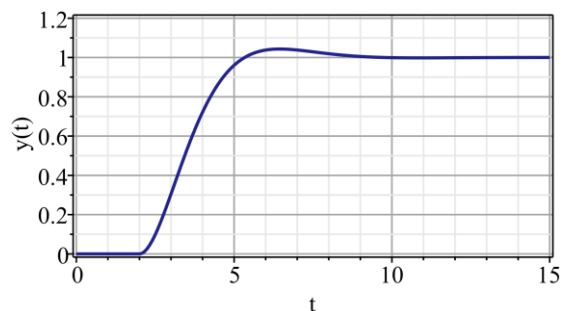


Рис. 13.18 – Відгук ФНЧ 2-го порядку на імпульс $\delta(t)$.

Функція на Рис. 13.17 не має сингулярності в нульовій точці, є всюди обмеженою і показує дещо більшу інерційність фільтрів 2-го порядку. Менші значення добротності Q приводять до швидшої релаксації, оскільки розсіювання стає більшим (порівняйте з Рис. 13.6 для фільтру 1-го порядку).

```
> ResponsePlot(sys_low2, Step(1,2), duration=15, thickness=2,
color=navy, labels=["t", "y(t)"], caption="Рис. 16 - Відгук філь-
тру 2-го порядку на вхід \n у вигляді сходишки Хевісайда.",
view=[0..15, 0..1.2], size=[hor, ver+20], plotopt);
```

Визначимо реакцію фільтру на гармонічні вхідні сигнали (Рис. 13.19):

```
> Omega_1:=Pi/6; # Частота менша від частоти обрізання Pi/6<1
ResponsePlot(sys_low2, Sine(1,Omega_1,1,0), duration=50,
thickness=2, color=navy, view=[0..50,-1..1], labels=["t", "y(t)"],
```

`caption="Рис. 17 - Відгук фільтру 2-го порядку на синусоїду \n з частотою в смузі пропускання.", size=[hor, ver], plotopt);`

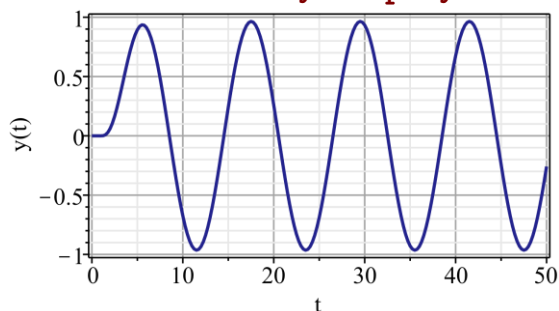


Рис. 13.19 – Відгук ФНЧ 2-го порядку на синусоїду з частотою в смузі пропускання: $\Omega_1 = \frac{1}{6}\pi$.

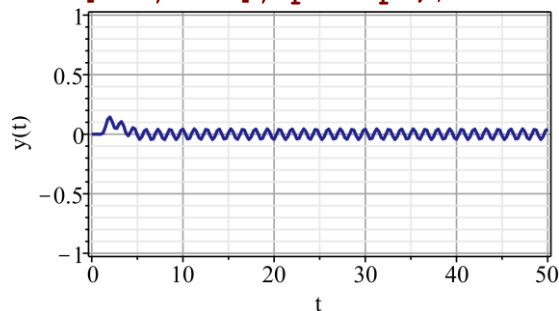


Рис. 13.20 – Відгук ФНЧ 2-го порядку на синусоїду з частотою поза смугою пропускання: $\Omega_2 = \frac{3}{2}\pi$.

З Рис. 13.19 видно, що гармонійний сигнал з одиничною амплітудою частотою в смузі пропускання фільтру практично не зменшується за амплітудою на виході фільтру. Поглянемо, як виглядатиме відгук фільтру:

```
> Omega_2:=3*Pi/2;
# Частота більша від частоти обрізання 3*Pi/2>1
ResponsePlot(sys_low2, Sine(1,Omega_2,1,0), duration=50,
thickness=2, color=navy, view=[0..50,-1..1], labels=["t", "y(t)"],
caption=typeset("Рис. 18 - Відгук фільтру 2-го порядку на синусоїду \n з частотою поза смугою пропускання: ", 'Omega[2]', "=",
'Omega_2', "."), size=[hor, ver+20], plotopt);
```

Як можна бачити з Рис. 13.20, гармонійний сигнал з одиничною амплітудою частотою за межами смуги пропускання фільтру помітно зменшується за амплітудою (більше ніж в 20 разів, тобто на 26 дБ) на виході фільтру. З точки зору придушення частот поза смугою пропускання НЧ-фільтр 2-го порядку значно **ефективніший** за НЧ-фільтр 1-го порядку, як видно з порівняння графіків на Рис. 13.20 та Рис. 13.8.

Фільтр 2-го порядку дозволяє варіювати величинами частоти обрізання Ω та добротності Q , що, в свою чергу, дає можливість розташувати полюси фільтру там, де потрібно проєктанту, у комплексній площині. Ця гнучкість розташування полюсів – потужний інструмент, зумовлюючий корисність елементів 2-го порядку в багатьох складніших фільтрах. Як і у випадку 1-го порядку, передавальна функція фільтрів низької частоти 2-го порядку наближається до нуля, якщо частота прямує до нескінченості. Втім, зменшення передавальних функцій 2-го порядку з частотою удвічі швидше.

13.2.2 Загальні властивості аналогових фільтрів 2-го порядку

Після розгляду фільтрів нижніх частот 1-го та 2-го порядку, можна розширити розуміння цих приладів у двох напрямках:

1. обговорити інші конфігурації фільтрів, такі як, наприклад, фільтри високих частот та смугові фільтри,
2. звернутися до фільтрів вищого порядку.

Резюмуючи властивості фільтрів 2-го порядку, зведемо їх у Табл. 13.1.

Табл. 13.1

Загальні властивості аналогових фільтрів 2-го порядку.

Фільтр 2-го порядку	Комплексна передавальна функція	Нормований графік Бode для ЛАЧХ: $\Omega = 1, Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Нижніх частот (lowpass)	$\frac{\Omega^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega}{Q}\right)s + \Omega^2}$	

Фільтр 2-го порядку	Комплексна передавальна функція	Нормований графік Бode для ЛАЧХ: $\Omega = 1, Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Верхніх частот (highpass)	$\frac{\Omega^2 s^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega}{Q}\right)s + \Omega^2}$	
Смуговий фільтр (bandpass)	$\frac{\Omega^2 s}{s^2 + \left(\frac{\Omega}{Q}\right)s + \Omega^2}$	
Вузькосмуговий симетричний режекторний фільтр (фільтр-корк, або «notch- filter»), затримує вузьку смугу навколо частоти обрі- зання	$\frac{s^2 + \Omega^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega}{Q}\right)s + \Omega^2}$	

13.2.3 Фільтри вищих порядків

Вдалою обставиною є відсутність необхідності детально і окремо розглядати фільтри вищого порядку, через те що будь-який поліном від комплексної змінної s довільного порядку можна розкласти (факторизувати) на послідовні множники 1-го та 2-го порядку.

Для прикладу розглянемо **фільтр нижніх частот 3-го порядку**, який може мати передавальну функцію такого типу. Насправді це передавальна характеристика **фільтру Баттерворта 3-го порядку** [160] та [161], який детальніше розглянемо у п. 13.3.1:

```
> restart;
> interface(displayprecision=3, rtablesize=7):
  plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
    ROMAN, 12], gridlines, axes=boxed:
  plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], gridlines,
    labelfont=[TIMES, ROMAN, 12], axesfont=[TIMES, ROMAN, 12]:
> hor:=360: ver:=240: # size of plots
> G_3B:=1/(s^3+2*s^2+2*s+1);
```

$$G_{3B} := \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (13.8)$$

Можна факторизувати кубічний поліном у знаменнику функції (13.8):

```
> G_3B:=factor(G_3B);
```

$$G_{3B} := \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \quad (13.9)$$

З виразу (13.9) видно, що фільтр з передавальною функцією вигляду (13.9) фактично є **послідовним каскадом** двох фільтрів:

1. фільтру 1-го порядку з передавальною функцією $G_1 = \frac{1}{s+1}$ і одним дійсним полюсом,
2. фільтру 2-го порядку з передавальною функцією $G_2 = \frac{1}{s^2+s+1}$ і двома комплексно-спряженими полюсами.

Причина каскадності обумовлена тим, що при послідовному з'єднанні передавальні функції елементів (ланок) перемножуються, тоді як при паралельному з'єднанні елементів (ланок) їх передавальні функції сумуються.

Зобразимо розташування полюсів на комплексній площині для фільтру НЧ 3-го порядку з передавальною функцією (13.9) у 2D та 3D виглядах (Рис. 13.21):

```
> gain:=20*log10(abs(evalc(subs(s=sigma+I*omega, G_3B)))):
# ЛАФЧХ фільтру з передавальною функцією (13.9)
plots[contourplot](gain, sigma=-2..0, omega=-1.5..1.5,
thickness=1, contours=[0,3,6,9,12,15,18,21,24],
filledregions=true, coloring=["White", "DarkViolet"],
color="Indigo", transparency=0.3, grid=[150,150], caption="Рис. 19
- Лінії рівного підсилення та полюси передавальної функції філь-
тру\n3-го порядку.", size=[ver+20, hor+60], plotopt, axes=normal);
> plots[contourplot3d](gain, sigma=-4..0, omega=-2.5..2.5,
thickness=0, contours=[0,3,6,9,12,15,18,21,24],
filledregions=true, coloring=["BlueViolet", "DarkViolet"],
color="DarkOrchid", transparency=0.1, grid=[150,150],
orientation=[-160, 75, 0], light=[270, 200, 1, 1, 1], view=[-
1.6..0, -1.5..1.5, 0..30], size=[hor+100, ver+100]);
```

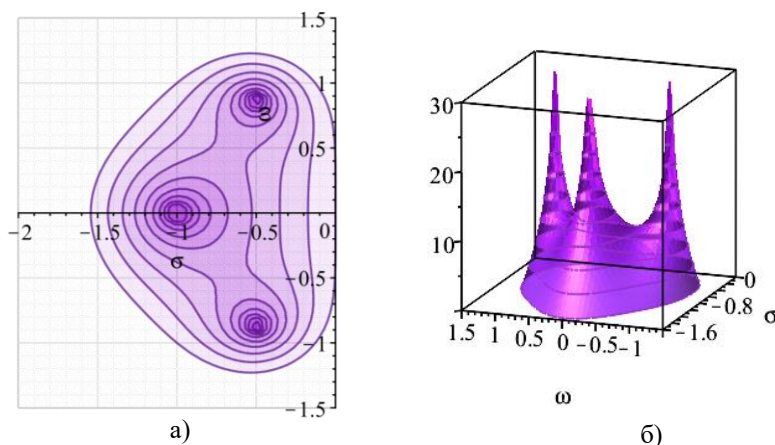


Рис. 13.21 – Лінії рівного підсилення та полюси передавальної функції ФНЧ 3-го порядку: а) 2D; б) 3D.

На Рис. 13.21 а бачимо розташування полюсів фільтра НЧ 3-го порядку на комплексній площині (σ, ω) для ФНЧ 3-го порядку, по суті, для фільтру Баттерворта 3-го порядку (див. п. 13.3.1). З графіку видно, що один з трьох полюсів розташований на дійсній осі в точці $(-1, 0)$ два інших є комплексно-спряженими, і розташованими в точках $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ комплексної площини. Така факторизація спрощує **проектування** фільтрів, полегшуючи виразне уявлення структури та розташування їх полюсів, а також, можливо, нулів чисельнику на комплексній площині.

Вже з'ясовано, що **кожний фактор (поліном)** 2-го порядку породжує одну комплексно-спряжену пару полюса, а фактор 1-го порядку створює один полюс на негативній половині дійсної осі. Якщо передавальна функція має вищий порядок, поліноми в чисельнику та знаменнику завжди можна розкласти на множники 1-го та 2-го порядків. Таким чином:

Будь-який фільтр можна реалізувати послідовно-паралельним з'єднанням ланок 1-го та 2-го порядків.

Використання принципів синтезу фільтрів, описаних вище, дозволяє спроектувати велику кількість різноманітних фільтрів, просто розміщуючи відповідним чином полюси та нулі передавальних функцій у різних місцях комплексної площини. Наприклад, **режекторний фільтр** ([85], стор. 93 та 176, і більш детально [162]) – його ще називають фільтром-корком, або, англійською, «*notch-filter*», – повинен затримувати певну смугу частот, що можна реалізувати за допомогою двох фільтрів, включених паралельно:

- низькочастотного (ФНЧ),
- високочастотного (ФВЧ).

Такий фільтр не пропускати смугу частот, яка лежить поміж частотами обрізання ФНЧ та ФВЧ. Передавальна функція такого смугово-режекторного фільтру буде сумою передавальних функцій ФНЧ та ФВЧ (див. Табл. 13.1), які були розглянуті вище.

13.3 ФІЛЬТРИ СПЕЦІАЛЬНИХ ТИПІВ

13.3.1 Фільтри Баттерворта

Різновид фільтрів, придатних для багатьох застосувань, відрізняється від ЛАЧХ, яка максимально пласка у смузі пропускання, але спадає поза нею максимально різко. Таку ЛАЧХ можна отримати, розташовуючи полюси ФНЧ рівномірно на напівколі радіуса Ω у негативній половині комплексної площини (σ, ω) . Результатом буде фільтр Баттерворта (*Butterworth* – англійський інженер, який першим запропонував таке рішення) [160]-[161], [163]. Розглянемо далі властивості фільтрів Баттерворта, використовуючи програмний пакет **DynamicSystems**:

```
> restart:
with(DynamicSystems):

> interface(displayprecision=3, rtablesize=7):
plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:
plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], gridlines=true,
labelfont=[TIMES, ROMAN, 12], axesfont=[TIMES, ROMAN, 12]:

> hor:=360: ver:=240:
# hor:=380: ver:=hor/(1/2 + sqrt(5.)/2):
# "golden" size for plots
```

Опишемо фільтр НЧ Баттерворта 3-го порядку, розглянутий вище (див. п. 0), як системний об'єкт через його передавальну функцію (13.9) і вивчимо його головні характеристики:

```
> BF3:=TransferFunction(1/((s+1)*(s^2+s+1))):
PrintSystem(BF3);
```

Transfer Function

continuous

1 output(s); 1 input(s)

inputvariable = [uI(s)]

outputvariable = [yI(s)]

$$tf_{1,1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Системний об'єкт (BF3 – фільтр Баттерворта третього порядку) є неперервним (аналоговим), має один вхід та один вихід, і комплексну передавальну функцію 3-го порядку від лапласівської комплексної змінної s .

Загалом, фільтри Баттерворта описуються передавальними функціями, які побудовані з так званих поліномів Баттерворта [85].

У нормованій канонічній формі ці поліноми мають такий вигляд:

```
> Ba:=unapply(product(s^2-2*s*cos((2*k+n-1)*Pi/(2*n))+1, k=1..n/2),
n);
# для парних значень n: до n/2
```

$$Ba := n \mapsto \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(s^2 - 2 \cdot s \cdot \cos\left(\frac{(2 \cdot k + n - 1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) + 1 \right)$$

```
> Bo:=unapply((s+1)*product(s^2-2*s*cos((2*k+n-1)*Pi/(2*n))+1,
k=1..(n-1)/2), n);
# для непарних значень n: до (n-1)/2
```

$$Bo := n \mapsto (s + 1) \cdot \left(\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(s^2 - 2 \cdot s \cdot \cos\left(\frac{(2 \cdot k + n - 1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) + 1 \right) \right)$$

Вирази для декількох перших поліномів Баттерворта переконують у тому, що їх факторизація, що була задє-
кларована вище, дійсно має місце:

```
> Bo(1); Ba(2); Bo(3); Ba(4); Bo(5); Ba(6); Bo(7);
s + 1
```

$$\begin{aligned}
 & \frac{s^2 + s\sqrt{2} + 1}{(s+1)(s^2 + s + 1)} \\
 & \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 1 \right) \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1 \right) \\
 & (s+1) \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 \right) \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 \right) \\
 & \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 1 \right) (s^2 + s\sqrt{2} + 1) \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1 \right) \\
 & (s+1) \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + 1 \right) \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1 \right) \left(s^2 + 2s \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1 \right)
 \end{aligned}$$

Визначимо інший, ніж вище, опис фільтру, тепер у термінах його полюсів, нулів та коефіцієнту підсилення:

```
> BF_zpg:=ZeroPoleGain(BF3):
```

```
PrintSystem(BF_zpg);
```

```

Zero Pole Gain
continuous
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(s)]
outputvariable = [yI(s)]
z1,1 = [ ]
p1,1 = [ -1, -1/2 - I*sqrt(3)/2, -1/2 + I*sqrt(3)/2 ]
k1,1 = 1

```

```
> poles_bw:=BF_zpg:-p[1,1];
```

```
# Полюси фільтру Баттерворта 3-го порядку
```

$$poles_bw := \left[-1, -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2} \right]$$

(13.10)

Розглянутий фільтр не має нулів (список пустий), але має три полюси з координатами на комплексній площині у вигляді списку. Коефіцієнт підсилення (чисельник передавальної функції) обрано рівним одиниці.

Побудуємо точковий графік локалізації цих полюсів (вираз (13.10)) на комплексній площині:

```
> poles_bw1:=plots[complexplot](poles_bw, sigma=0..-1.5, omega=-1..1, symbol=solidcircle, symbolsize=32, style=point, color="DarkViolet");
```

```
# Кольорові кружки, що позначають полюси
```

```
poles_bw2:=plots[complexplot](poles_bw, sigma=0..-1.5, omega=-1..1, symbol=circle, symbolsize=34, style=point, color="Black");
```

```
# Чорний контур кружків, що позначають полюси
```

```
plots[display](poles_bw1, poles_bw2, caption="Рис. 20 - Розташування полюсів \n фільтра Баттерворта 3-го порядку.", size=[ver, ver], plotopt, labeldirections=[horizontal, horizontal], axes=normal);
```

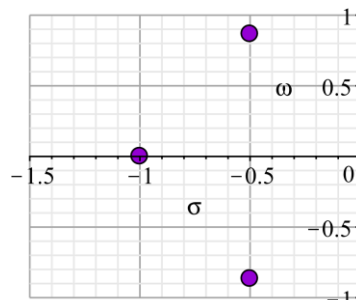


Рис. 13.22 – Полюси фільтру Баттерворта 3-го порядку.

Графік на Рис. 13.22 повністю відповідає тій інформації, яка вже представлена на Рис. 13.21, як і слід було очікувати.

Зобразимо далі ЛАЧХ та ФЧХ фільтру НЧ Баттерворта 3-го порядку:

```
> BodePlot(BF3, thickness=2, color="BlueViolet",
  colorscheme=["Fuchsia", "BlueViolet", "MidnightBlue"],
  hertz=false, output=horizontalplot, tickmarks=[4,8], caption="Рис.
  21 - ЛАЧХ та ФЧХ фільтра Баттерворта 3-ого порядку.", size=[hor,
  ver], plotopt);
```

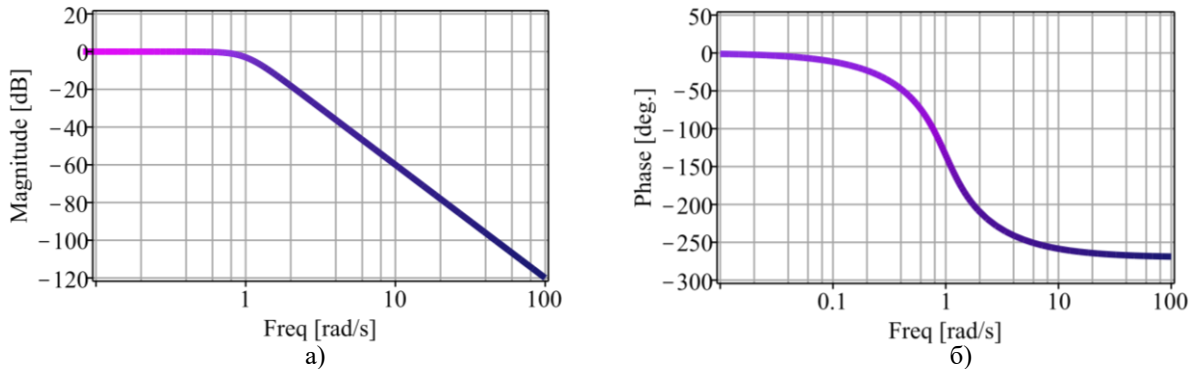


Рис. 13.23 – Графіки Боде для ФНЧ Баттерворта 3-ого порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.

З характеристик Рис. 13.23 видно, що спадання ЛАЧХ поза межами смуги пропускання відбувається зі швидкістю -60 дБ/декада, що є максимально можливим темпом для фільтрів 3-го порядку.

Пакет **DynamicSystems** дозволяє також вивчати імпульсну перехідну характеристику фільтру, тобто відгук фільтру на виході на одиничний діраківський імпульс $\text{Dirac}(t)$ у початковий момент часу $t = 0$ на вході (Рис. 13.24):

```
> ImpulseResponsePlot(BF3, 16, color="Blue", thickness=2,
  labels=[typeset("Freq. ", " (", '\omega', ") [rad/s]"),
  typeset("IRF, a.u.")], caption="Рис. 22 - Імпульсна перехідна фун-
  кція (IRF)\n фільтра Баттерворта 3-ого порядку.", view=[0..16.1, -
  0.2..0.5], size=[hor, ver+20], plotopt2);
```

Також **DynamicSystems** дозволяє визначати реакцію фільтру на різні входні збудження. Для прикладу побудуємо вихідну реакцію фільтру Баттерворта на східчасту функцію Хевісайда (англ. Heaviside(t)) з одиничною амплітудою, яка починає діяти на вході в момент часу $t = 0$ (Рис. 13.25):

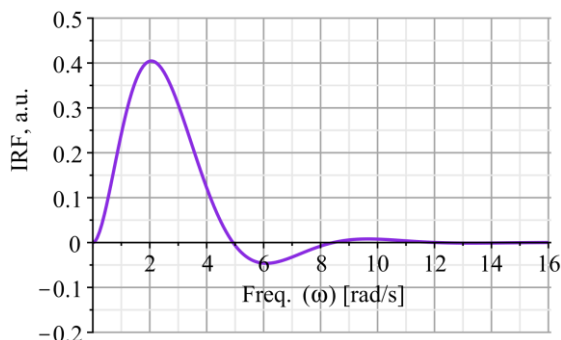


Рис. 13.24 – Імпульсна перехідна функція НЧ-фільтра Баттерворта 3-ого порядку.

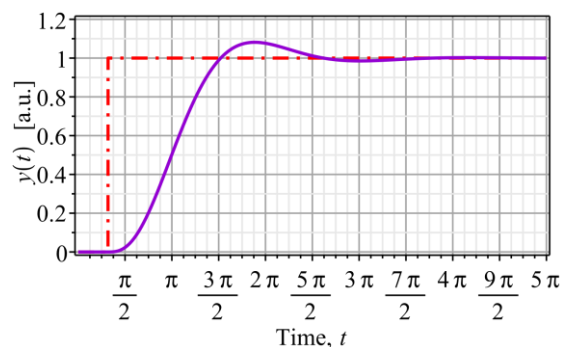


Рис. 13.25 – Відгук фільтра Баттерворта 3-ого порядку на функцію Хевісайда.

```
> inp:=Step(1, 1, 0):
gbw1:=plot(inp, t=0..5*Pi, thickness=2, linestyle=dashdot,
  color="OrangeRed"):
gbw2:=ResponsePlot(BF3, inp, duration=5*Pi, thickness=2,
  color="MediumBlue"):
plots[display](gbw1, gbw2, view=0..1.2, labels=[typeset("Time, ",
  't'), typeset('y(t)', " [a.u]")], caption="Рис. 23 - Відгук
```

фільтра Баттерворта \n 3-го порядку на функцію Хевісайда.",
size=[hor, ver+20], plotopt);

Як видно з Рис. 13.24, Рис. 13.25, перехідні процеси у фільтра Баттерворта відносно довгі, тобто фільтр має помітну інерцію.

Діаграма Найквіста для фільтру Баттерворта 3-го порядку (Рис. 13.26):

```
> nq_pl:=NyquistPlot(BF_zpg, thickness=2, labels=[" ", ""],  
'colorscheme'=[["Black", "Blue", "LightSkyBlue"], 'zrange'=-  
0.6..2], scaling=constrained, caption="Рис. 24 - Діаграма Найкві-  
ста \n фільтра Баттерворта 3-го порядку.", view=[-1.2..1.7, -  
1.2..1.2], plotopt2, labeldirections=[horizontal, horizontal],  
size=[280, 320]):
```

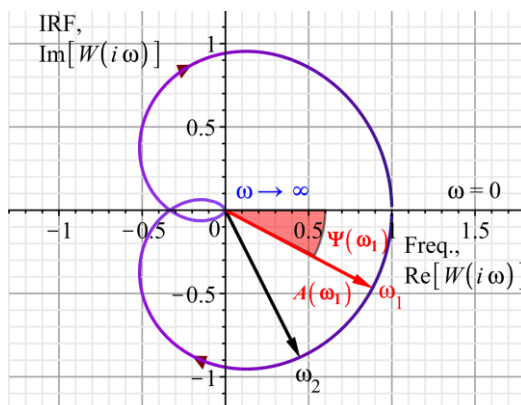


Рис. 13.26 – Діаграма Найквіста фільтра НЧ Баттерворта 3-го порядку.

Радіус-вектори на діаграмі Рис. 13.26:

```
> ar_pl_1:=plots[arrow] ([0.89, -0.47], width=0.02,  
head_length=0.13, head_width=0.06, border=false, view=[-1.2..1.7,  
-1..1.2], color="Red", plotopt, axes=normal, size=[340, 320]):  
ar_pl_2:=plots[arrow] ([0.45, -0.89], width=0.02, head_length=0.13,  
head_width=0.06, border=false, view=[-1.2..1.7, -1..1.2],  
color=black, plotopt, axes=normal, size=[340, 320]):
```

Сектор із заливкою кольором:

```
> angle_Psi:=plots[display] (plottools[sector] ([0,0], 0.6, 0..-  
3*Pi/20, color=red, transparency=0.5), view=[-1.2..1.7, -1..1.2],  
plotopt, size=[340, 320]):
```

Підписи на діаграмі Рис. 13.26:

```
> tx_pl_pr:=plots[textplot] ({  
[-0.75, 1.03, typeset("IRF,\nIm", '\([W(i*\omega)]\)'), font=[TIMES,  
NORMAL, 12]],  
[1.45, -0.3, typeset("Freq.,\nRe", '\([W(i*\omega)]\)'), font=[TIMES,  
NORMAL, 12]],  
[0.3, 0.15, typeset('\omega', " ", '#mover(mo("&rarr;"))', " ",  
'infinity'), font=[TIMES, NORMAL, 12], color=blue],  
[1.5, 0.125, typeset('\omega = 0'), font=[TIMES, NORMAL, 12]],  
[1, -0.5, typeset('\omega[1]'), color="Red", font=[TIMES, NORMAL,  
12]],  
[0.6, -0.5, typeset('\A(\omega[1])'), color=red, font=[TIMES, BOLD,  
10]],  
[0.81, -0.18, typeset('\Psi(\omega[1])'), color=red, font=[TIMES,  
BOLD, 10]],  
[0.5, -1, typeset('\omega[2]'), color=black, font=[TIMES, NORMAL,  
12]]}, view=[-1.3..1.8, -1..1.2], plotopt, axes=normal, size=[340,  
320]):  
  
> plots[display] (nq_pl, ar_pl_1, ar_pl_2, tx_pl_pr, angle_Psi,  
size=[hor, ver+20]):
```

13.3.2 Фільтри Бесселя

Фільтри Бесселя (*Bessel*) презентують рух в протилежному напрямку від ідей Баттерворта [164]. Полюси фільтрів Бесселя лежать в точках, які знаходяться далі від уявної осі комплексної площини (σ, ω). Це скорочує час релаксації перехідних процесів, але за рахунок менш крутого спадання ЛАЧХ за межами смуги пропускання.

Передавальна функція Бесселя будується на основі так званих **зворотних поліномів Бесселя** [165], [166], які будуються по такій формулі:

> **Bs:=unapply (Sum ((2*n-k) ! * (s) ^k / (2^(n-k) * k! * (n-k) !), k=0..n), n) ;**

$$Bs := n \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(2 \cdot n - k)! \cdot s^k}{2^{n-k} \cdot k! \cdot (n-k)!}$$

Обчислимо декілька перших поліномів Бесселя:

> **value (Bs (0)) ; value (Bs (1)) ; value (Bs (2)) ; value (Bs (3)) ;**
value (Bs (4)) ; value (Bs (5)) ; value (Bs (6)) ;

$$\begin{aligned} &1 \\ &s + 1 \\ &s^2 + 3s + 3 \\ &s^3 + 6s^2 + 15s + 15 \\ &s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105 \\ &s^5 + 15s^4 + 105s^3 + 420s^2 + 945s + 945 \\ &s^6 + 21s^5 + 210s^4 + 1260s^3 + 4725s^2 + 10395s + 10395 \end{aligned}$$

Опишемо фільтр як систему через його комплексну передавальну функцію, тобто, у вигляді поліному Бесселя 3-го порядку (4-ий рядок з переліку вище):

> **BsF3:=TransferFunction (15 / (15+15*s+6*s^2+s^3)) ;**
PrintSystem (BsF3) ;

Transfer Function
continuous
1 output(s); 1 input(s)
inputvariable = [uI(s)]
outputvariable = [yI(s)]
$tf_{1,1} = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$

(13.11)

А також через нулі та полюси його передавальної функції:

> **BsF_zpg:=ZeroPoleGain (BsF3) ;**
poles_bs:=BsF_zpg:-p[1,1]: Vector (['pole[1]'=poles_bs[1],
'pole[2]'=poles_bs[2], 'pole[3]'=poles_bs[3]]) ;

$$\left[\begin{aligned} pole_1 &= -\frac{(4+4\sqrt{5})^{1/3}}{2} + \frac{2}{(4+4\sqrt{5})^{1/3}} - 2 \\ pole_2 &= \frac{(4+4\sqrt{5})^{1/3}}{4} - \frac{1}{(4+4\sqrt{5})^{1/3}} - 2 + \frac{I\sqrt{3} \left(-\frac{(4+4\sqrt{5})^{1/3}}{2} - \frac{2}{(4+4\sqrt{5})^{1/3}} \right)}{2} \\ pole_3 &= \frac{(4+4\sqrt{5})^{1/3}}{4} - \frac{1}{(4+4\sqrt{5})^{1/3}} - 2 - \frac{I\sqrt{3} \left(-\frac{(4+4\sqrt{5})^{1/3}}{2} - \frac{2}{(4+4\sqrt{5})^{1/3}} \right)}{2} \end{aligned} \right]$$

Побудуємо діаграму з нулями та полюсами фільтра Бесселя (Рис. 13.27 а):

> **poles_bs1:=plots[complexplot] (poles_bs, sigma=0..-3, omega=-2..2,**
symbol=solidcircle, symbolsize=32, style=point,
color="DarkTurquoise") ;
Кольорові кружки, що позначають полюси
 > **poles_bs2:=plots[complexplot] (poles_bs, sigma=0..-3, omega=-2..2,**
symbol=circle, symbolsize=34, style=point, color="DarkCyan") ;

```
# Темний контур кружків, що позначають полюси
plots[display] (poles_bs1, poles_bs2, caption="Рис. 25 а - Локалі-
зація полюсів ФНЧ Бесселя 3-го порядку на комплексній площині.",
size=[ver, ver+20], plotopt,
labeldirections=[horizontal, horizontal], axes=normal);
```

Підставимо лапласівську змінну (s) у вираз для комплексної передавальної функції (13.11) для отримання аналітичного вигляду ЛАФЧХ фільтру Бесселя 3-го порядку на комплексній площині:

```
> gain_Bs3:=20*log10(abs(evalc(subs(s=sigma+I*omega,
value(Bs(3))))));
# ЛАФЧХ фільтру з передавальною функцією (13.11)
gain_Bs3 := 
$$\frac{20 \ln(|3\omega^2\sigma - \sigma^3 + 6\omega^2 - 6\sigma^2 - 15\sigma - 15 - I(-\omega^3 + 3\omega\sigma^2 + 12\omega\sigma + 15\omega)|)}{\ln(10)}$$

```

Побудуємо графіки отриманої залежності для різних рівнів спаду потужності, різниця між якими визначається половиною нахилу у 6 дБ/декада при подвоєнні частоти (Рис. 13.27 б, в):

```
> plots[contourplot] (gain_Bs3, sigma=-4.5..0.5, omega=-3..3,
thickness=1, contours=[0,3,6,9,12,15,18,21,24],
filledregions=true, coloring=["Cyan", "White"], color="DarkCyan",
transparency=0.3, grid=[50,50], caption="Рис. 25 б - Лінії рівного
підсилення та полюси передавальної функції ФНЧ Бесселя 3-го по-
рядку.", size=[ver, hor+40], plotopt,
labeldirections=[horizontal, horizontal], axes=normal);
> plots[contourplot3d] (gain_Bs3, sigma=-4.5..0.5, omega=-3..3,
thickness=0, contours=[0,3,6,9,12,15,18,21,24],
filledregions=true, coloring=["LimeGreen", "DarkCyan"],
color="DarkCyan", transparency=0.1, grid=[50,50], orientation=[-
160, 75, 0], light=[250, 160, 1, 1, 1], view=[-4.5..0.5, -3..3,
0..25], size=[hor+100, ver+100]);
```

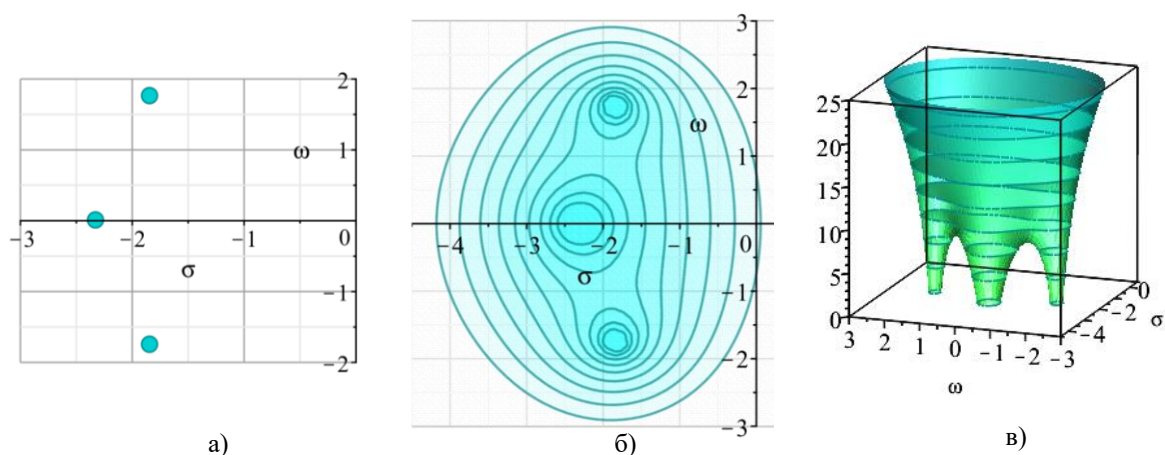


Рис. 13.27 – Полюси та лінії рівного підсилення передавальної функції ФНЧ Бесселя 3-го порядку: а) локалізація полюсів на комплексній площині; полюси та лінії рівного підсилення: б) у 2D-площині; в) у 3D.

Побудуємо для порівняння ЛАЧХ і ФЧХ фільтру НЧ Бесселя 3-го порядку з фільтром Баттерворта, наведеного на Рис. 13.23 (Рис. 13.28):

```
> BodePlot(BsF3, thickness=2, color="DarkCyan",
colorscheme=["DarkTurquoise", "Cyan", "DarkCyan"], hertz=false,
output=horizontalplot, tickmarks=[4,8], caption="Рис. 26 - ЛАЧХ та
ФЧХ фільтру Бесселя.", size=[340, 220], plotopt);
```

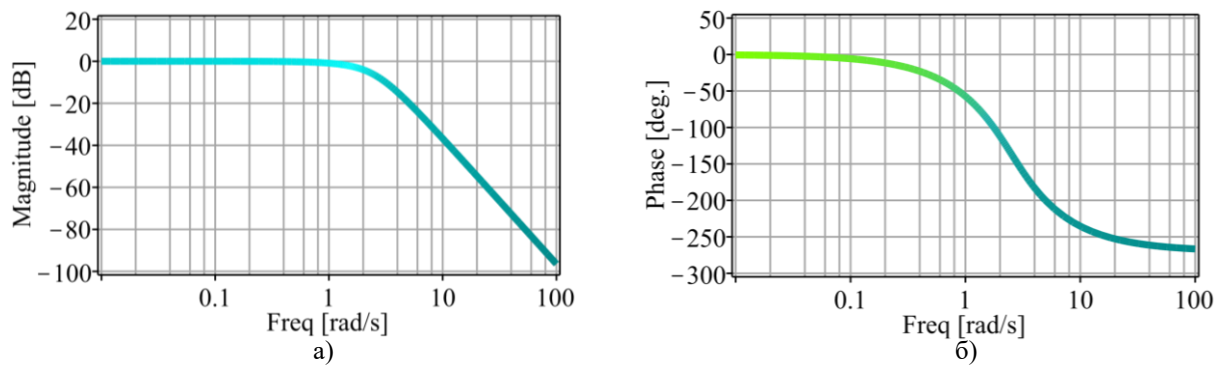


Рис. 13.28 – Графіки Бодє для ФНЧ Бесселя 3-ого порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.

Подивимося, як виглядає імпульсна перехідна характеристика фільтру Бесселя, тобто відгук фільтру на виході на одиничний діраківський імпульс $\text{Dirac}(t)$ (Рис. 13.29):

```
> ImpulseResponsePlot(BsF3, 6, color="DarkGreen", thickness=2,
  axes=normal, labels=[typeset("Freq. ", "(", '\omega', ")
  [rad/s]"), typeset("IRF, a.u.")], caption="Рис. 27 - Імпульсна пе-
  рехідна характеристика \n ФНЧ Бесселя 3-го порядку.", view=[0..6,
  -0.4..1], size=[hor, ver+20], plotopt2);

> inp:=Step(1, 1, 0):
  gbs1:=plot(inp,t=0..5*Pi, thickness=2, linestyle=dashdot,
  color=red):
  gbs2:=ResponsePlot(BsF3, inp, duration=5*Pi, thickness=2,
  color=blue):
  plots[display](gbs1, gbs2, view=0..1.2, view=0..1.2,
  labels=[typeset("Time, ", 't'), typeset('y(t)', " [a.u.]")],
  caption="Рис. 28 - Перехідна характеристика \n ФНЧ Бесселя 3-го
  порядку.", size=[hor, ver+20], plotopt);
```

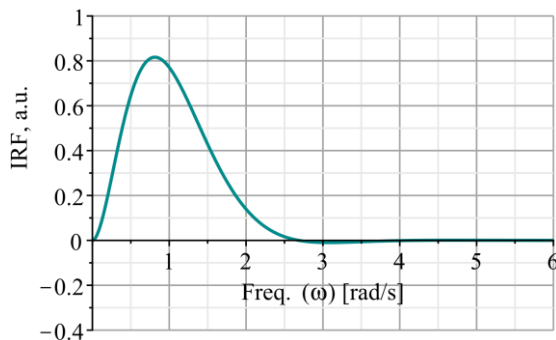


Рис. 13.29 – Імпульсна перехідна функція (IRF) фільтру НЧ Бесселя 3-го порядку.

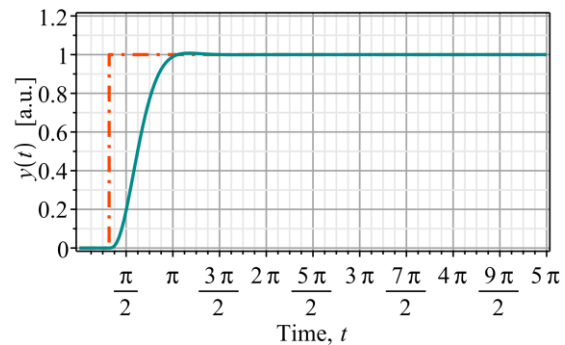


Рис. 13.30 – Відгук фільтру Бесселя 3-го порядку на функцію Хевісайда.

Як видно з Рис. 13.29, Рис. 13.30, перехідні процеси у фільтрів Бесселя значно швидші, отже, їх інерційність істотно менша порівняно з фільтрами Баттерворта. Побудуємо діаграму Найквіста (Рис. 13.21):

```
> NyquistPlot(BsF3, thickness=2, labels=[typeset("Freq.\n", '\omega',
  " [rad/s]"), typeset("IRF ")] , 'colorscheme'=[["Blue",
  "DarkViolet", "Red"], 'zrange'=-0.6..2], caption="Рис. 29 - Діаг-
  рама Найквіста \n фільтру Бесселя 3-го порядку.",
  scaling=constrained, view=[-0.6..1.2, -1..1], size=[hor+80,
  ver+80], plotopt2, labeldirections=[horizontal,horizontal]);
# Діаграма Найквіста для фільтру Бесселя 3-го порядку
```

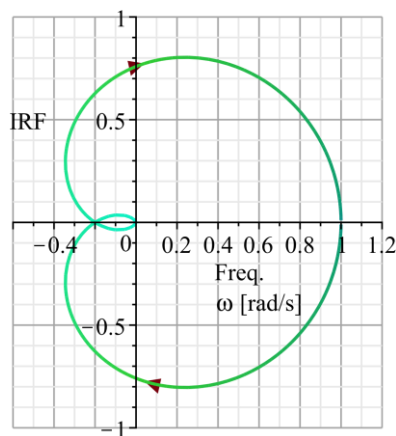


Рис. 13.31 – Діаграма Найквіста фільтра Бесселя 3-го порядку.

Для зручності аналізу зберемо графіки основних характеристик фільтрів Баттерворта та Бесселя в одну таблицю (Табл. 13.2).

Табл. 13.2

Графіки основних характеристик ФНЧ 3-го порядку.	
	ФНЧ Баттерворта 3-го порядку
ЛАЧХ	
Рис. 13.23 а) Рис. 13.28 а)	
ФЧХ	
Рис. 13.23 б) Рис. 13.28 б)	
Імпульсна перехідна функція	
Рис. 13.24 Рис. 13.29	
Відгук на імпульс δ(t)	
Рис. 13.25 Рис. 13.30	
	ФНЧ Бесселя 3-го порядку

Фільтри Баттерворта використовуються найчастіше. Характерним для них є те, що вони мають максимально плоску смугу пропускання і доволі крутий перехід між полозою пропускання та полозою придушення, ніж в RC-фільтрів, що добре видно з порівняння Рис. 13.23 а та Рис. 13.3 а. Фільтри Бесселя цікаві тим, що мають найбільш лінійну фазо-частотну характеристику [98].

З порівняння графіків перехідних процесів, тобто відгуку фільтрів на діраківський імпульс $\delta(t)$, які наведені на Рис. 13.25 та Рис. 13.30, можна бачити, що у випадках, коли важливими є параметри фільтру у часовій області, перевагу варто віддати фільтру Бесселя [167]. Причому незалежно від його порядку.

13.4 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. В чому сутність роботи фільтра? Які типи фільтрів є? Які основні характеристики?
2. Поясніть будову та принцип роботи аналогового фільтра.
3. Поясніть будову та принцип роботи цифрового фільтра.
4. Наведіть схему та поясніть принцип роботи фільтра НЧ 1-го порядку.
5. Поясніть поняття «передавальна функція» та наведіть формулу.
6. Дайте визначення поняття «частота обрізання».
7. В чому полягає нормування передавальної функції? Як фільтр є нормованим?
8. Поясніть поняття: ЛАФЧХ, ФЧХ та годограф Найквіста.
9. Наведіть схему та поясніть принцип роботи фільтра ВЧ 1-го порядку.
10. В чому полягає відмінність ФВЧ від ФНЧ 1-го порядку?
11. Поясніть по схемі принци роботи ФНЧ 2-го порядку. В чому його принципова відмінність від фільтра 1-го порядку?
12. Поясніть загальні властивості аналогових фільтрів 2-го порядку.
13. Обґрунтуйте, який НЧ-фільтр є ефективнішим: 1-го порядку чи 2-го порядку?
14. Поясніть принцип реалізації фільтрів вищого порядку як з апаратної так і математичної точки зору.
15. Поясніть роботу фільтра Баттерворта та його математичний опис.
16. Поясніть зміст поняття "поліусів"?
17. Що являє собою каскад фільтрів? Як він описується математично?
18. Яке призначення режекторного фільтру?
19. Поясніть роботу фільтра Бесселя. Чим він відрізняється від фільтру Баттерворта?

♦ 1.2 Maple

1. Який програмний пакет в Maple дозволяє досліджувати фільтри? Поясніть роботу його основних команд.
2. Поясніть призначення і можливості команд пакету DynamicSystems.
3. Якою командою задається передавальна функція?
4. Яка команда дозволяє будувати одразу ЛАЧХ та ФЧХ нормованого фільтру? Поясніть її синтаксис та опції.
5. Яка команда дозволяє візуалізувати АФЧХ? Поясніть її функціонал.
6. Як в Maple відобразити графічно реакцію фільтру НЧ на вхідний сигнал у вигляді сходинок Хевісайда та на гармонічні вхідні сигнали?

13.5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Дослідіть фільтр порядку відповідно варіанту з Табл. 13.3.
2. Порівняйте з фільтрами менших порядків.
3. Наведіть можливі приклади застосування.
4. Проаналізуйте результати. Сформулюйте висновки.

Табл. 13.3

Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 4.				
Фільтри	Порядок фільтра			
Номери варіантів	1	2	3	4
Фільтр Баттерворта: НЧ + ВЧ	4	5	10	7
Номери варіантів	5	6	7	8
Фільтр Бесселя: НЧ + ВЧ	4	5	10	7
Номери варіантів	9	10	11	12
Фільтр Баттерворта: НЧ + ВЧ	8	9	6	11
Номери варіантів	13	14	15	16
Фільтр Бесселя: НЧ + ВЧ	8	9	6	11

ПРОЄКТУВАННЯ ТА СТВОРЕННЯ ЦИФРОВОГО КІХ-ФІЛЬТРУ

- 1  Проєктування цифрового КІХ-фільтру.
- 2  Тестування цифрового КІХ-фільтру.

14.1 ПРОЄКТУВАННЯ ЦИФРОВОГО КІХ-ФІЛЬТРУ

Головним недоліком аналогових фільтрів малого порядку є повільна зміна коефіцієнту підсилення з частотою [101]. Підвищення порядку фільтру (кількості каскадів) веде до збільшення габаритів та ціни таких фільтрів. Від такого недоліку вільні сучасні цифрові фільтри, кількість каскадів яких, навіть при однокристальному виконанні, може сягати десятків і навіть сотень. Тому цифрові фільтри забезпечують кращу частотну селективність, порівняно з аналоговими.

У цьому практикумі буде спроектовано цифровий фільтр $N + 1$ порядку класу FIR (*Finite Impulse Response*), або фільтр з **кінцевою імпульсною характеристикою**, або, скорочено, КІХ-фільтр.

Кожна з $n = 1, 2, \dots, N$ ланок (каскадів) фільтру задовольняє такій залежності вихідного сигналу $y(t)$ від вхідного $x(t)$:

$$y_n = \sum_{k=0}^N (h_k \cdot x_{n-k}) \quad (14.1)$$

Рівняння фільтрації у вигляді (14.1) характерне для нерекурсивних фільтрів без зворотного зв'язку. Кількість ланок N називають **порядком фільтру**.

14.1.1 Вхідні параметри для розрахунків

Підключимо пакет для роботи з графіками та деякі опції для візуалізації:

```
> restart:
with(plots):
> interface(displayprecision=3, rtablesize=7):
plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:
> hor:=360: ver:=240: # size of plots
```

Вхідні параметри для проєктування цифрового фільтру виділенням смуги частот (**смуговий фільтр**), який призначений для виділення п'ятої гармоніки вхідного сигналу $y(t)$ і має вигляд зашумленого меандру з частотою 500 Гц:

```
> N:=64;      # Кількість ланок фільтру (на 1 менше від порядку фільтру)
fs:=1e4;      # Частота дискретизації (семплінгу)
fl:=2300;     # Нижня частота обрізання (смуги пропускання)
fh:=2700;     # Верхня частота обрізання (смуги пропускання)
m:=10;        # N < 2^m - кількість відліків для аналізу
N:=64
```

$$fs := 1.000 \times 10^4$$

$$fl := 2300$$

$$fh := 2700$$

$$m := 10$$

(14.2)

Обчислимо кількість точок для аналізу:

```
> T:=2^m-1;
T:=1023
```

Визначимо відношення поміж актуальними частотами:

```
> F1:=evalf(fl/fs);
F2:=evalf(fh/fs);
F1:=0.230
F2:=0.270

> fp1:=2*Pi*F1;
fp2:=2*Pi*F2;
fp1:=1.445
fp2:=1.696
```

Ступенева функція Хевісайда, яка знадобиться для розрахунків (Рис. 14.1):

```
> plot(Heaviside(x), x=-1..1, thickness=3, color="Crimson",
      tickmarks=[5,5], caption="Рис. 1 - Ступенева функція Хевісайда.",
      view=[-1.5..1.5, 0..1.25], size=[0.7*hor, ver], plotopt);
```

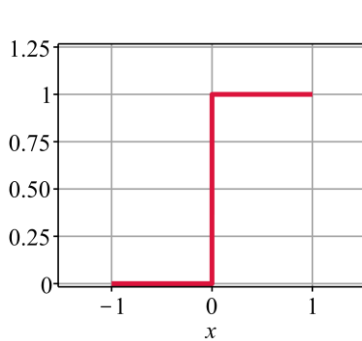
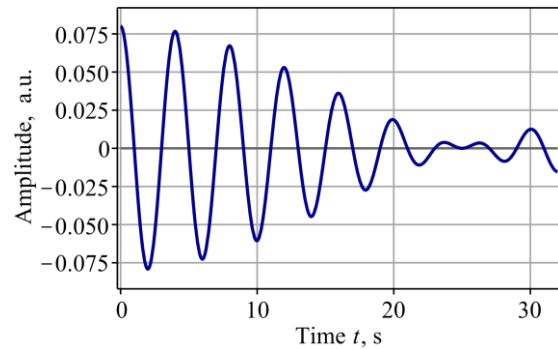


Рис. 14.1 – Ступенева функція Хевісайда.

Рис. 14.2 – Характеристика
смугового фільтру.

Задаємо та зобразимо характеристику смугового фільтру (Рис. 14.2):

```
> g:=(sin(fp2*t)-sin(fp1*t))/(Pi*t);
      g := 
$$\frac{\sin(1.696t) - \sin(1.445t)}{\pi t}$$

```

14.1.2 Розрахунки параметрів цифрового фільтру

Обчислимо коефіцієнти перетворення, так звані FIR-коефіцієнти h_k з рівняння фільтрації (14.1), для прямокутного вікна фільтру:

```
> C:=n->limit(g, t=n);
      h:=array(0..N): # Масив для коефіцієнтів фільтрації
      N2:=N/2;
```

$$C := n \mapsto \lim_{t \rightarrow n} g$$

$$N2 := 32$$

Цикл розрахунків коефіцієнтів фільтрації:

```
> for n from 0 to N2 do
      h[N2-n]:=evalf(C(n));
      h[N2+n]:=h[N2-n];
end do;
```

$$\begin{aligned} h_{32} &:= 0.080 \\ &\dots \\ h_1 &:= -6.058 \times 10^{-11} \\ h_{63} &:= -6.058 \times 10^{-11} \\ h_0 &:= -0.015 \\ h_{64} &:= -0.015 \\ &\dots \end{aligned}$$

(14.3)

FIR-коефіцієнти h_k можна переглядати як у табличному вигляді, розкривши вираз у циклі (14.3), так і у графічному, як на Рис. 14.3:

```
> plot(h[q], q=0..N, thickness=1, color="MediumBlue", caption="Рис.
3 - FIR-коефіцієнти цифрового смугового фільтру.",
      labels=[typeset("Number ", 'q'), typeset("Value ", 'h[q]')],
      filled=true, view=[0..N, -0.09..0.09], size=[hor, ver], plotopt);
```

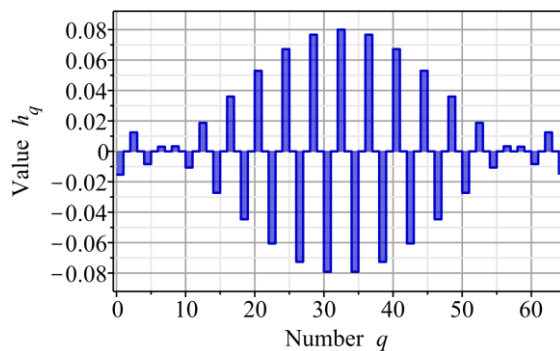


Рис. 14.3 – FIR-коефіцієнти цифрового смугового фільтру.

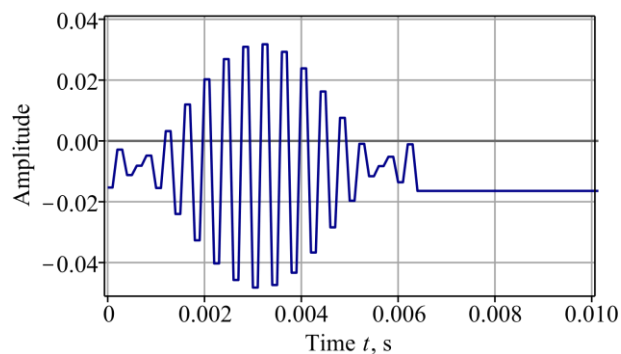


Рис. 14.4 – Перехідна характеристика смугового фільтру, відгук на сходи́нку Хевісайда.

Визначимо масиви для вхідного $x(n)$ та вихідного $y(n)$ сигналів:

```
> x:=array(-N..T): y:=array(0..T):
```

Встановимо значення $x(n) = 0$ для моментів часу менших нуля ($t < 0$) і $x(n) = 1$ для моментів часу ($t \geq 0$). Іншими словами подамо на вхід дискретизовану функцію Хевісайда (Рис. 14.1):

```
> Heaviside(0):=1:
for n from -N to T do
x[n]:=Heaviside(n);
end do:
```

Обчислимо часову залежність для вихідного сигналу цифрового фільтру, якщо на вхід поданий сигнал у вигляді функції Хевісайда (Рис. 14.1). Така відповідь має назву **перехідної характеристики** фільтру:

```
> for n from 0 to T do
y[n]:=sum(h[k]*x[n-k], k=0..N):
end do:
```

Це досить великий масив даних (оскільки $T = 1023$).

Збудуємо графік перехідної характеристики фільтру (Рис. 14.4), яка відображає його реакцію на вхід у вигляді функції Хевісайда. Для цього спочатку створимо послідовність дискретних значень вихідного сигналу і кожній точці (відліку):

```
> p:=seq([j/fs, y[j]], j=0..T):
whattype(p); # Дискретизований вихід в домені відліків
list
```

```
> plot([0, p], time=0..2*N/fs, color=["DimGrey", "DarkBlue"],
thickness=1, labels=[typeset("Time ", 't', ", s"), "Amplitude"],
caption="Рис. 4 - Перехідна характеристика цифрового фільтру, від-
гук на сходи́нку Хевісайда.", tickmarks=[6,5], view=[0..0.01, -
0.05..0.04], size=[1.1*hor, 1.1*ver], plotopt);
```

Обчислимо АЧХ фільтру, уживаючи пряме перетворення Фур'є. Сформуємо два одновимірних масиви для реальної та уявної частин вихідного сигналу в залежності від дискретного часу:

```
> ro:=array(1..T+1): io:=array(1..T+1):
```

Здійснемо заповнення масивів часової залежності реальної та уявної частини вихідного сигналу (уявна частина тотожно дорівнює нулю):

```
> for n from 0 to T do ro[n+1]:=y[n]:
io[n+1]:=0:
end do:
```

```
> FFT(m, ro, io):
# Швидке ПФ обох масивів з параметром m=10
```

Далі можемо побудувати графік амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) та фазово-частотної (ФЧХ) характеристик фільтру:

- формування послідовності двочленних списків значень **коефіцієнта підсилення**, як модуля комплексної передавальної функції, в залежності від дискретної частоти, яка визначається частотою дискретизації f_s :

```
> p_fft:=seq([j*fs/(T+1), abs(ro[j+1]+io[j+1]*I)], j=0..T/2):
```

- формування послідовності двочленних списків значень **фази**, як аргументу комплексної передавальної функції, в залежності від дискретної частоти, яка визначається частотою дискретизації f_s :

```
> phase_fft:= [seq([j*fs/(T+1), 180*argument(ro[j+1]+io[j+1]*I)/Pi],
j=0..T/2)]:
```

Зобразимо графік АЧХ для частот навколо нижньої та верхньої частоти обрізання (Рис. 14.5):

```
> plot(p_fft, frequency=0..fs/2, labels=["Frequency, Hz",
typeset("Amplitude ", 'K(f[s])')], caption="Рис. 5 - АЧХ цифро-
вого смугового фільтру.", color="DarkBlue",
view=[1000..4000,0..1], thickness=2, tickmarks=[8,6],
size=[1.1*hor, ver], plotopt);
```

Зверніть увагу: на частотах обрізання (нижній частоті fl та верхній fh) функція $K(f)$ має нулі, посередині між якими вона сягає свого абсолютного максимуму. Зобразимо також ФЧХ цифрового фільтру у діапазон від нижньої до верхньої частот обрізання (Рис. 14.6):

```
> plot([-180, 180, 0, phase_fft], frequency=0..fs/2,
linestyle=[2,2,1,1], thickness=[1,1,1,2], color=["DarkGrey",
"DarkGrey", "DimGrey", "DarkBlue"], labels=["Frequency, Hz",
"Degree"], caption="Рис. 6 - ФЧХ фільтру.", tickmarks=[8, 6],
view=[fl..fh, -240..240], size=[hor, ver], plotopt);
```

Як видно з Рис. 14.6, в межах смуги пропускання фаза вихідного сигналу змінюється лінійно відносно входу. Отже, цифровий фільтр з параметрами (14.2) створено програмними засобами Maple 2021.

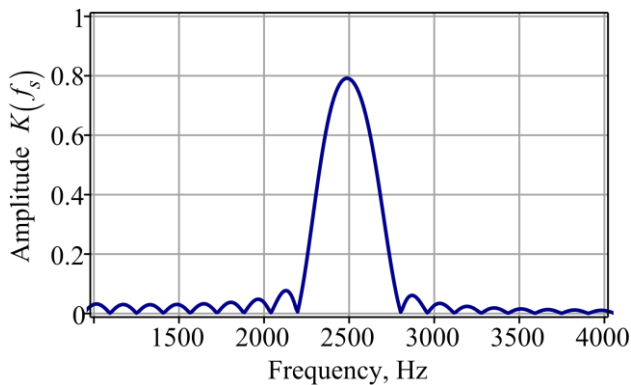


Рис. 14.5 – АЧХ цифрового смугового фільтру.

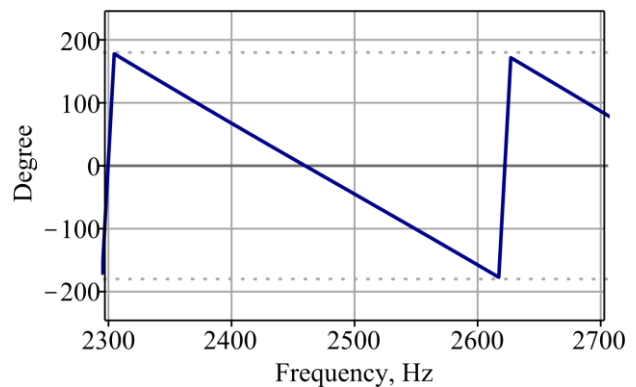


Рис. 14.6 – ФЧХ цифрового смугового фільтру.

14.2 ТЕСТУВАННЯ ЦИФРОВОГО КІХ-ФІЛЬТРУ

Створимо вхідний сигнал у вигляді зашумленого меандру з частотою 500 Гц та амплітудою напруги 2 Вольта для тестування отриманого фільтру:

```
> f_m:=500:
'f_Meander'=%*Units[Unit]('Hz');
'T_Meander'=1./((%))*Units[Unit]('s');
# Частота і період зашумленого меандру
f_Meander = 500 Hz
T_Meander = 0.002 s
(14.4)

> l:=round(fs/2/f_m); # Найближче ціле число до відношення
l := 10
```

Синтезуємо вхідний сигнал з випадковим шумом (завадою) за допомогою наступного циклу:

```
> for n from 0 by 2*l to T do
for n2 from 0 to l-1 do
if n+n2<=T then x[n+n2]:=evalf(-1+rand()/10^12-0.5): fi:
if n+n2+1<=T then x[n+n2+1]:=evalf(1+rand()/10^12-0.5): fi:
end do:
end do:
```

Обчислимо реакцію фільтру на синтезований вхідний сигнал $x(t)$ у вигляді зашумленого меандру, яка визначатиметься сумою:

```
> 'sum(h[k]*x[n-k], k=0..N)';
for n from 0 to T do
```

```

y[n]:=sum(h[k]*x[n-k], k=0..N);
end do:

```

$$\sum_{k=0}^N h_k x_{n-k}$$

Побудуємо графіки вхідного (Рис. 14.7) та вихідного сигналу (Рис. 14.8), тобто часові залежності вхідного та вихідного сигналів фільтру:

```

> input:=seq([j/fs, x[j]], j=0..T):
  output:=seq([j/fs, y[j]], j=0..T):
> plot([input,0], time=0..T/fs/4, thickness=[0,1], color=["Black",
  "DimGray"], labels=[typeset("Time ", 't', ", s"), typeset('x(t)',
  ", V")], caption="Рис. 7 - Синтезований вхідний сигнал з шумом.",
  tickmarks=[8,3], size=[1.3*hor, ver], plotopt);
> plot([output,0], time=0..T/fs/4, thickness=[0,1], color=["Blue",
  "DimGray"], labels=[typeset("Time ", 't', ", s"), typeset('y(t)',
  ", V")], caption="Рис. 8 - Фільтрований вихідний сигнал.",
  tickmarks=[8,3], size=[1.3*hor, ver], plotopt);

```

З Рис. 14.7 та Рис. 14.8 можна помітити, що після певного перехідного періоду вихідний сигнал з часом перетворюється у п'яту гармоніку (з частотою 2500 Гц) вхідного сигналу (500 Гц). Нагадаємо, що **гармоніками** називають коливання з частотами, кратними основній. В розглядуваному випадку основною є частота меандру 500 Гц (див. (14.4)). Перехідний період на Рис. 14.8 обумовлений вузькою смугою пропускання фільтру.

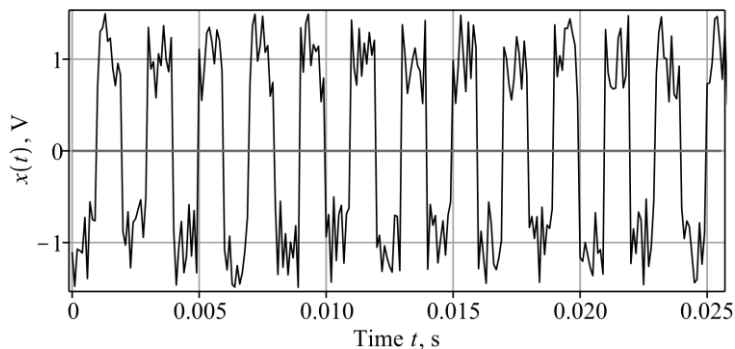


Рис. 14.7 – Синтезований вхідний сигнал $x(t)$ з шумом.

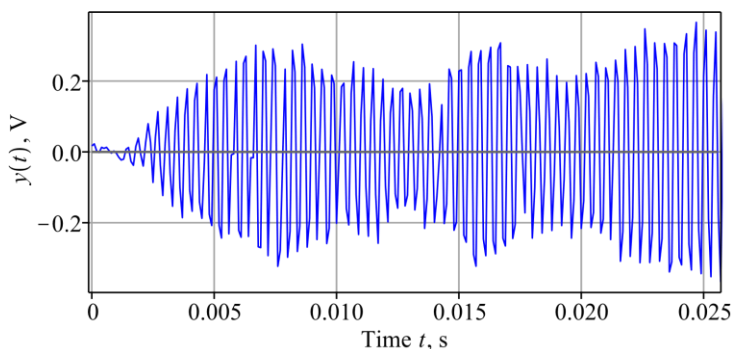


Рис. 14.8 – Фільтрований вихідний сигнал $y(t)$.

Обчислимо тепер частотні спектри вхідного та вихідного сигналів (Рис. 14.9, Рис. 14.10), підготувавши масиви вибірок сигналів і уживаючи ПФ, як це вже робилося вище за допомогою команди **FFT**:

```

> ri:=array(1..T+1):    ii:=array(1..T+1):
> for n from 0 to T do
  ri[n+1]:=x[n]*2/T: ii[n+1]:=0:
  ro[n+1]:=y[n]*2/T: io[n+1]:=0:
end do:
> FFT(m, ri, ii):    FFT(m, ro, io): # ШПФ масивів вибірок
> p:=seq([j*fs/(T+1), abs(ri[j+1]+ii[j+1]*I)], j=0..T/2):
  q:=seq([j*fs/(T+1), abs(ro[j+1]+io[j+1]*I)], j=0..T/2):

```

```
> plot(p, frequency=0..fs/2, y=0..0.6, color=black, thickness=1,
      labels=["Frequency, Hz", typeset('y(t)', ", V")], caption="Рис. 9
- Частотний спектр вхідного сигналу.", tickmarks=[8,5],
      view=[0..5e3, 0..0.4], size=[1.1*hor, ver], plotopt);
```

З графіку на Рис. 14.9 видно, що вхідний сигнал складається з непарних гармонік, амплітуда яких зменшується з ростом номеру гармоніки. П'ята гармоніка з частотою 2500 Гц потрапляє в **смугу прозорості** фільтру (поміж частотами обрізання, див. п. 14.1).

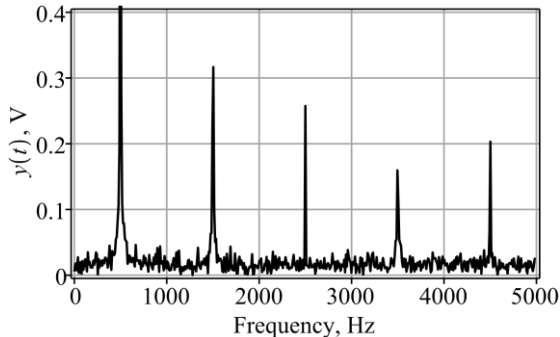


Рис. 14.9 – Частотний спектр вхідного сигналу.

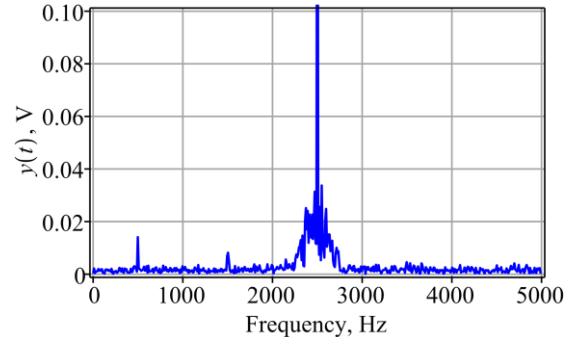


Рис. 14.10 – Частотний спектр вихідного сигналу.

```
> plot(q, frequency=0..5000, y=0..0.3, color="Blue", thickness=1,
      labels=["Frequency, Hz", typeset('y(t)', ", V")], caption="Рис. 10
- Частотний спектр вихідного сигналу.", tickmarks=[8,6],
      view=[0..5e3, 0..0.1], size=[hor, ver], plotopt);
```

З графіку на Рис. 14.10 видно, що вихідний сигнал складається з 5-ої гармоніки вхідного сигналу, яка ефективно виділяється (фільтрується) разом з прилеглим до неї шумом (завадами).

14.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. Чим визначається порядок фільтру?
2. Поясніть зміст поняття меандру в теорії сигналів.
3. Поясніть роботу аналогового та цифрового смугових фільтрів.
4. В чому полягають особливості функції Хевісайда?
5. Поясніть призначення FIR-коефіцієнтів.
6. Що являє собою перехідна характеристика фільтру?
7. Поясніть графік АЧХ цифрового смугового фільтру.
8. Поясніть, з якою метою використовується ШПФ для масивів даних.
9. Дайте визначення гармоніки.
10. Поясніть, чому сигнал складається з непарних гармонік.
11. Обґрунтуйте, чому виділяється саме п'ята гармоніка вхідного сигналу.
12. Поясніть, чому на Рис. 14.9 третій сплеск є п'ятою гармонікою.

♦ 1.2 Maple

1. Поясніть особливості завдання набору опцій для графіків.
2. Яка команда в Maple викликає функцію Хевісайда?
3. Поясніть особливості опції **labels**.
4. Яка команда дозволяє задавати складні підписи по осях?
5. Як в Maple задається цикл? Поясніть команди циклу. Яке призначення **fi**?
6. Яка команда дозволяє створити одновимірний масив?
7. Поясніть призначення та особливості команди **seq**.
8. Яка команда відповідає оператору сумування? Поясніть її особливості.
9. Яка команда округлює результат ділення?

14.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Спроектуйте цифровий фільтр $N + 1$ порядку класу FIR відповідно варіанту з
2. Табл. 14.1. Частоту меандру підберіть самостійно.

3. Порівняйте з фільтром оригіналу.
4. Наведіть приклади застосування.
5. Проаналізуйте результати. Сформулюйте висновки.

Табл. 14.1

Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 5.

Параметри	Значення параметрів			
Номери варіантів	1	2	3	4
Кількість ланок фільтру	32	30	32	32
Частота дискретизації	8e3	1e4	1e4	1e4
Нижня частота обрізання	2300	2300	2300	2300
Верхня частота обрізання	2700	2700	2700	2700
m	10	5	6	7
Номери варіантів	5	6	7	8
Кількість ланок фільтру	64	32	32	32
Частота дискретизації	1e4	1e4	8e3	8e3
Нижня частота обрізання	2300	2300	5200	1200
Верхня частота обрізання	2700	2700	5800	1400
m	8	9	5	8
Номери варіантів	9	10	11	12
Кількість ланок фільтру	32	30	32	32
Частота дискретизації	16e3	8e3	16e3	8e3
Нижня частота обрізання	5200	1200	2300	2300
Верхня частота обрізання	5800	1400	2700	2700
m	10	5	6	7
Номери варіантів	13	14	15	16
Кількість ланок фільтру	64	32	32	32
Частота дискретизації	1e4	1e4	32e3	16e3
Нижня частота обрізання	1200	5200	5200	1200
Верхня частота обрізання	1400	5800	5800	1400
m	8	9	5	8

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ ОДНОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ

- 1  Вейвлети Хаара та їх застосування.
- 2  Вейвлет-аналіз артеріального тиску крові та частоти пульсових хвиль.
- 3  Кореляції первинних, очищених та згладжених сигналів.

15.1 ВЕЙВЛЕТИ ХААРА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Вейвлети Хаара (ВХ) – перші і найпростіші вейвлети, які були запропоновані угорським математиком Альфредом Хааром (A. Haar) ще у 1909 році [168]. ВХ є ортонормованою системою функцій, визначених на проміжку $[0,1]$, таких, що довільна функція може бути розкладена в ряд по цьому базису і такий ряд є збіжним. Нарешті, ВХ ортогональні [108], нормовані, добре локалізовані в просторі, проте не є гладкими функціями (Рис. 15.1 а, б, Maple-код у Додаток Ж).

```
> restart:
with(SignalProcessing[Engine]):
with(DocumentTools):
with(DiscreteTransforms):

> interface(displayprecision=3, rtablesize=9):
plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:
plotopt_s:=labeldirections=[horizontal,horizontal], font=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines=true:

> hor:=460: ver:=260:
```

Коефіцієнти розкладання у дискретному вейвлет-перетворенні Хаара мають простий зміст:

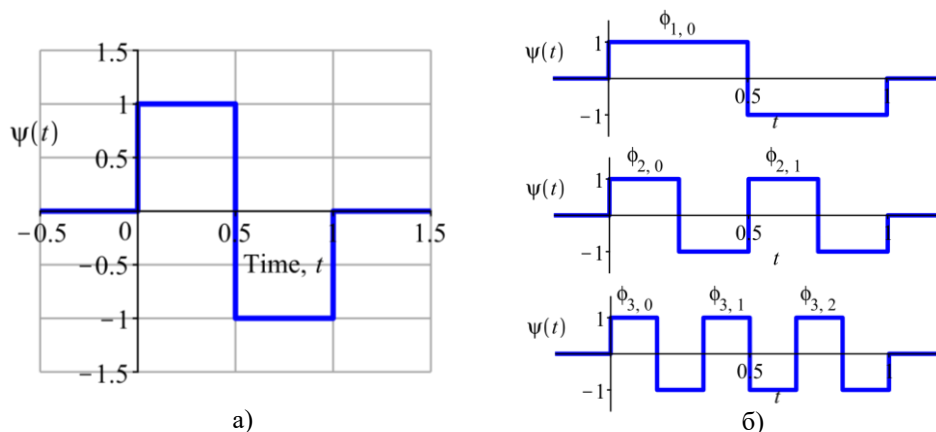


Рис. 15.1 – Вейвлет Хаара: а) материнський; б) дочірні для різних масштабів.

- **коефіцієнти апроксимації** пропорційні напівсумі сигналів для сусідніх відліків дискретного сигналу $\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$;
- **коефіцієнти деталізації** – їх напіврізниці $\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right)$.

Отже, ДВП Хаара завжди **повертає дві послідовності**, кожна удвічі коротша, ніж вхідний сигнал, а саме:

- коефіцієнти апроксимації,
- коефіцієнти деталізації (див. Рис. 6.3).

При цьому:

- утворення напівсум сусідніх відліків дискретного сигналу грає роль цифрового **фільтру нижніх частот** $g[n]$ (див. п. 5.2),
- утворення напіврізностей – роль **фільтру верхніх частот** $h[n]$.

Система комп'ютерної математики Maple містить програмний пакет **SignalProcessing[Engine]**, спеціально пристосований для аналізу одновимірних дискретних сигналів, в якому представлені пряме та зворотне вейвлет-перетворення в базисі вейвлетів Хаара.

Вейвлети застосовуються для:

- фільтрації та попередньої обробки даних;
- аналізу стану та прогнозування ситуації на фондових ринках;
- розпізнавання образів;

- при обробці та синтезі різних сигналів, наприклад, мовних, медичних тощо;
- для вирішення завдань стиснення та обробки зображень;
- при навчанні нейромереж та у багатьох інших випадках.

15.2 ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ АТ ТА ЧАСТОТИ ПУЛЬСОВИХ ХВИЛЬ

15.2.1 Вхідні сигнали та їх статистичні характеристики

Спостереження за АТ та частотою пульсу пацієнта проводилися ним самостійно у домашніх умовах (так званий домашній моніторинг артеріального тиску [7], [110]). Вимірювання здійснювалися напівавтоматичним тонометром марки «Micriline BP 3AG1» (Рис. 15.2), виробництва Тайвань під наглядом компанії Мікролайф АГ, Швейцарія [111] (див. п. 6.2). У Табл. 15.1 наведені технічні параметри приладу згідно супроводжуючої документації.



Рис. 15.2 – Тонometr марки «Micriline BP 3AG1».

Табл. 15.1

Технічні характеристики тонометру «Micriline BP 3AG1».

Параметр	Значення
Діапазон вимірювання	30 ... 280 мм рт. ст.
Стандартне відхилення (діапазон 30 – 280 ммоль/л)	± 3 мм рт. ст.
Відносна точність вимірювання пульсу	$\pm 5\%$
Діапазон роб. температур	$-20 \dots +50^{\circ}\text{C}$

Вимірювання проводилися з різними інтервалами в часі, результати вимірювань зберігалися у вигляді Excel-таблиці. Завантажимо в Maple результати вимірювання систолічного і діастолічного АТ та частоти пульсу (частоти пульсових хвиль) у вигляді таблиць даних (Рис. 15.3).

ПОРАДА. Завантаження даних з Excel у таблиці даних Maple здійснюйте за кроками, які наведено у Практиці 2.

1	2	3	
1	140.0	165.0	145.0
2	152.0	154.0	148.0
3	151.0	150.0	152.0
<			>

а)

1	2	3	
1	83.0	77.0	84.0
2	76.0	106.0	109.0
3	86.0	83.0	101.0
<			>

б)

1	2	3	
1	78.0	84.0	80.0
2	82.0	80.0	84.0
3	86.0	82.0	83.0
<			>

в)

Рис. 15.3 – Вигляд таблиць з даними вимірювань у Maple: а) СТ; б) ДТ; в) ЧП.

♦ 1.1 Систолічний АТ

Конвертація результатів вимірювань систолічного АТ у вектор довжиною в 128 відліків:

```
> Data_s:=convert(datas, Vector[row], datatype=float[8]):
numelems(Data_s);
```

128

Зобразимо результати вимірювань систолічного («верхнього») тиску графічно (Systolic pressure, SP):

```
> gs:=plots[listplot] (Data_s, view=[0..128, 125..195],
tickmarks=[12,8], style=pointline, symbolsize=15, thickness=1,
color="DarkGrey", labels=["Samples", "SP, mmHg"], caption="Рис. 1 -
Часовий ряд первинних спостережень: систолічний АТ.", plotopt,
size=[hor, 0.9*ver]): gs;
```

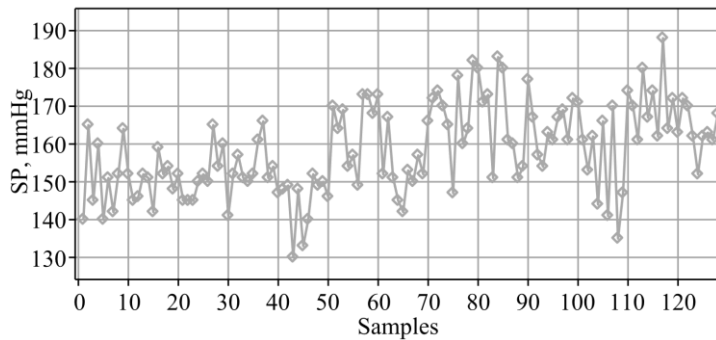


Рис. 15.4 – Часовий ряд первинних спостережень систолічного тиску.

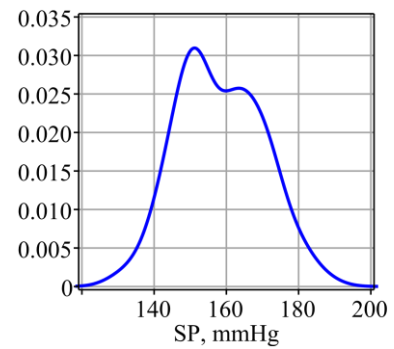


Рис. 15.5 – Розподіл густини ймовірності СТ.

Визначимо статистичні характеристики результатів, показаних на Рис. 15.4, а також побудуємо розподіл густини ймовірностей результатів вимірювання (Рис. 15.5):

```
> Statistics:-KernelDensityPlot(Data_s, linestyle=solid,
thickness=2, color=blue, labels=["SP, mmHg", ""], caption="Рис. 2
- Розподіл густини ймовірності: систолічний АТ.", tickmarks=[5,8],
view=[120..200, 0..0.035], size=[ver, ver], plotopt): ws:=%:
> A:=[[Statistics:-DataSummary(Data_s), ws]]:
Tabulate(A, interior=none, exterior=none, width=70):
```

mean = 158.195
standarddeviation = 11.635
skewness = 0.144
kurtosis = 2.441
minimum = 130.000
maximum = 188.000
cumulativeweight = 128.000

(15.1)

Як видно з результатів статистичного аналізу (15.1), стандартне відхилення результатів практичних вимірювань помітно більше вказаного виробником у технічній документації (майже ± 12 мм рт. ст. проти ± 3 мм рт. ст. з Табл. 15.1). Окрім того, розподіл на Рис. 15.5 доволі сильно відрізняється від нормального гаусівського розподілу і виразно вказує на дві близькі, але різні моди (див. [☞ Практика 2](#)): приблизно при 150 та 165 мм рт. ст.

Мода та медіана, як і середнє (математичне сподівання), являють собою характеристики статистичного розподілу будь-якої випадкової величини (див. п. 2.1.1 та п. 6.2).

Для спектрального аналізу ряду обчислимо дискретне ШПФ від спостережень за СТ за $2^7 = 128$ вимірювань за методом, викладеним у [☞ Практика 3](#). Як вам вже відомо, особливість ПФ полягає у тому, що довжина набору, який перетворюються, повинна дорівнювати цілому ступеню двійки. Для знаходження показника ступеня знайдемо логарифм за основою 2 від кількості вимірів:

```
> log[2] (128.);
7.000
> fST:=FFT(Data_s[1 .. 2^7]):
# ШПФ для набору зі 128 вимірювань з масиву даних
numelems(%);
fST := [1.790 × 103 + 0.1, -9.617 + 43.634 I, 8.768 + 1.443 I, 1.387
+ 19.415 I, -7.714 + 20.881 I, 3.967 - 6.767 I, -28.362 + 6.922 I,
7.368 - 6.761 I, 3.843 - 9.059 I, ..., ... 119 Array entries not shown]
```

(15.2)

Знайдемо амплітудну характеристику отриманого Фур'є-образу (15.2) сигналу СТ:

```
> mST:=Magnitude(fST); # Коефіцієнти (амплітуди) Фур'є
numelems(%);
mST := [1.790 × 103, 44.682, 8.886, 19.464, 22.260, 7.844, 29.195, 10.000,
9.840, ..., ... 119 Array entries not shown]
```

(15.3)

Фур'є-образ (15.3) в частотному домені у вигляді послідовності (переліку), елементами якого є двокомпонентні переліки типу [частота, амплітуда]:

```
> samplingRate:=1:
SP_FD:=[seq([i*samplingRate/2^7, mST[i]],
i=1..(1/2)*numelems(mST))]: whattype(SP_FD);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{128} & 1.790 \times 10^3 \\ \frac{1}{64} & 44.682 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

64 × 2 Matrix

(15.4)

Для візуалізації Фур'є-образу (15.4) сигналу СТ в частотному домені (частоти в 1/вимірювання) побудуємо графік, до якого додамо корисні елементи для зручності аналізу, а саме: вертикальні лінії, що позначають позиції пікових значень, а також відповідні їм написи на площині графіка. Отже, графік Фур'є-образу (15.4):

```
> plots[listplot](SP_FD, axis[1]=[gridlines=[10, color="DimGrey"]],
labels=[typeset("Frequency, ", '1/count'), "Magnitude"],
linestyle=solid, thickness=1, color="Grey", caption="Рис. 3 а -
Фур'є-спектр масиву даних вимірювань систолічного АТ.",
view=[0..0.5,0..40], plotopt, size=[hor, ver]): sa_SP:=%;
# Графік Фур'є-спектру набору даних вимірювань СТ
```

Далі для побудови вертикальних ліній та написів нам знадобляться координати пікових значень. Звісно, для цього можна просто скористатися командою **FindPeakPoints** пакету **SignalProcessing**. Однак, для розуміння процедури аналізу ми зробимо в класичний спосіб.

```
> SignalProcessing[FindPeakPoints](SP_FD, includeendpoints=false,
output=[peaks], minimumheight=15):
```

Спочатку приблизно оцінимо координати піків за віссю абсцис (частота) за порядком спадання їх ординат і одразу визначимо приблизно їх номери в масиві коефіцієнтів Фур'є (15.3):

```
> ['max_1'=128*0.055, 'max_2'=128*0.039, 'max_3'=128*0.492,
'max_4'=128*0.195, 'max_5'=128*0.102];
[max_1=7.040, max_2=4.992, max_3=
62.976, max_4=24.960, max_5=13.056]
```

Отже, для визначення координат пікових значень відсортуємо за спаданням першу половину коефіцієнтів Фур'є з (15.3) і виведемо перші 8 значень:

```
> sort_filt:=sort([seq(mST[i], i=1..(1/2)*numelems(mST))], '>'):
pks:=Vector([seq(sort_filt[i], i=1..8)]);
```

$$pks := \begin{bmatrix} 1.790 \times 10^3 \\ 44.682 \\ 29.195 \\ 22.260 \\ 21.406 \\ 19.464 \\ 17.273 \\ 16.896 \end{bmatrix}$$

(15.5)

З послідовності (15.5) бачимо, що перші два значення не відповідають точкам перегину, а лише характеризують точку розриву 1-го роду та точку, яка має особливість. Першому максимуму відповідає 3-тє значення.

```
> pks[3]; pks[4]; pks[5]; pks[7]; pks[8];
# Абсцис-координати піків для написів та вертикальних ліній
29.195
22.260
21.406
17.273
16.896
```

```
> lin_max:=plot([<<0.055, 0.055>|<0, pks[3]>>, <<0.039, 0.039>|<0,
pks[4]>>, <<0.492, 0.492>|<0, pks[5]>>, <<0.195, 0.195>|<0,
```

```

pks[7]>>, <<0.102, 0.102>|<0, pks[8]>>], style=line,
linestyle=dash, thickness=0, color=[red, "DimGrey", "DimGrey",
"DimGrey", "DimGrey"], axes=boxed, view=[0..0.5,0..50], plotopt,
size=[hor, ver]):
# lin_max - графік вертикальних ліній, що відповідають максимумам амплі-
туд
> lin_title12:=plots[textplot] ([[0.044, pks[3], "1"], [0.028,
pks[4], "2"]], 'align'={ 'above', 'right' }, 'color'="Red",
axes=boxed, view=[0..0.5,0..50], plotopt, size=[400, 240],
'font'=["times", "bold", 14]):
lin_title345:=plots[textplot] ([[0.482, pks[5], "3"], [0.185,
pks[7], "4"], [0.093, pks[8], "5"]], 'align'={ 'above', 'right' },
'color'="Blue", axes=boxed, view=[0..0.5,0..50], plotopt,
size=[400, 240], 'font'=["times", "normal", 14]):
# lin_title - текстові написи до вертикальних ліній
plots[display](sa_SP, lin_title12, lin_title345, lin_max,
caption="Рис. 3 6 - Фур'є-спектр набору даних СТ з позначенням пі-
ків.", view=[0..0.5,0..40], plotopt, size=[hor, ver]);

```

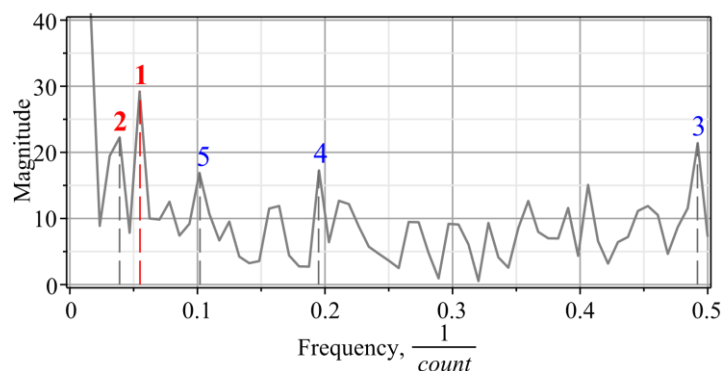


Рис. 15.6 – Фур'є-спектр набору даних СТ з позначенням піків.

Побудуємо корелограму набору даних вимірювань СТ (Рис. 15.7):

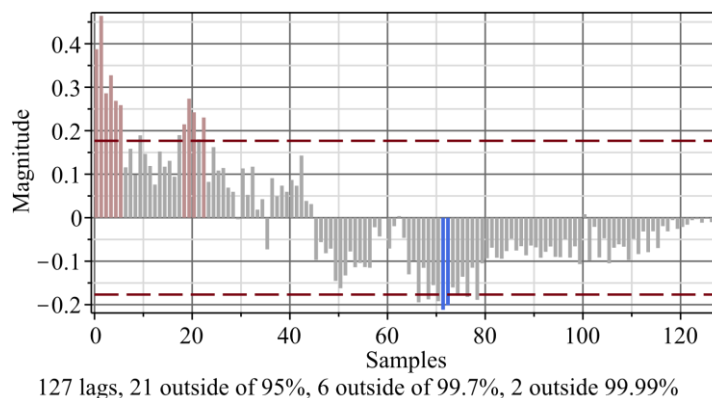


Рис. 15.7 – Корелограма даних вимірювань систолічного АТ.

```

> Statistics[Correlogram] (Data_s,axis=[gridlines=[color="DimGrey"]],
linestyle=solid, thickness=1, colorscheme=["valuesplit", [-
infinity..-0.2="RoyalBlue", -0.2..0.2="DarkGray",
0.2..infinity="RosyBrown"]], labels=["Samples", "Magnitude"],
title="Рис. 4 - Корелограма даних вимірювань систолічного АТ.\n",
plotopt, size=[hor, 1.1*ver]);

```

Для співставлення значення перших трьох максимумів спектрограми СТ на Рис. 15.6 із обрахунком моди набору (з Рис. 15.5) визначимо абсолютні частоти значень в цьому наборі, використавши команду **Tally** пакету **Statistics**:

```
> freq_data_s:=Statistics[Tally] (Data_s): numelems(freq_data_s);
sp_dat:=[seq(lhs(freq_data_s[i]), i=1..40)]:
freq_dat:=[seq(rhs(freq_data_s[i]), i=1..40)]:
```

```

      164.000 = 4
      148.000 = 3
      ...
40 element Vector[column]

```

(15.6)

Визначимо, які значення СТ найчастіше зустрічаються в ряді (15.6), для чого обмежимо нижнє значення частоти, тобто, візьмемо тільки ті значення, які зустрічаються не менше 6-ти разів:

```
> max_sp:=SignalProcessing[FindPeakPoints](sp_dat, freq_dat,
includeendpoints=false, output=[peaks], minimumheight=6);
```

```

max_sp :=
      145.000  6.000
      152.000 12.000
      154.000  6.000
      161.000  7.000

```

(15.7)

Побудуємо гістограму (Рис. 15.8) ряду (15.6):

```
> Statistics[Histogram](Data_s, discrete=true, style=polygon,
colorscheme=["valuesplit", [0..0.02="DimGrey", 0.02..0.04="Blue",
0.04..infinity="Red"]], labels=["SP, mmHg", "Absolute Frequency"],
caption="Рис. 5 - Абсолютні частоти даних систолічного АТ.",
view=[130..190, 0..0.1], plotopt, size=[0.9*hor, 0.9*ver]);
```

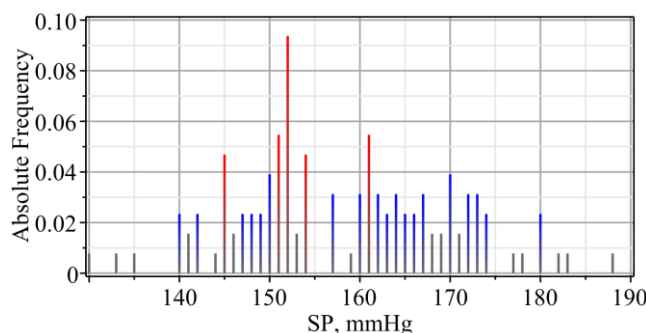


Рис. 15.8 – Абсолютні частоти даних систолічного АТ.

Отже, як видно з (15.7) та Рис. 15.8, найчастіше зустрічаються значення СТ у 152 мм рт. ст., 161 та 145 і 154 мм рт. ст.

Визначимо моду за допомогою команди **Mode** пакету **Statistics** і порівняємо її значення з результатами оцінок у (15.7):

```
> 'Maximum'=<'Mode_SP'=Statistics[Mode] (Data_s),
'max_sp[2,1]'=max_sp[2,1]>;
```

```

Maximum =
      Mode_SP = 151.171
      max_sp2,1 = 152.000

```

Як бачимо, результат розрахунку моди дещо відрізняється від значення систолічного тиску, яке зустрічається найчастіше, а саме 152 мм рт. ст., що обумовлено особливостями обчислення статистичної моди [112].

♦ 1.2 Діастолічний АТ

Наведемо далі набір даних з результатами вимірювань діастолічного («нижнього») АТ та його статистичні характеристики. Завантажимо та конвертуємо набір у вектор довжиною в 128 відліків:

```
> Data_d:=convert(datad, Vector[row], datatype=float[8]):
numelems(Data_d);
```

Зобразимо ряд вимірювань ДТ (Diastolic pressure, DP) графічно (Рис. 15.9):

```
> gd:=plots[listplot](Data_d, view=[0..128,65..115],
style=pointline, symbolsize=15, thickness=2, tickmarks=[12,8],
color="DarkGrey", labels=["Samples","DP, mmHg"], caption="Рис. 6 -
```

Часовий ряд первинних спостережень: діастолічний АТ.", size=[hor, ver], plotopt): gd;

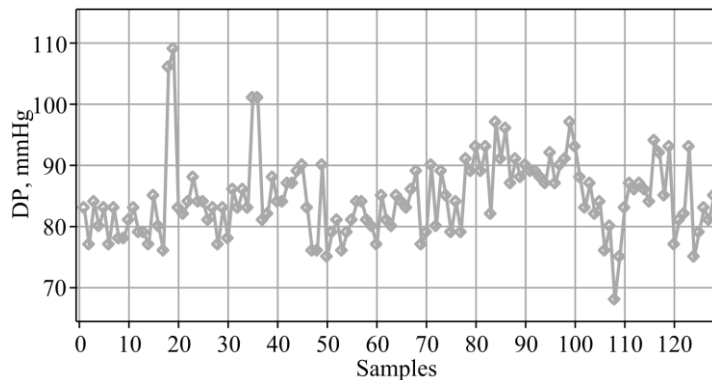


Рис. 15.9 – Часовий ряд первинних спостережень діастолічного тиску.

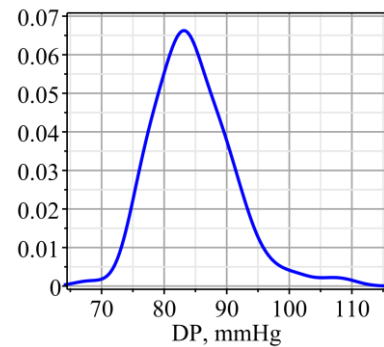


Рис. 15.10 – Розподіл густини ймовірності ДТ.

Визначимо статистичні характеристики ряду на Рис. 15.9, і побудуємо графік розподілу густини ймовірності значень ДТ (Рис. 15.10):

```
> A:=[Statistics:-DataSummary(Data_d), wd]:
  Tabulate(A, interior=None, exterior=None, width=70):
> Statistics:-KernelDensityPlot(Data_d, thickness=2, color=blue,
  labels=["DP, mmHg", ""], caption="Рис. 7 - Розподіл густини ймові-
  рності: діастолічний АТ.", view=[65..115, 0..0.07], size=[ver,
  ver], plotopt): wd:=%:
```

```

      mean = 84.609
      standarddeviation = 6.377
      skewness = 0.873
      kurtosis = 4.740
      minimum = 68.000
      maximum = 109.000
      cumulativeweight = 128.000
```

(15.8)

Звертаємо увагу на більшу асиметрію ($skewness=0.873$) та ексцес ($kurtosis=4.74$) цього на вигляд одномодового розподілу (15.8), ніж у СТ, що може бути наслідком прихованої двомодальності розподілу густини ймовірності вимірів діастолічного тиску, аналогічно вимірам систолічного АТ.

Визначимо абсолютні частоти значень в наборі даних ДТ:

```
> freq_data_d:=Statistics[Tally](Data_d): numelems(freq_data_d);
dp_dat:=[seq(lhs(freq_data_d[i]), i=1..numelems(freq_data_d))]:
freq_dp_dat:=[seq(rhs(freq_data_d[i]),
i=1..numelems(freq_data_d))]:
```

```

      83.000 = 14
      68.000 = 1
      ...
26 element Vector[column]
```

(15.9)

Визначимо, які значення СТ найчастіше зустрічаються в ряді значень (15.9), для чого обмежимо нижнє значення частоти, тобто візьмемо тільки ті, що зустрічаються не менше 4-ох разів:

```
> max_dp:=SignalProcessing[FindPeakPoints](dp_dat, freq_dp_dat,
includeendpoints=false, output=[peaks], minimumheight=8);
```

```

max_dp :=
      79.000  8.000
      81.000  9.000
      83.000 14.000
      87.000  8.000
```

(15.10)

Побудуємо гістограму за набором даних ДТ з (15.9) на Рис. 15.11:

```
> Statistics[Histogram](Data_d, discrete=true, style=polygon,
  colorscheme=["valuesplit", [0..0.02="DimGrey", 0.02..0.04="Blue",
  0.04..infinity="Red"]], labels=["DP, mmHg", "Absolute Frequency"],
  caption="Рис. 8 - Абсолютні частоти даних діастолічного АТ.",
  view=[65..110, 0..0.12], plotopt, size=[0.9*hor, 0.9*ver]);
```

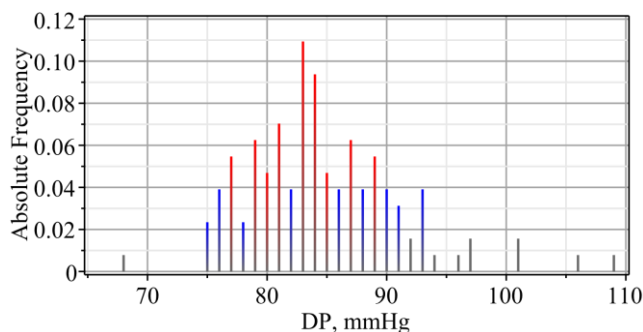


Рис. 15.11 – Абсолютні частоти даних діастолічного АТ.

Отже, найчастіше зустрічаються значення ДТ у 83 мм рт. ст, 81 та 79 і 87.

Визначимо моду за допомогою команди **Mode** пакету **Statistics** і порівняємо її значення з результатами оцінок у (15.10):

```
> 'Maximum'=<'Mode_DP'=Statistics[Mode](Data_d),
  'max_dp[3,1]'=max_dp[3,1]>;
```

$$\text{Maximum} = \begin{bmatrix} \text{Mode_DP} = 83.135 \\ \text{max_dp}_{3,1} = 83.000 \end{bmatrix}$$

♦ 1.3 Частота пульсу

Нарешті, проаналізуємо результати вимірів частоти пульсових хвиль (ЧП) і зобразимо їх на графіку (Рис. 15.12), вісь ординат якого HR – Heart Rate:

```
> Data_p:=convert(datap, Vector[row], datatype=float[8]):
  numelems(Data_p);
> gp:=plots[listplot](Data_p, view=[0..128,60..115],
  style=pointline, symbolsize=15, thickness=2, tickmarks=[12,8],
  color="DarkGrey", labels=["Samples","HR, bpm"], caption="Рис. 9 -
  Часовий ряд первинних спостережень ЧПХ.", size=[hor, ver],
  plotopt): gp;
```

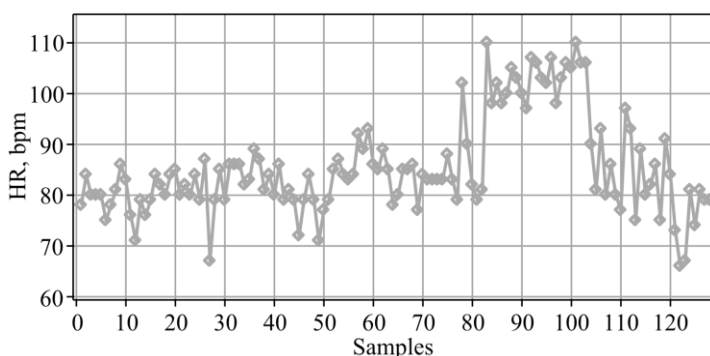


Рис. 15.12 – Часовий ряд первинних спостережень частоти пульсу.

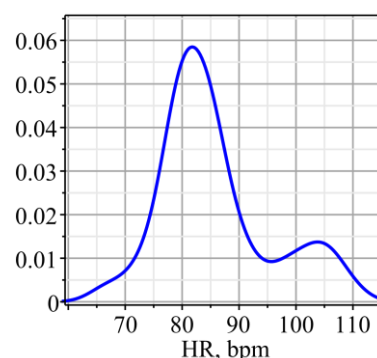


Рис. 15.13 – Розподіл густини ймовірності частоти пульсу.

Визначимо статистичні параметри ряду ЧП:

```
> A:=[Statistics:-DataSummary(Data_p), wp]: Tabulate(A,
  interior=None, exterior=None):
```

```

    mean = 85.602
    standarddeviation = 9.661
    skewness = 0.825
    kurtosis = 3.143
    minimum = 66.000
    maximum = 110.000
    cumulativeweight = 128.000

```

(15.11)

Графік густини ймовірності розподілу ЧП (Рис. 15.13):

```

> Statistics:-KernelDensityPlot(Data_p, thickness=2, caption="Рис.
  10 - Розподіл густини ймовірності: частота пульсу.", color=blue,
  labels=["HR, bpm", ""], view=[60..115, 0..0.065], size=[ver, ver],
  plotopt): wp:=%:

```

Звертаємо увагу на відмінності розподілу (15.11) від нормального гаусівського розподілу:

- виразну двомодальність (82 уд./хв. та 104 уд./хв.);
- відносно велику асиметрію ($skewness = 0.825$);
- помітний ексцес ($kurtosis = 3.143$).

Визначимо абсолютні частоти значень в наборі даних ЧП:

```

> freq_data_p:=Statistics[Tally](Data_p): numelems(freq_data_p);
p_dat:=[seq(lhs(freq_data_p[i]), i=1..numelems(freq_data_p))]:
freq_p_dat:=[seq(rhs(freq_data_p[i]),
i=1..numelems(freq_data_p))]:

```

```

    83.000 = 8
    71.000 = 2
    ⋮
34 element Vector[column]

```

(15.12)

Визначимо, які значення СТ найчастіше зустрічаються в ряді значень (15.12), для чого обмежимо нижнє значення частоти, тобто візьмемо тільки ті, що зустрічаються не менше 3-ох разів:

```

> max_p:=SignalProcessing[FindPeakPoints](p_dat, freq_p_dat,
  includeendpoints=false, output=[peaks], minimumheight=8);

```

```

max_p :=
    79.000 14.000
    84.000 10.000
    86.000 9.000

```

(15.13)

Побудуємо гістограму за (15.12):

```

> Statistics[Histogram](Data_p, discrete=true, style=polygon,
  colorscheme=["valuesplit", [0..0.02="DimGrey", 0.02..0.04="Blue",
  0.04..infinity="Red"]], labels=["HR, bpm", "Absolute Frequency"],
  caption="Рис. 11 - Абсолютні частоти даних пульсу.",
  view=[65..110, 0..0.12], plotopt, size=[0.9*hor, 0.89*ver]);

```

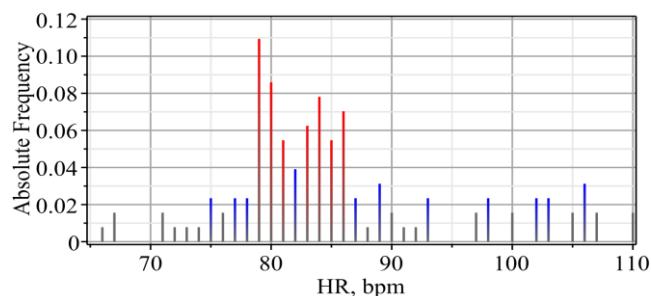


Рис. 15.14 – Абсолютні частоти даних пульсу.

Як бачимо з (15.13) та графіка на Рис. 15.14, найчастіше зустрічаються значення пульсу у 84 уд./хв, 79 та 86. Визначимо моду і порівняємо її значення з результатами оцінок в (15.13):

```
> 'Maximum'=<'Mode_P'=Statistics[Mode](Data_p),  
'max_p[1,1]'=max_p[1,1]>;
```

$$Maximum = \begin{bmatrix} Mode_P = 81.753 \\ max_p_{1,1} = 79.000 \end{bmatrix} \quad (15.14)$$

Відмінність у значеннях в (15.14) обумовлена двомадальністю розподілу значень пульсу Рис. 15.13.

15.2.2 Вейвлет-аналіз, стискання та очищення сигналів

♦ 2.1 Систолічний АТ

Скористаємося технікою дискретного вейвлет-аналізу [168]. Для цього здійсимо пряму вейвлет-декомпозицію сигналу СТ в базисі вейвлетів Хаара:

```
> A1,A2:=DWT(Data_s);  
convert(A1, list): coef_app:=Vector(%);  
convert(A2, list): coef_det:=Vector(%);
```

$$\begin{bmatrix} 152.500 \\ 152.500 \\ 145.500 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

64 element Vector[column]

(15.15)

$$\begin{bmatrix} 12.500 \\ 7.500 \\ 5.500 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

64 element Vector[column]

(15.16)

Зобразимо коефіцієнти вейвлет-розкладання в базисі Хаара (див. п. 6.1.2) для першого рівня (15.15), (15.16) графічно (див. Рис. 15.15 та Рис. 15.16):

```
> Statistics:-ColumnGraph(A1, color="DarkOrange",  
labels=["Coefficient number", "SP, mmHg"], caption="Рис. 12 - Вей-  
влет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень апроксимації (систол. АТ).",  
view=[0..64, 0..200], distance=0.2, width=0.8, style=polygon,  
plotopt, size=[0.8*hor, ver]);  
# Перший рівень апроксимації - вейвлет-коефіцієнти  
Statistics:-ColumnGraph(A2, color="Blue", labels=["Coefficient  
number", " "], caption="Рис. 13 - Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й  
рівень деталізації\n (систол. АТ).", view=[0..64, -20..20],  
distance=0.2, width=0.8, style=polygon, plotopt, size=[0.8*hor,  
ver]);  
# Перший рівень деталізації - вейвлет-коефіцієнти
```

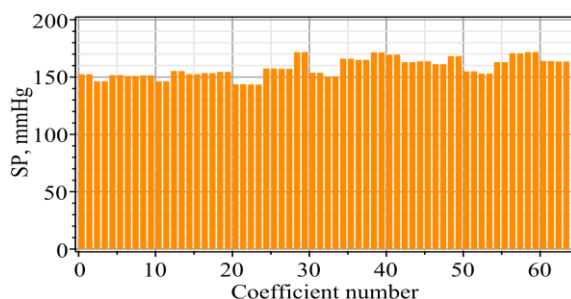


Рис. 15.15 – ВК Хаара:
1-й рівень апроксимації (СТ).

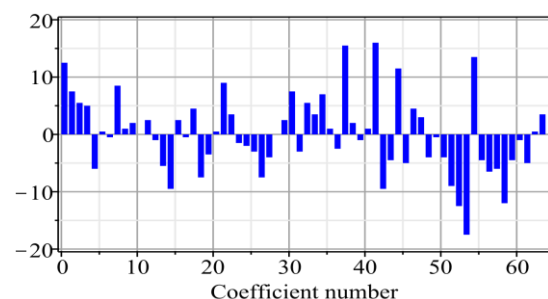


Рис. 15.16 – ВК Хаара:
1-й рівень деталізації (СТ).

З Рис. 15.16 видно, що коефіцієнти деталізації 1-го рівня мають вигляд випадкових (шумових) сигналів з практично нульовим середнім значенням.

Визначимо статистичні характеристики коефіцієнтів деталізації (15.16) для подальшого очищення сигналу систолічного АТ:

```
> tb1:=Statistics:-DataSummary(A2);
```

$$tb1 := \begin{bmatrix} \text{mean} = -0.023 \\ \text{standarddeviation} = 6.684 \\ \text{skewness} = 0.175 \\ \text{kurtosis} = 3.183 \\ \text{minimum} = -17.500 \\ \text{maximum} = 16.000 \\ \text{cumulativeweight} = 64.000 \end{bmatrix} \quad (15.17)$$

Відмітимо практично нульове математичне сподівання коефіцієнтів деталізації в (15.17) та помітне відхилення від нормального розподілу по ексцесу ($kurtosis = 3.183$).

Універсальний шумовий поріг (див. п. 6.1.2 та п. 11.2) для очищення коефіцієнтів деталізації від шумів визначається [144]:

- стандартним відхиленням ($\text{rhs}(tb1[2])$ в (15.17)),
- довжиною масиву.

Для коефіцієнтів деталізації 1-го рівня універсальний шумовий поріг:

$$T := \text{evalf}(\text{rhs}(tb1[2]) * \sqrt{2 * \ln(64)}); \quad T := 19.276 \quad (15.18)$$

Далі проводимо процедуру «м'якого трешолдінгу» коефіцієнтів деталізації, тобто, обнулимо всі коефіцієнти, абсолютна величина яких менша від порогу (15.18), і зменшимо на величину порогу (15.18) абсолютні величини всіх коефіцієнтів, абсолютна величина яких перевищує цей поріг [144], [168]. Процедура м'якого трешолдінгу над набором коефіцієнтів деталізації задається наступним чином:

```
> A2r:=Array(map(z-> `if` (abs(z)<=T, 0, z-sign(z)*T), A2),
  datatype=float[8]);
A2r := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., ..., 55 Array entries not shown]
> z-sign(z)*T; min(A2r);
z - 19.276
0.
```

Подивимося, як виглядає набір коефіцієнтів деталізації після процедури трешолдінгу (Рис. 15.17):

```
> Statistics:-ColumnGraph(A2r, color="Blue", thickness=2,
  distance=0.3, width=0.3, labels=["Coefficient number", "SP, bpm"],
  caption="Рис. 14 - Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу (систол. АТ).", tickmarks=[7,16],
  style=line, size=[0.8*hor, ver], plotopt);
# Перший рівень деталізації після трешолдінгу
```

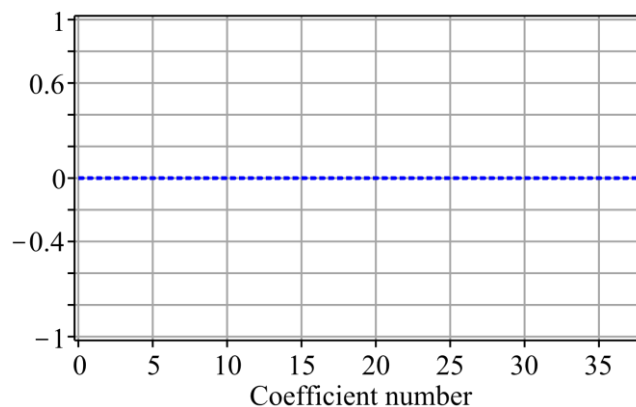


Рис. 15.17 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу (систол. АТ).

Рис. 15.17 свідчить, що всі коефіцієнти деталізації 1-го рівня можна покласти рівними нулю. Отже, гіпотеза про те, що вони мають шумову природу, що висловлена вище, підтверджується.

Продовжимо очищення на наступному масштабному рівні (2-ий рівень). Пряма вейвлет-декомпозиція децимованого сигналу систоли (коефіцієнтів апроксимації 1-го рівня):

```
> B1,B2:=DWT(A1);
```

$$\begin{bmatrix} 152.500 \\ 146.250 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

32 element Vector[column]

(15.19)

$$\begin{bmatrix} 0. \\ 0.750 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

32 element Vector[column]

(15.20)

Побудуємо стовпчасту діаграму коефіцієнтів B1 (15.19) та B2 (15.20):

```
> Statistics:-ColumnGraph(B1, color="Orange", distance=0.2,
width=0.8, labels=["Coefficient number","SP, bpm"], caption="Рис.
15 - Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень аппроксимації (систол.
AT).", view=[0..32,0..200], style=polygon, size=[0.8*hor, ver],
plotopt);
# 2-й рівень аппроксимації - вейвлет-коефіцієнти
Statistics:-ColumnGraph(B2, color="Blue", distance=0.2, width=0.8,
labels=["Coefficient number"," "], caption="Рис. 16 - Вейвлет-кое-
фіцієнти Хаара: 2-й рівень деталізації (систол. AT).",
view=[0..32,-10..10], tickmarks=[7,16], style=polygon,
size=[0.8*hor, ver], plotopt);
# 2-й рівень деталізації - вейвлет-коефіцієнти
```

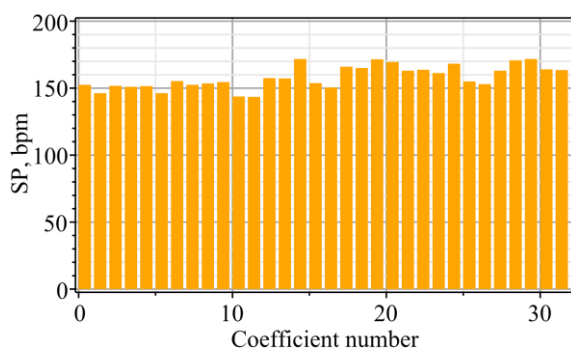


Рис. 15.18 – ВК Хаара:
2-й рівень аппроксимації (СТ).

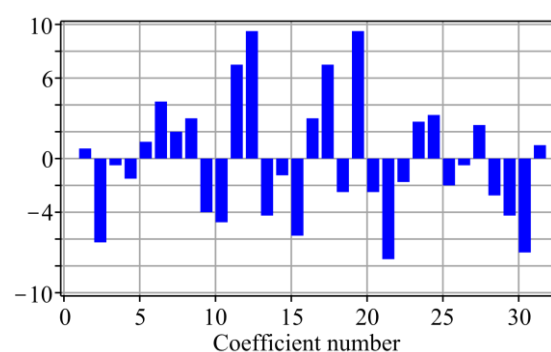


Рис. 15.19 – ВК Хаара:
2-й рівень деталізації (СТ).

Визначимо статистичні характеристики та шумовий поріг для коефіцієнтів деталізації 2-го рівня (15.20):

```
> tb2:=Statistics:-DataSummary(B2);
```

$$tb2 := \begin{bmatrix} \text{mean} = -0.070 \\ \text{standarddeviation} = 4.506 \\ \text{skewness} = 0.406 \\ \text{kurtosis} = 2.495 \\ \text{minimum} = -7.500 \\ \text{maximum} = 9.500 \\ \text{cumulativeweight} = 32.000 \end{bmatrix}$$

(15.21)

Відповідно універсальний шумовий поріг для коефіцієнтів деталізації B2:

```
> T2:=evalf(rhs(tb2[2])*sqrt(2*ln(32)));
T2 := 11.863
```

(15.22)

Оскільки поріг (15.22) перевищує абсолютне значення всіх коефіцієнтів деталізації 2-го рівня, зрозуміло, що внаслідок трешолдінгу вони всі обнуляться, що можна бачити з діаграми на Рис. 15.20:

```
> B2r:=Array(map(z -> `if` (abs(z)<=T2, 0, z-sign(z)*T2), B2),
datatype=float[8]);
B2r := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., ..., 23 Array entries not shown]
```

```
> Statistics:-ColumnGraph(B2r, color="Blue", thickness=2,
distance=0.3, width=0.7, labels=["Coefficient number"," "],
caption="Рис. 17 - Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень деталіза-
ції після м'якого трешолдінгу (систол. АТ).", view=[0..32,-3..3],
style=line, tickmarks=[7,16], size=[0.8*hor, ver], plotopt);
# Другий рівень деталізації після м'якого трешолдінгу
```

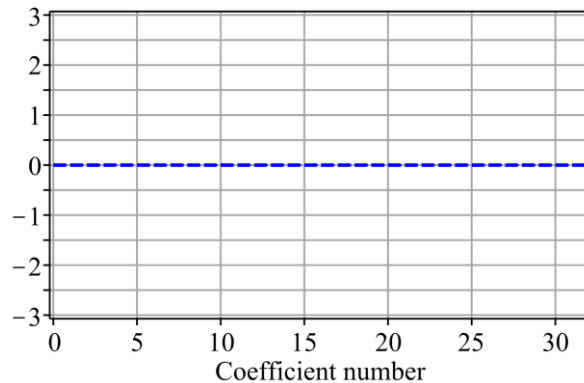


Рис. 15.20 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу (систол. АТ).

Рис. 15.20 підтверджує зроблений вище висновок про очищені від шумів коефіцієнти деталізації 2-го рівня.

Наступним етапом є **відновлення** (синтез) первинного сигналу із застосуванням очищених від шумів коефіцієнтів деталізації 2-го та 1-го рівнів, а також зворотного вейвлет-перетворення:

```
> A1:=InverseDWT(B1, B2r);
# Відновлення (синтез) першого рівня апроксимації
```

```

152.500
152.500
146.250
⋮
64 element Vector[column]
```

(15.23)

```
> Data_s_ref2:=InverseDWT(A1, A2r);
# Синтез очищеного вхідного сигналу
```

```

152.500
152.500
152.500
⋮
128 element Vector[column]
```

(15.24)

Зобразимо синтезований сигнал систолічного АТ (15.24):

```
> gsr2:=plots[listplot]([Data_s_ref2], thickness=2, color=red,
tickmarks=[15,12], labels=["Номер вимірювання","Систолічний тиск,
мм.рт.ст."], caption="Рис. 18 а - Часовий ряд очищених спостере-
жень: систолічний АТ.", view=[0..128,125..195], plotopt,
size=[hor, ver]): gsr2:
```

Порівняємо відновлений сигнал СТ з первинним, який спочатку перефарбуємо у світло-сірий колір:

```
> gs_grey:=plots[listplot](Data_s, view=[0..128, 125..195],
tickmarks=[12,8], style=pointline, symbolsize=15, thickness=1,
color=grey, labels=["Samples","SP, mmHg"], plotopt, size=[hor,
ver]): gs_grey:
# Часовий ряд первинних спостережень СТ з Рис. 15.4
> plots[display](gs_grey, gsr2, size=[hor, ver], caption="Рис. 18 б
- Первинний та синтезований (очищений від шумів) сигнал систоліч-
ного АТ.");
```

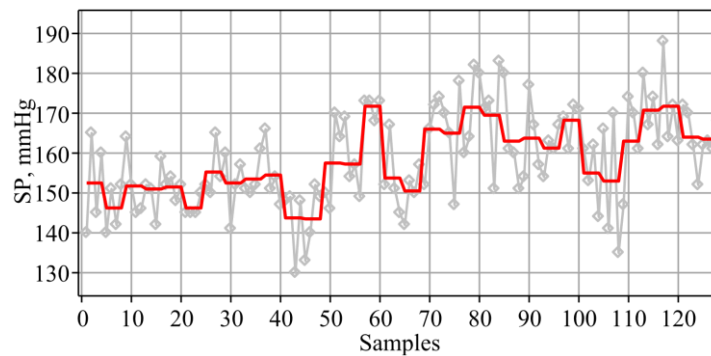


Рис. 15.21 – Первинний (з Рис. 15.4) та синтезований (очищений від шумів) сигнал систолічного АТ.

Синтезований сигнал з Рис. 15.21 (червона крива) непогано узгоджується з первинним, втім, є значно гладкішим.

Визначимо статистичні параметри синтезованого сигналу (15.24) та порівняємо з параметрами первинного сигналу (15.17) систолічного АТ:

```
> Array([[`Синтезований сигнал Систол. АТ`, `Оригінальний сигнал
Систол. АТ`], [Statistics:-DataSummary(Data_s_ref2), Statistics:-
DataSummary(Data_s)]]);
```

Синтезований сигнал Систол. АТ	Оригінальний сигнал Систол. АТ
$mean = 158.195$	$mean = 158.195$
$standarddeviation = 8.439$	$standarddeviation = 11.635$
$skewness = 0.080$	$skewness = 0.144$
$kurtosis = 1.894$	$kurtosis = 2.441$
$minimum = 143.500$	$minimum = 130.000$
$maximum = 171.750$	$maximum = 188.000$
$cumulativeweight = 128.000$	$cumulativeweight = 128.000$

(15.25)

Порівняємо далі графіки розподілу густини ймовірності синтезованого та первинного сигналів СТ:

```
> Statistics:-KernelDensityPlot(Data_s_ref2, thickness=2, color=red,
caption="Рис. 19 а - Розподіл густини ймовірності очищеного від
шумів сигналу систолічного АТ", plotopt): wsr2:=%:
plots[display](ws, wsr2, tickmarks=[6,6], labels=["SP, mmHg", ""],
legend=["Real", "Filtered"], legendstyle=[location=right],
caption="Рис. 19 б - Порівняння розподілів первинного та очищеного
сигналів систол. АТ.", view=[120..200, 0..0.05], plotopt,
size=[0.9*hor, ver]);
```

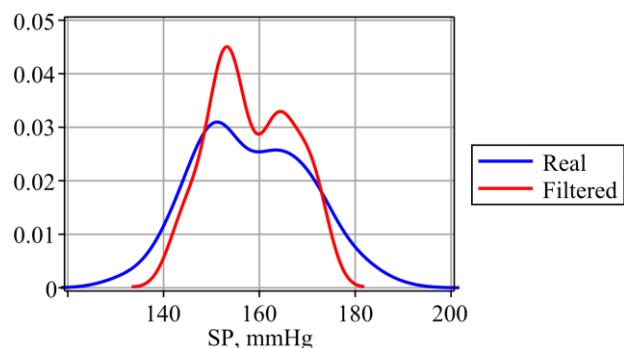


Рис. 15.22 – Розподіли ймовірності первинного та очищеного сигналів СТ.

З Рис. 15.22 видно, що розподіл ймовірностей очищеного від шумів сигналу (червона крива) є вужчим і вищим від розподілу первинного сигналу, завдяки меншій дисперсії (15.25). Втім, синтезований сигнал не лише зберігає характерну двомодовість в розподілі ймовірностей первинного сигналу, після очищення вона виглядає навіть більш яскраво.

```
> Statistics:-Correlation(Data_s_ref2, Data_s);
```

0.725 (15.26)

Коефіцієнт кореляції (15.26) **очищених** даних (15.24) з **первинним** сигналом (див. Рис. 15.4) є позитивним і високим (у діапазоні від 0.5 до 1.0).

Зверніть увагу: очищений сигнал (15.24) відновлюється по 32 коефіцієнтах масиву B1 (15.19), решта коефіцієнтів вейвлет-розкладання обнулена під час трешолдінгу (очищення). У порівнянні з первинним сигналом, який визначається 128 відліками, масив B1 за об'ємом рівно в 4 рази менший за відновлений після вейвлет-розкладання. Таким чином, вейвлет-розкладання на двох рівнях та процедура трешолдінгу коефіцієнтів деталізації, які мають явно шумове походження, дозволила стиснути первинний сигнал систолічного тиску в 4 рази без втрати значної кількості інформації.

Побудуємо корелограму набору фільтрованих даних вимірювань СТ:

```
> Statistics[Correlogram] (Data_s_ref2,
axis=[gridlines=[color="DimGrey"]], linestyle=solid, thickness=1,
colorscheme=["valuesplit", [-infinity..-0.2="Blue", -
0.2..0.2="DarkGrey", 0.2..infinity="Red"]], labels=["Samples", "
"], title="Рис. 20 - Корелограма даних вимірювань систолічного
AT.\n", plotopt, size=[hor, ver]);
```

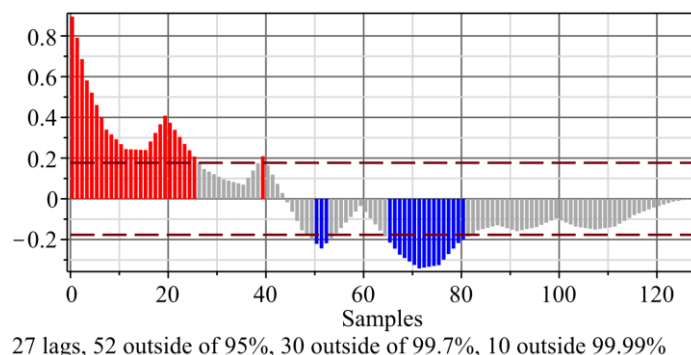


Рис. 15.23 – Корелограма даних вимірювань СТ.

Зробимо спектральний аналіз очищеного сигналу СТ, для чого здійснимо ШПФ над набором даних (команда **FFT**):

```
> fST_filt:=FFT(Data_s_ref2[1 .. 2^7]);
# ШПФ для очищеного від шумів набору зі 128 вимірювань
```

$$\begin{bmatrix} 1.790 \times 10^3 + 0.1 \\ -9.336 + 43.083i \\ 9.727 + 1.649i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

128 element Vector[column] (15.27)

Знайдемо амплітудну характеристику Фур'є-образу сигналу (15.27):

```
> mST_filt:=Magnitude(fST_filt);
# Коефіцієнти (амплітуди) Фур'є
```

$$\begin{bmatrix} 1.790 \times 10^3 \\ 44.083 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

128 element Vector[column] (15.28)

Зобразимо характеристику (15.28) в частотному домені у вигляді послідовності, елементами якого є двокомпонентні переліки типу [частота, амплітуда]:

```
> samplingRate:=1:
SP_FD_filt:=[seq([i*samplingRate/2^7, mST_filt[i]],
i=1..(1/2)*numelems(mST_filt))]:
whattype(SP_FD_filt);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{128} & 1.790 \times 10^3 \\ \frac{1}{64} & 44.083 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

64 × 2 Matrix

(15.29)

Візуалізуємо Фур'є-образ сигналу СТ (15.29) в частотному домені (частоти в 1/вимірювання):

```
> plots[listplot](SP_FD_filt, thickness=2, color="Red", axis=[grid-
lines=[color="DimGrey"]], labels=[typeset("Frequency, ",
'1/count'), "Magnitude"], caption="Рис. 21 - Фур'є-спектр очище-
ного від шумів набору СТ.", view=[0..0.5,0..40], plotopt,
size=[hor, 1.1*ver]): sa_SP_filt:=%;

> plots[display](sa_SP, sa_SP_filt, lin_title12, lin_title345,
tickmarks=[12,6], axis[1]=[gridlines=[12, color="DimGrey",
subticks=true]], labels=[typeset("Frequency, ", '1/count'),
"Magnitude"], legend=["Real", "Filtered", " ", " "],
legendstyle=[location=right], caption="Рис. 22 - Фур'є-спектри пе-
рвинного та очищеного від шумів наборів даних систолічного АТ.",
view=[0..0.5,0..40], plotopt, size=[1.3*hor, 1.1*ver]);
```

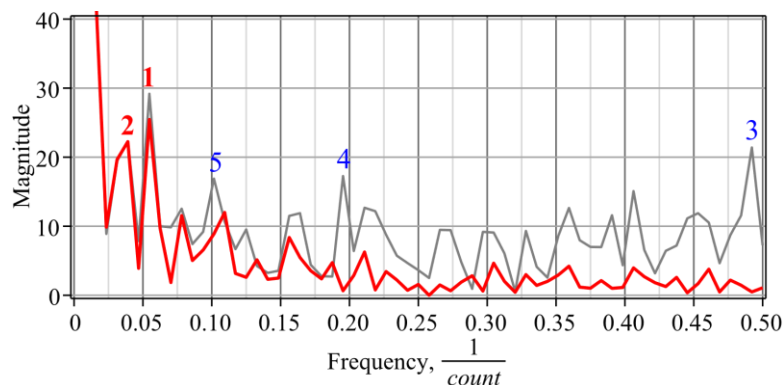


Рис. 15.24 – Фур'є-спектри первинного та очищеного від шумів даних СТ.

♦ 2.2 Діастолічний АТ

Без детальних пояснень проведемо вейвлет-розкладання та очищення сигналу діастолічного АТ. Прямая вейвлет-декомпозиція сигналу ДТ (Рис. 15.25):

```
> A1d,A2d:=DWT(Data_d):
Statistics:-ColumnGraph(A2d, color="Blue", caption="Рис. 23 - Вей-
влет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації (діастол. АТ).",
labels=["Coefficient number"," "], view=[0..64,-16..16],
tickmarks=[7,16], distance=0.2, width=0.8, style=polygon,
size=[0.8*hor, ver], plotopt);
# 1-й рівень, коефіцієнти деталізації
```

Статистичні характеристики коефіцієнтів деталізації 1-го рівня:

```
> tbd1:=Statistics:-DataSummary(A2d);
```

$$tbd1 := \begin{bmatrix} \text{mean} = -0.609 \\ \text{standarddeviation} = 3.919 \\ \text{skewness} = 0.394 \\ \text{kurtosis} = 6.939 \\ \text{minimum} = -13.000 \\ \text{maximum} = 15.000 \\ \text{cumulativeweight} = 64.000 \end{bmatrix}$$

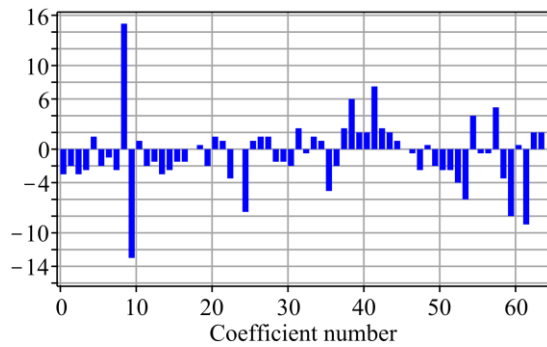


Рис. 15.25 – ВК Хаара:
1-й рівень деталізації (ДТ).

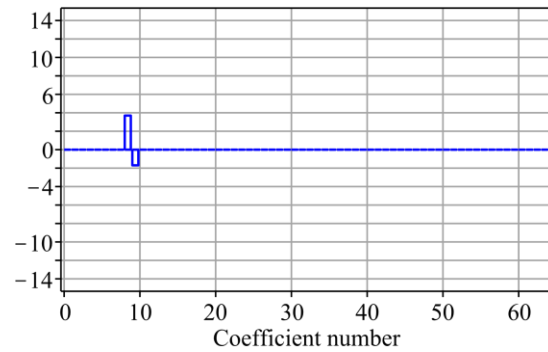


Рис. 15.26 – ВК Хаара: 1-й рівень
деталізації після м'якого трешолдінгу (ДТ).

Універсальний шумовий поріг для даних ДТ, який визначається стандартним відхиленням та довжиною ряду:

$$> \text{Td} := \text{evalf}(\text{rhs}(\text{tbd1}[2]) * \sqrt{2 * \ln(64)});$$

$$\text{Td} := 11.303 \quad (15.30)$$

Шумовий поріг (15.30) трохи менший від максимального значення для коефіцієнтів деталізації, тому після трешолдінгу повинно залишитися пару ненульових коефіцієнтів:

```
> A2dr:=Array(map( z -> `if`(abs(z) <= Td, 0,
z-sign(z)*Td), A2d), datatype=float[8]);
# Процедура м'якого трешолдінгу
A2dr := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 3.697, ..., 55 Array entries not shown]
```

Стовпцева діаграма для коефіцієнтів деталізації 1-го рівня даних ДТ (Рис. 15.26):

```
> Statistics:-ColumnGraph(A2dr, color="Blue", caption="Рис. 24 -
Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації після м'якого
трешолдінгу (діастол. АТ).", labels=["Coefficient number", "DP,
bpm"], view=[0..64, -15..15], tickmarks=[7,16], distance=0.2,
width=0.8, style=line, size=[0.8*hor, ver], plotopt);
# Перший рівень деталізації після трешолдінгу
```

Насправді, з 64 коефіцієнтів на Рис. 15.25 ненульовими залишилися лише 2 найбільші за модулем (Рис. 15.26). Продовжимо очищення сигналу на 2-му рівні. Пряма вейвлет-декомпозиція децимованого сигналу діастолі:

```
> B1d, B2d:=DWT(A1d):
```

Статистичні параметри вдруге очищеного сигналу діастолі:

```
> tbd2:=Statistics:-DataSummary(B2d);
```

$$tbd2 := \begin{bmatrix} \text{mean} = 0.703 \\ \text{standarddeviation} = 2.502 \\ \text{skewness} = 0.280 \\ \text{kurtosis} = 4.324 \\ \text{minimum} = -5.250 \\ \text{maximum} = 8.250 \\ \text{cumulativeweight} = 32.000 \end{bmatrix}$$

Універсальний шумовий поріг для очищених від шумів даних ДТ, який визначається стандартним відхиленням та довжиною набору (32 коефіцієнти):

$$> \text{Td2} := \text{evalf}(\text{rhs}(\text{tbd2}[2]) * \sqrt{2 * \ln(32)});$$

$$\text{Td2} := 6.587$$

```
> B2dr:=Array(map(z -> `if`(abs(z) <= Td2, 0,
z-sign(z)*Td2), B2d), datatype=float[8]);
B2dr := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 1.663, ..., 23 Array entries not shown]
```

Всі 32 коефіцієнти деталізації 2-го рівня після трешолдінгу отримали нульові значення. Подивимося, як виглядатиме результат обробки (Рис. 15.27):

```
> A1d:=InverseDWT(B1d, B2dr):
# Відновлення (синтез) першого рівня апроксимації
Data_d_ref2:=InverseDWT(A1d, A2dr):
# Відновлення (синтез) вхідного сигналу
```

```

> gdr2:=plots[listplot]([Data_d_ref2], thickness=2,
  tickmarks=[15,12], color=red, labels=["Samples","DP, bpm"],
  caption="Рис. 25 а - Часовий ряд очищених спостережень: діастолічний АТ.", view=[0..128, 70..110], size=[hor, ver], plotopt): gdr2:
> gd_grey:=plots[listplot](Data_d, tickmarks=[12,8],
  style=pointline, symbolsize=15, thickness=1, color=grey,
  labels=["Samples","DP, mmHg"], plotopt, size=[hor, ver]): gd_grey:
# Часовий ряд первинних спостережень ДТ з Рис. 15.9

```

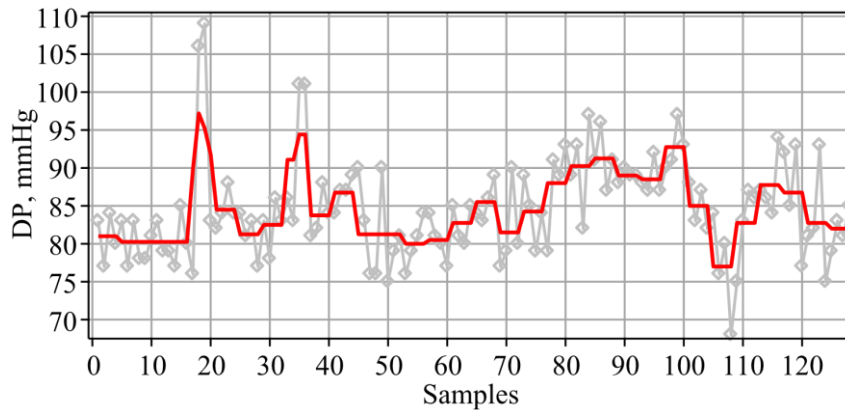


Рис. 15.27 – Первинний та синтезований сигнали для ДТ.

```

> plots[display](gd_grey, gdr2, caption="Рис. 25 б - Первинний та синтезований сигнали для діастолічного АТ.");

```

Як видно з Рис. 15.27, синтезований сигнал ДТ в цілому відповідає особливостям первинного сигналу, але значно гладкіший, як і очищений сигнал СТ.

Порівняємо статистичні характеристики первинного та очищеного сигналів діастолічного АТ:

```

> Array([[`Синтезований сигнал` \n          Діаст. АТ`, `Оригінальний
сигнал` \n          Діаст. АТ`], [Statistics:-
DataSummary(Data_d_ref2), Statistics:-DataSummary(Data_d)]]);

```

Синтезований сигнал Діаст. АТ	Оригінальний сигнал Діаст. АТ
$mean = 84.609$	$mean = 84.609$
$standarddeviation = 4.335$	$standarddeviation = 6.377$
$skewness = 0.650$	$skewness = 0.873$
$kurtosis = 2.669$	$kurtosis = 4.740$
$minimum = 77.000$	$minimum = 68.000$
$maximum = 97.197$	$maximum = 109.000$
$cumulativeweight = 128.000$	$cumulativeweight = 128.000$

```

> Statistics:-KernelDensityPlot(Data_d_ref2, thickness=2,
  caption="Рис.26 а - Розподіл густини ймовірності: діастолічний АТ.",color=red, labels=["TDP, bpm", ""], size=[hor, ver],
  plotopt): wdr2:=%:

```

```

> plots[display](wd, wdr2, legend=["Real", "Filtered"],
  legendstyle=[location=right], caption="Рис. 26 б - Розподіли гус-
тини ймовірності первинного та очищеного сигналів (діастол. АТ).",
  tickmarks=[6,6], view=[65..115, 0..0.11], size=[0.9*hor, ver],
  plotopt);

```

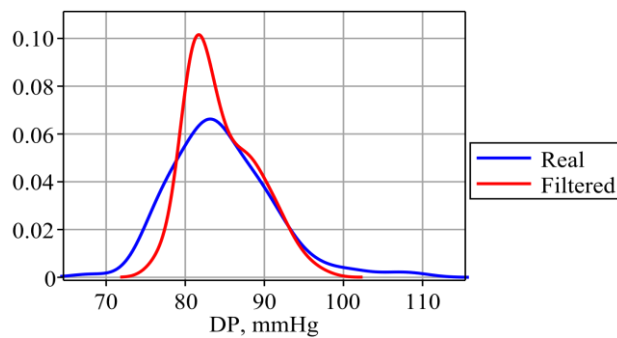


Рис. 15.28 – Розподіли густини ймовірності первинного та очищеного сигналів (ДТ).

Асиметрія ($skewness = 0.650$) розподілу густини ймовірностей, зумовлена його прихованою дво-modalністю і виглядає більш виразною для очищеного сигналу (червона лінія). Кореляція між *очищеними* та *первинними* даними є високою, що свідчить про збереження інформативності:

```
> Statistics:-Correlation(Data_d_ref2,Data_d);
0.727
```

♦ 2.3 Частота пульсу

Здійнемо вейвлет-аналіз, стискання та очищення ряду даних частоти пульсу (ЧП) та подивимося на графік вейвлет-коефіцієнтів Рис. 15.29:

```
> A1p,A2p:=DWT(Data_p);
# Пряма вейвлет-декомпозиція сигналу систоли
> Statistics:-ColumnGraph(A2p, color="Blue", caption="Рис. 27 - Вей-
влет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації (ЧП).",
labels=["Coefficient number","HR, bpm"], view=[0..64,-10..12],
tickmarks=[7,16], labels=["Coefficient number",""],
distance=0.2, width=0.8, style=polygon, size=[0.8*hor, ver],
plotopt);
# 1-й рівень деталізації. ЧП
```

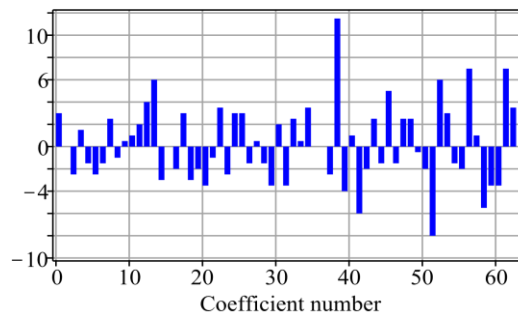


Рис. 15.29 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації (ЧП).

Статистичні характеристики коефіцієнтів деталізації 1-го рівня даних ЧП:

```
> tbp1:=Statistics:-DataSummary(A2p);
```

$tbp1 :=$	$mean = 0.227$
	$standarddeviation = 3.463$
	$skewness = 0.506$
	$kurtosis = 3.662$
	$minimum = -8.000$
	$maximum = 11.500$
	$cumulativeweight = 64.000$

Універсальний шумовий поріг для даних пульсу визначається стандартним відхиленням та довжиною набору (64 коефіцієнти):

```
> Tp:=evalf(rhs(tbp1[2])*sqrt(2*ln(64)));
Tp := 9.987
```

```

> A2pr:=Array(map( z -> `if`(abs(z) <= Tp, 0, z-
  sign(z)*Tp), A2p), datatype=float[8]);
# Процедура м'якого трешолдінгу
  A2pr := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., ..., 55 Array entries not shown]
> Data_p_ref:=InverseDWT(A1p,A2pr):
> Array([[`Синтезований сигнал Пульса`, `Оригінальний сигнал
  Пульса`], [Statistics:-DataSummary(Data_p_ref), Statistics:-
  DataSummary(Data_p)]]);

```

Синтезований сигнал Пульса Оригінальний сигнал Пульса

<i>mean = 85.602</i>	<i>mean = 85.602</i>
<i>standarddeviation = 9.024</i>	<i>standarddeviation = 9.661</i>
<i>skewness = 0.967</i>	<i>skewness = 0.825</i>
<i>kurtosis = 3.108</i>	<i>kurtosis = 3.143</i>
<i>minimum = 69.500</i>	<i>minimum = 66.000</i>
<i>maximum = 108.000</i>	<i>maximum = 110.000</i>
<i>cumulativeweight = 128.000</i>	<i>cumulativeweight = 128.000</i>

Для очищення сигналу на 2-ому рівні: знову здійснюємо пряму вейвлет-декомпозиція децимованого сигналу ЧП:

```

> B1p,B2p:=DWT(A1p):

```

Статистичні параметри набору даних сигналу ЧП:

```

> tbp2:=Statistics:-DataSummary(B2p):

```

<i>mean = 0.711</i>
<i>standarddeviation = 3.438</i>
<i>skewness = 0.976</i>
<i>kurtosis = 5.453</i>
<i>minimum = -5.500</i>
<i>maximum = 12.000</i>
<i>cumulativeweight = 32.000</i>

Універсальний шумовий поріг для очищених від шуму даних ЧП, який визначається стандартним відхиленням та довжиною набору (32 коефіцієнти):

```

> Tp2:=evalf(rhs(tbp2[2])*sqrt(2*ln(32)));
  Tp2 := 9.053

```

Процедура м'якого трешолдінгу даних ЧП на 2-му рівні:

```

> B2pr:=Array(map(z-> `if`(abs(z) <= Tp2, 0, z-sign(z)*Tp2), B2p),
  datatype=float[8]);
  B2pr := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., ..., 23 Array entries not shown]
> A1p:=InverseDWT(B1p,B2pr):
# Відновлення (синтез) першого рівня апроксимації
Data_p_ref2:=InverseDWT(A1p,A2pr):
# Синтез вхідного сигналу
> gpr2:=plots[listplot]([Data_p_ref2], thickness=2,
  tickmarks=[15,12], color=red, caption="Рис. 28 а - Часовий ряд
  очищених спостережень: частота пульсу.", labels=["Samples", "HR,
  bpm"], view=[0..128, 70..110], plotopt): gpr2:
> gp_grey:=plots[listplot](Data_p, tickmarks=[12,8],
  style=pointline, symbolsize=15, thickness=1, color=grey,
  labels=["Samples", "HR, bpm"], plotopt, size=[hor, ver]): gp_grey:
# Часовий ряд первинних спостережень пульсу з Рис. 15.12
> plots[display](gp_grey, gpr2, caption="Рис. 28 б - Первинний та
  синтезований сигнали ЧП.");

```

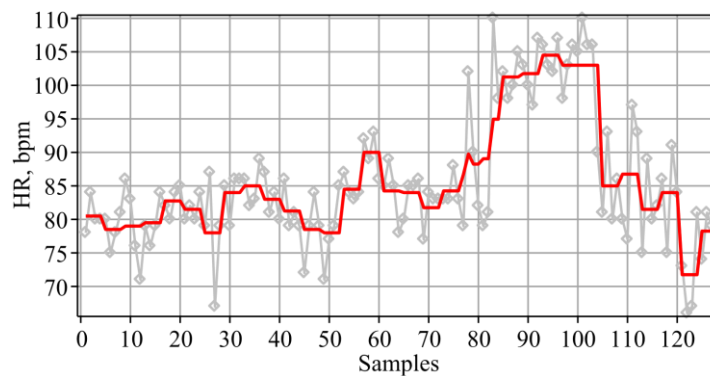


Рис. 15.30 – Первинний та синтезований сигнали ЧП.

```
> Array([[`Синтезований сигнал Пульса`, `Оригінальний сигнал Пульса`], [Statistics:-DataSummary(Data_p_ref2), Statistics:-DataSummary(Data_p)]]);
```

Синтезований сигнал Пульса Оригінальний сигнал Пульса

mean = 85.602	mean = 85.602
standarddeviation = 8.346	standarddeviation = 9.661
skewness = 1.096	skewness = 0.825
kurtosis = 3.245	kurtosis = 3.143
minimum = 71.750	minimum = 66.000
maximum = 104.500	maximum = 110.000
cumulativeweight = 128.000	cumulativeweight = 128.000

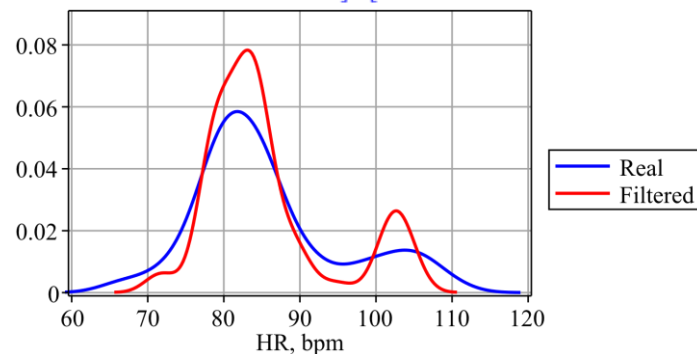


Рис. 15.31 – Розподіли густини ймовірності первинного та очищеного сигналів ЧП.

Асиметрія розподілу густини ймовірностей, зумовлена його полімодальністю, виглядає більш виразною для очищеного сигналу.

Коефіцієнт кореляції *очищених* даних з *первинним* сигналом є позитивним і високим (від 0.5 до 1.0), що підтверджується також візуально на Рис. 15.30 та Рис. 15.31.

```
> Statistics:-Correlation(Data_p_ref2,Data_p);
```

0.877

15.3 КОРЕЛЯЦІЇ ПЕРВИННИХ, ОЧИЩЕНИХ І ЗГЛАДЖЕНИХ СИГНАЛІВ

Дослідимо, чи є і якої сили зв'язок (кореляція) між парами рядів досліджуваного масиву даних показників роботи ССС, оскільки в первинних даних кореляція була прихована і проявлялася лише як позитивна кореляція низького рівня.

15.3.1 Розрахунки кореляції рядів даних СТ, ДТ і ЧП

Обрахуємо коефіцієнти кореляції для первинних даних і представимо їх у Табл. 15.2 (рядок «Первинні сигнали»). Як видно, для всіх пар рядів даних коефіцієнт кореляції, по-перше, позитивний, а по-друге – більше нуля. Однак, його значення для пар рядів СТ – ЧП та СТ – ДТ недостатнє (> 0.5), аби можна було стверджувати про взаємну впливовість частоти пульсу на систолічний тиск, або систолічного тиску на діастолічний.

Табл. 15.2

Кореляції пар наборів даних СД, ДТ та ЧП.

	Систол. АТ / Пульс	Діастол. АТ / Пульс	Систол. АТ / Діастол. АТ
Первинні сигнали	> Statistics:- Correlation (Data_p,Data_s) ; 0.233	> Statistics:- Correlation (Data_d,Data_p) ; 0.302	> Statistics:- Correlation (Data_s,Data_d) ; 0.243
Очищені сигнали: Waveletes	> Statistics:- Correlation (Data_p_ref2, Data_s_ref2) ; 0.353	> Statistics:- Correlation (Data_p_ref2, Data_d_ref2) ; 0.539	> Statistics:- Correlation (Data_d_ref2, Data_s_ref2) ; 0.290
Згладжені сигнали: MovingAverage	> Statistics:- Correlation (data_pp_MA, data_ss_MA) ; 0.406	> Statistics:- Correlation (data_pp_MA, data_dd_MA) ; 0.569	> Statistics:- Correlation (data_dd_MA, data_ss_MA) ; 0.327
Згладжені сигнали: MovingMedian	> Statistics:- Correlation (data_pp_MM, data_ss_MM) ; 0.285	> Statistics:- Correlation (data_pp_MM, data_dd_MM) ; 0.599	> Statistics:- Correlation (data_dd_MM, data_ss_MM) ; 0.370

Примітка: після додавання в комірки таблиці всіх команд розрахунку кореляції для пар наборів даних, не виходячи з таблиці, перейдіть у контекстну панель справа і в налаштуваннях таблиці вимкніть опції "Show input" та "Show expression labels". В такий спосіб в таблиці не відображатимуться командні рядки і залишаться тільки результати розрахунків без їх нумерації, що набагато зручніше для аналізу.

З Табл. 15.2 також видно, що зв'язок для наборів ДТ – ЧП найбільший, до того ж ще й значний (< 0.5), тобто, можна стверджувати, що для досліджуваного пацієнта зміна пульсу впливає на зміну ДТ, і навпаки. На відміну від решти пар наборів, для яких силу зв'язку є незначною і її можна вважати не впливовою.

Порівняємо, як впливають методи очищення або згладжування на кореляцію наборів даних. Розрахунок кореляції для пар даних, очищених вейвлетами, наведено у другому рядку Табл. 15.2.

Зробимо статистичне згладжування первинних вимірів СТ методами «ковзного середнього» (див. п. 2.1.2) та «ковзного (рухливого) медіанного». У Maple в програмному пакеті **Statistics** для цього призначені команди **MovingAverage** та **MovingMedian**:

```
> data_ss_MA:=Statistics:-MovingAverage(Data_s,5) :
# SP (5 - posint; moving window size)
data_dd_MA:=Statistics:-MovingAverage(Data_d,5) :
# DP (5 - posint; moving window size)
data_pp_MA:=Statistics:-MovingAverage(Data_p,5) :
# HR (5 - posint; moving window size)

> data_ss_MM:=Statistics:-MovingMedian(Data_s,5) :
# SP (5 - posint; moving window size)
data_dd_MM:=Statistics:-MovingMedian(Data_d,5) : /
# DP (5 - posint; moving window size)
data_pp_MM:=Statistics:-MovingMedian(Data_p,5) :
# HR (5 - posint; moving window size)
```

Розрахунки кореляції для пар згладжених рядів даних СТ, ДТ та ЧП наведені у 3-му та останньому рядках Табл. 15.2.

З результатів розрахунків кореляції для пар первинних, очищених та згладжених рядів даних показників роботи ССС, представлених у Табл. 15.2, принаймні для досліджуваного пацієнта спостерігається цікаве явище: методи очищення і згладжування збільшують коефіцієнт кореляції для наборів у порівнянні з первинними сигналами.

15.3.2 Візуалізація результатів регресійного та кореляційного аналізу рядів даних ДТ та ЧП

Далі, оскільки оцінки зручніше робити з візуалізованих результатів дослідження кореляції, звернемося до методу точкової діаграми (діаграма розсіювання, англ. Scatter plot). Наведемо результати візуалізації лише для пари ДТ – ЧП. Для решти пар пропонуємо здійснити це самостійно. В Maple для цієї задачі є команда **ScatterPlot**

з пакету **Statistics**. Також підключимо опцію відображення *lowess* – лінійне згладжування (*lowess smoothing* [169]).

Оскільки кореляція та лінійна регресія пов'язані, подивимося, як виглядатиме рівняння лінійної апроксимації для первинних та очищених вейвлетами даних ДТ і ЧП і одразу задамо побудову графіків (Рис. 15.32, Рис. 15.33):

```
> reg_HR_DP:=Statistics:-Fit(a1+b1*x, Data_p, Data_d, x);
pl_pd_fit:=plot(%, x=65..110, thickness=2, color=["OrangeRed",
"MediumBlue"], linestyle=dash):
# Рівняння та графік лінійної регресії. Первинні дані ДТ та ЧП
reg_HR_DP := 67.539 + 0.199x
```

Побудуємо точкову діаграму первинних даних ДТ та ЧП (Рис. 15.32):

```
> Statistics:-ScatterPlot(Data_p, Data_d, lowess, degree=1,
thickness=[2, 0],
symbol=solidcircle, symbolsize=16, color=["DarkGrey", "DimGrey"],
tickmarks=[10,6], labels=["HR, bpm", "DP, mmHg"],
legend=[points="DP & HR\nFilt.data", lowess="LOWESS\nsmoothing"],
legendstyle=[location=right],
caption="Рис. 32 а - Точкова діаграма наборів ДТ та пульсу (пер-
винні дані).", view=[65..110,70..100], size=[hor, 0.9*ver],
plotopt); pl_pd:=%:
# Точкова діаграма. Первинні дані ДТ та ЧП

> plots:-display(pl_pd, pl_pd_fit, labels=["HR, bpm", "DP, mmHg"],
tickmarks=[10,5], legend=[" ", "Linear Fit"],
legendstyle=[location=right], caption=typeset("Рис. 32 б - Позити-
вна кореляція між діастолічним тиском та частотою пульсу (первинні
дані). Коефіцієнт кореляції: ", `Corr_P_DP`, "."),
view=[65..110,70..100], size=[hor, ver], plotopt);
# Точкова діаграма та регресія. Первинні дані ДТ та ЧП
```

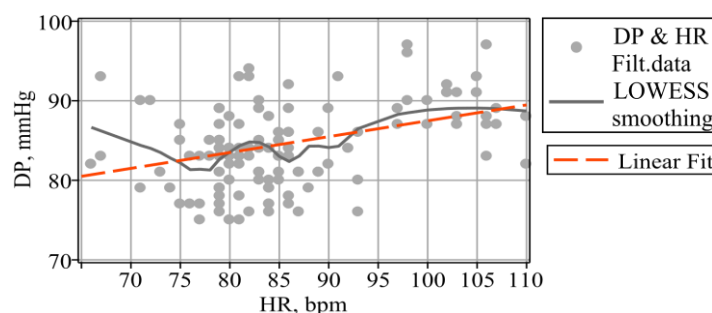


Рис. 15.32 – Позитивна кореляція між ДТ та ЧП (первинні дані).

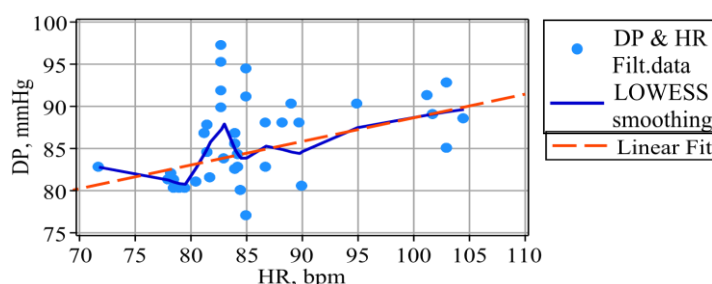


Рис. 15.33 – Позитивна кореляція між ДТ та ЧП (очищені дані).

Тепер подивимося, як виглядатиме рівняння лінійної апроксимації для очищених від шумів даних ДТ та ЧП і, відповідно, точкова діаграма (Рис. 15.33):

```
> regr_HR_DP_cl:=Statistics:-Fit(a1+b1*x, Data_p_ref2, Data_d_ref2,
x);
pl_pd_cl_fit:=plot(%, x=65..110, thickness=2, color=["OrangeRed",
"MediumBlue"], linestyle=dash):
# Рівняння та графік лінійної регресії. Очищені дані ДТ та ЧП
reg_HR_DP_cl := 60.624 + 0.280x
```

```
> Statistics:-ScatterPlot(Data_p_ref2, Data_d_ref2, lowess,
  degree=1, thickness=[2, 0],
  symbol=solidcircle, symbolsize=16, color=["DodgerBlue",
  "MediumBlue"], tickmarks=[10,6], labels=["HR, bpm", "DP, mmHg"],
  legend=[points="DP & HR\nFilt.data", lowess="LOWESS\nsmoothing"],
  legendstyle=[location=right],
  caption="Рис. 33 а - Точкова діаграма наборів ДТ та пульсу (очи-
  щені дані).", view=[70..100,75..100], size=[hor, 0.9*ver],
  plotopt); pl_clpd:=%;
# Точкова діаграма. Очищені дані ДТ та ЧП

> plots:-display(pl_clpd, pl_pd_cl_fit, labels=["HR, bpm", "DP,
  mmHg"], tickmarks=[10,5], legend=[" ", "Linear Fit"],
  legendstyle=[location=right], caption=typeset("Рис. 33 б - Позити-
  вна кореляція між ДТ та ЧП (очищені дані). Коефіцієнт кореляції:
  ", `Corr_HR_DP_f`, "."), view=[70..110, 75..100], size=[hor, ver],
  plotopt);
# Точкова діаграма та регресія. Очищені дані ДТ та ЧП
```

З графіку на Рис. 15.33 можна бачити, що зв'язок поміж величинами ДТ і частотою пульсову прослідковується, однак його силу оцінити в такий спосіб дуже складно. Втім, як показав розрахунок в Табл. 15.2, між ДТ і ЧП існує доволі висока і позитивна кореляція, отже, зростання однієї величини веде до зростання іншої. Іншими словами, високі значення частоти пульсу свідчать про вищий діастолічний тиск крові, і навпаки.

15.4 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. Що являють собою вейвлети Хаара? Поясніть їх форму на рисунку.
2. Для чого використовуються вейвлети Хаара?
3. Поясніть як здійснюється ДВП Хаара та зміст з фізичної точки зору результату такого перетворення.
4. Дайте визначення коефіцієнтам апроксимації та деталізації.
5. Поясніть зміст поняття моди в статистиці. Що вона визначає?
6. Як відрізняється кількість точок масиву даних після здійснення операції ДПВ Хаара?
7. Чим визначається універсальний шумовий поріг для очищення коефіцієнтів від шумів? Запишіть формулу та поясніть її.
8. В чому полягає процедура «м'якого трешолдінгу»? Як здійснюється математично?
9. Що таке децимований сигнал?
10. Яка гіпотеза була висунута у цій лабораторній роботі? Чи підтвердилася вона?
11. Коефіцієнт кореляції між якими наборами даних обчислюється в цій роботі?
12. У скільки разів ДПВ скоротило масив даних без втрати якості?
13. Що виявив кореляційний аналіз очищених даних?
14. Поясніть зміст методів «ковзного середнього» та «ковзного медіанного». Що дозволяють здійснювати ці методи?
15. Поясніть зв'язок між регресійним та кореляційним аналізом.

♦ 1.2 Maple

1. Який програмний пакет в Maple призначений для аналізу одновимірних дискретних сигналів за допомогою ДПВ?
2. Який програмний пакет дозволяє реалізовувати програмований доступ до Maple-документів?
3. Яку команду окрім plot можна використовувати в Maple для побудови графіків двовимірних наборів даних, наприклад таких як набір вимірювань пульсу? Поясніть особливості цієї команди.
4. Яка команда і з якого пакету призначена для побудови розподілу ймовірностей результатів вимірювання?
5. Яка команда і з якого програмного пакету дозволяє відображати результати виконання команд у табличному вигляді? Поясніть її застосування та можливості.
6. Які команди призначені для прямого та зворотного дискретного вейвлет-перетворення? Поясніть їх синтаксис та результати роботи.
7. Поясніть особливості команди для графічного аналізу коефіцієнтів вейвлет-розкладання в базисі Хаара.
8. Поясніть, як реалізована процедура "м'якого трешолдінгу" мовою Maple.
9. Яка команда розраховує коефіцієнт кореляції? Запишіть її в трьох формах.
10. З якого програмного пакет і які саме команди дозволяють застосовувати методи «ковзного середнього» та «ковзного медіанного» до рядів даних?

15.5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. За варіантами в Табл. 15.3 виконайте індивідуальне завдання з вейвлет, регресійного та кореляційного аналізів одновимірних наборів даних.
2. Порівняйте з результатами, отриманими у методичних рекомендаціях.
3. Наведіть приклади застосування вейвлет-аналізу сигналів або даних з посиланням на джерела (Інтернет ресурси, наукові видання).
4. Проаналізуйте результати. Сформулюйте висновки.

Табл. 15.3

Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 6.

Параметр	Номери значень			
Номери варіантів	1	2	3	4
Частота пульсу (ЧП)	1–32	33–64	65–96	97–128
Систолічний тиск (СТ)	+	+	+	+
Діастолічний тиск (ДТ)				
Номери варіантів	5	6	7	8
Частота пульсу (ЧП)	17–48	49–80	81–112	1–64
Систолічний тиск (СТ)				
Діастолічний тиск (ДТ)	+	+	+	+
Номери варіантів	9	10	11	12
Частота пульсу (ЧП)	1–32	33–64	65–96	97–128
Систолічний тиск (СТ)				
Діастолічний тиск (ДТ)	+	+	+	+
Номери варіантів	13	14	15	16
Частота пульсу (ЧП)	17–48	49–80	81–112	1–64
Систолічний тиск (СТ)	+	+	+	+
Діастолічний тиск (ДТ)				

ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ ЗАСОБАМИ MAPLE

- 1  Програмні засоби роботи з файлами зображень.
- 2  Гістограми яскравостей та конволюційні маски.

16.1 ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РОБОТИ З ФАЙЛАМИ ЗОБРАЖЕНЬ

Програмний пакет **ImageTools** здійснює низку основних функцій обробки зображень. У межах цього пакету цифрові зображення представляються як двовимірні прямокутні масиви 64-розрядних апаратних чисел з плаваючою комою. Пакет здатний аналізувати як чорно-білі (одношарові), так і кольорові зображення (багатошарові).

Пакет у версії Maple 2021 року представлений додатковими субпакетами з розширеними можливостями: **ImageTools:-Draw** та **ImageTools:-Image**. Також підключимо пакет **DocumentTools** з набором команд, які дозволяють програмний доступ до документів Maple та їхніх елементів, таких, наприклад, як текстові таблиці з рисунками і текстом всередині.

```
> restart:
  with(ImageTools);

> with(DocumentTools):
  with(DocumentTools[Layout]):

> interface(displayprecision=5, rtablesize=5):
  plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
  ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:

> hor:=360: ver:=260: # Ширина та висота рисунків в опції size
```

16.1.1 Команди вводу/виводу

Група команд Табл. 16.1 дозволяє імпортувати, експортувати та з'ясовувати формати файлів зображень.

Табл. 16.1

Деякі команди пакету **ImageTools**.

Команда	Опис дії
Read	зчитує (імпортує) зображення з файлу
Write	записує (експортує) зображення в файл
FormatFromName	визначає формат (тип) файлу зображення
Formats	видає формати зображень, які підтримуються

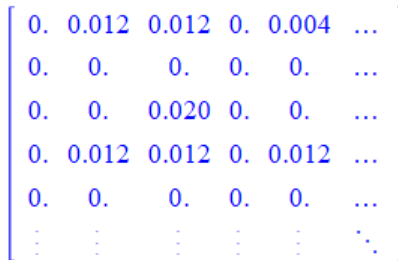
Програмний пакет **ImageTools** підтримує лише такі типи файлів:

```
> Formats;

{BMP, JPEG, PNG, TIFF}
```

Отже, перед застосуванням пакету медичні зображення повинні бути конвертовані в один з цих трьох форматів. Завантажимо деяке зображення командою **Read**. Зверніть увагу, завантаження відбувається з адреси, в назвах вкладених папок якої відсутні пробіли. Також треба слідкувати за шляхом у адресному рядку (частина адресу, виділена сірим):

```
> img_H:=Read("D:\\OneDrive\\Med_images.BMP");
img_h:=Read("D:\\OneDrive\\hand.jpeg");
# Зверніть увагу: в адресі зображення:
# НЕ повинно бути кирилических символів!
# Не рекомендовані пробіли у назвах папок і файлів.
```

$img_H :=$ 

slice of 225 × 225 × 3 Array

(16.1)

$$img_h := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

slice of 186 × 271 × 3 Array

(16.2)

Зверніть увагу на те, що:

1. шлях до файлу (адреса) прописаний у подвійних лапках і з подвійними бек-словами;
2. адреса не повинна містити кирилических символів (лише латиниця);
3. файл зображення `img` є прямокутним масивом розмірами 225×225 пікселів, причому тришаровим (отже, кольоровим);
4. виділивши правою кнопкою мишки вираз (16.1) або (16.2) можна за допомогою опції **Browse** у панелі справа переглянути матрицю зображення, саме зображення та його опції.

Переглянути зображення можна також командами перегляду:

- **Embed** (Рис. 16.1),
- **View** (у окремому вікні),
- **Preview** (зі шкалами у пікселях, Рис. 16.2).

> **Embed**(`[img_H]`, `title="Рис. 1 - Оригінальне зображення з файлу."`, `titleposition=bottom`, `'exterior'=none`);



Рис. 16.1 – Оригінальне зображення з файлу `Med_images.BMP` із рентгенограмою голови.

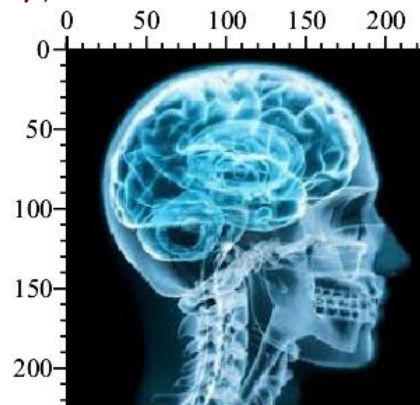


Рис. 16.2 – Перегляд зображення за допомогою команди `Preview`.

```
> View(img_H);
DocumentTools[Tabulate](Vector[column]([Preview(img_H), "Рис. 2 -
Перегляд зображення за допомогою команди Preview."]),
'exterior'=none, 'interior'=none):
> WhatTypeImage(img_H);
# Повертає тип зображення
ColorImage
```

Для експорту файлу використаємо команду **Write**, яка також дозволяє конвертувати формат файлу зображення, наприклад, з BMP на JPEG:

```
> Write("D:\\OneDrive\\img_H.JPEG", img_H);
11623
```

(16.3)

Вираз (16.2) показує розмір записаного файлу в байтах.

16.1.2 Застосування ДВП до зображення

Застосуємо дискретне вейвлет-перетворення Хаара (ДВП) з пакету **ImageTools** до матриці зображення `img_H` в (16.1) і порівняємо оригінальне зображення з перетвореним (Рис. 16.3):

```
> result:=DWT2D(img_H, 'level'=1);
> result8:=map(rtable, result, datatype=float[8]);
```

$$result8 := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0.0020 & \dots \\ 0. & 0.0098 & 0.0186 & 0. & 0.0010 & \dots \\ 0. & 0. & 0.0196 & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0.0127 & 0.0186 & 0. & 0.0010 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0.0020 & \dots \\ 0. & -0.0020 & -0.0010 & 0. & -0.0010 & \dots \\ 0. & 0. & -0.0039 & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & -0.0010 & -0.0010 & 0. & -0.0010 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ \text{slice of } 113 \times 113 \times 3 \text{ Array} & \text{slice of } 113 \times 113 \times 3 \text{ Array} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & -0.0020 & \dots \\ 0. & -0.0020 & -0.0010 & 0. & -0.0010 & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0.0010 & -0.0010 & 0. & -0.0010 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & -0.0020 & \dots \\ 0. & -0.0020 & -0.0010 & 0. & 0.0010 & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & -0.0010 & -0.0010 & 0. & 0.0010 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ \text{slice of } 113 \times 113 \times 3 \text{ Array} & \text{slice of } 113 \times 113 \times 3 \text{ Array} \end{bmatrix}$$

Для зручності подальшого візуального аналізу задамо колір фону, дещо темніший від тих, що пропонує бібліотека Maple:

```
> bgr:=ColorTools[Color]([0.25, 0.25, 0.25]);
      bgr := (RGB:0.25 0.25 0.25)
```

Далі скористаємося можливостями команд пакету **DocumentTools** та його підпакету **DocumentTools[Layout]** для вставки рисунків та підписів до них у текстові таблиці. Відповідно скористаємося командами **Table** [170], **Row**, **Cell** та ін. З огляду на особливості виведення графічного контенту у Maple, а саме в одному рядку один або кілька рисунків (наприклад, якщо скористатися командою **Array**) з одним підписом до нього або до всіх у масиві, – розміщення рисунків у табличному вигляді дозволяє покращити візуальне порівнювання та аналіз отриманих результатів.

```
> t1_R1:=Row(Cell(Image(img_H), padding=20, fillcolor=bgr),
Cell(Image(result8[1]), padding=70, fillcolor=bgr)):
t1_R2:=Row("a)", "б)"):
t1_R3:=Row(Cell("Рис. 3 - Оригінальне (а) зображення та перетво-
рене за допомогою ДВП (б).", columnspan=2)):
> T1:=Table(t1_R1, t1_R2, t1_R3, exterior=none, interior=none,
width=70):
> xml1:=Worksheet(T1):
> InsertContent(xml1):
```

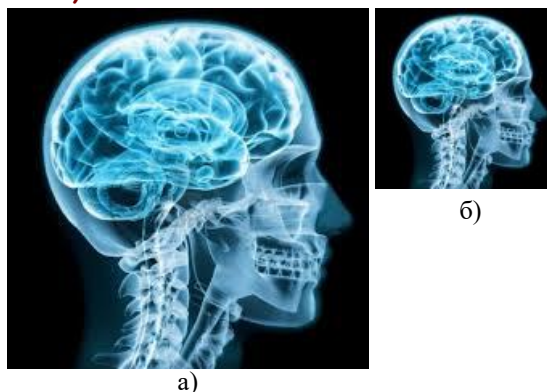


Рис. 16.3 – Оригінальне (а) зображення та перетворене за допомогою ДВП (б).

Як видно з Рис. 16.3, перетворене зображення (б) у 4-ри рази менше за оригінальне (а).

Команда **DWT2D** здійснює ДВП дво- або тривимірних зображень, проріджуючі фільтри нижніх та верхніх частот, використані у цій команді відповідно: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ та $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Параметр *level* вказує кількість рівнів, на яких здійснюється вейвлет-перетворення. На кожному рівні до апроксимації застосовується ДВП. Значенню за замовчуванням відповідає максимальний рівень, який визначається так: $\text{ilog2}(\min[\text{верхня межа}(\text{Approximation}, 1), \text{верхня межа}(\text{Approximation}, 2)])$.

Коли вейвлет-перетворення застосовується для одного рівня, команда повертає 4-ри масиви з типом даних *float[4]*, позначеними як *Approximation*, *HorizontalDetail*, *VerticalDetail* і *DiagonalDetail*. Вони отримані шляхом згортання (згортки) фільтрів нижніх і верхніх частот і цей процес виглядає так:

- *Approximation* (наближення) – згортка (*convolve*) фільтром нижніх частот по горизонталі та по вертикалі;
- *HorizontalDetail* (горизонтальна деталізація) – згортка фільтром нижніх частот по горизонталі та фільтром високих частот по вертикалі;
- *VerticalDetail* (вертикальна деталізація) – згортка фільтром високих частот по горизонталі та фільтром нижніх частот по вертикалі;
- *DiagonalDetail* (діагональна деталізація) – згортка фільтром високих частот по горизонталі та по вертикалі.

Поглянемо на перетворені зображення:

```
> t2_R1:=Row(Cell(Image(result8[1]), fillcolor=bgr),
Cell(Image(result8[2]), fillcolor=bgr)):
t2_R3:=Row(Cell(Image(result8[3]), fillcolor=bgr),
Cell(Image(result8[4]), fillcolor=bgr)):
> t2_R2:=Row("a) Approximation", "б) HorizontalDetail"):
t2_R4:=Row("в) VerticalDetail", "г) DiagonalDetail"):
t2_R5:=Row(Cell("Рис. 4 - Перетворені зображення.",
columnspan=2)):
> T2:=Table(t2_R1, t2_R2, t2_R3, t2_R4, t2_R5, exterior=none,
interior=none, width=70):
> xml2:=Worksheet(T2):
> InsertContent(xml2):
```

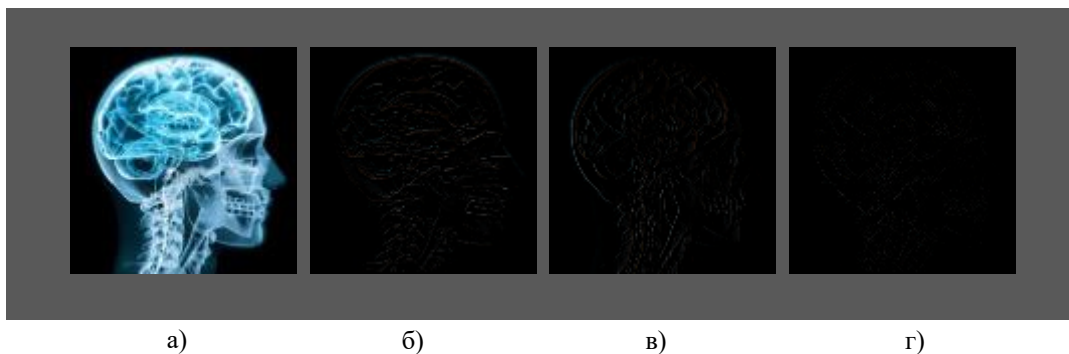


Рис. 16.4 – Результати процесу згортки під час ДВП.

Збільшимо зображення (б) на Рис. 16.4 у 3-и рази і поглянемо ближче, як виглядає результат *HorizontalDetail*:

```
> t3_R1:=Row(Cell(Image(Scale(result8[2], 3.0, method=nearest,
antialias=none)), fillcolor=black, padding=30)):
t3_R2:=Row(Cell("Рис. 5 - Рівень HorizontalDetail перетвореного
зображення."):
> T3:=Table(t3_R1, t3_R2, exterior=none, interior=none, width=40):
> xml3:=Worksheet(T3):
> InsertContent(xml3):
```

16.1.3 Команди перегляду файлів та гістограм інтенсивності

Команди нижче дозволяють компонувати та іменувати групи зображень для перегляду в окремому вікні.

```
> View([img_h, img_h], title="Рентген");
# Зображення розташовані в ряд
View(img_h, img_h, title="Рентген");
# Зображення розташовані в стовпець
```

```
View([img_H, img_h], [img_H, img_h], title="Рентген _matrix");
# Зображення розташовані в матриці 2x2
```

Команда **Preview** дозволяє зафіксувати зображення в робочому документі як рисунок (див. як приклад Рис. 16.2):

```
> Preview(img_H); "Рис. 6 - Результат виконання команди Preview.";
```

Масштабуємо оригінальне зображення – збільшимо його у 2 рази, застосовуючи при цьому два з доступних методи інтерполяції: Б-сплайн метод (B-spline – basis spline) та метод найближчого сусіда (Nearest-neighbor interpolation). На Рис. 16.5 показані частини збільшених зображень, яких достатньо для порівняння якості.

```
> t4_R1:=Row(Cell(Image(Scale(img_H, 2.0, method=nearest,
    antialias=none))), fillcolor=bgr, padding=30),
    Cell(Image(Scale(img_H, 2.0, method=bspline, antialias=none))),
    fillcolor=bgr, padding=30)):
t4_R2:=Row("a) nearest", "б) bspline"):
t4_R3:=Row(Cell("Рис. 7 - Команда Scale збільшення зображення.",
    columnspan=2)):
> T4:=Table(t4_R1, t4_R2, t4_R3, exterior=none, interior=none,
    width=70):
> xml4:=Worksheet(T4):
> InsertContent(xml4):
```

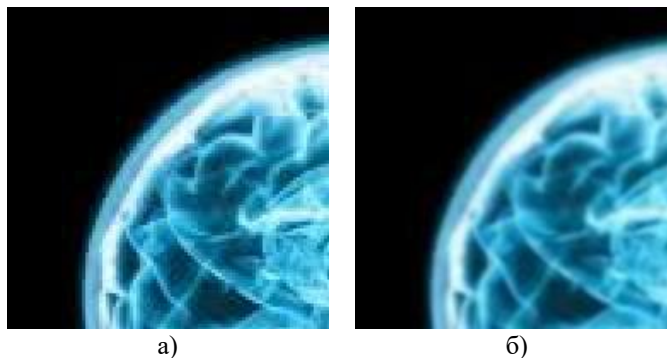


Рис. 16.5 – Результат виконання команди Scale зі збільшення зображення за методом: а) найближчого сусіда (nearest); б) Б-сплайнів (bspline).

Команда **PlotHistogram** дозволяє обчислювати та будувати гістограму розподілу інтенсивності для кожного шару (кольорового каналу) зображення:

```
> PlotHistogram(ToGrayscale(img_H), 18, autorange, normalized,
    filled=[color=black, transparency=0.7], color=black,
    labels=["Intensity, a.u.", "Value, a.u."], caption="Рис. 8 - Гіс-
    тограма файлу img_H із рентгенограмою голови.", size=[hor, ver],
    plotopt);
```

Гістограма Рис. 16.6 свідчить, що у черно-білому варіанті файл img_H містить відносно велику кількість (понад 65%) пікселів чорного, або майже чорного кольору (інтенсивності близькі до нуля) і відносно невелику кількість сірих пікселів різної яскравості (в діапазоні яскравостей від 0.1 до 1.0).

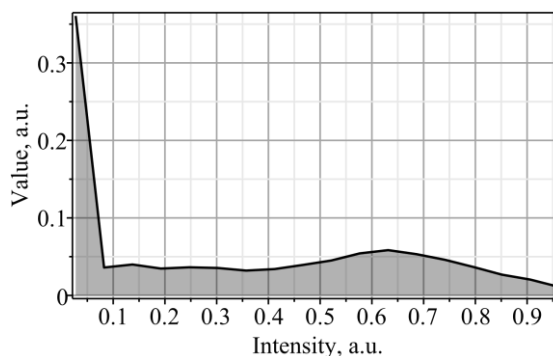


Рис. 16.6 – Гістограма розподілу інтенсивності рентгенограми голови.

16.1.4 Команди управління кольорами

Таких команд в пакеті достатньо, короткий опис деяких з них представлений в Табл. 16.2.

Командою конвертації кольорового тришарового зображення в монохромне одношарове чорно-біле зображення ми вже користувалися вище при створенні гістограм. Зверніть увагу: масив зображення одношаровий на відміну від тришарового масиву в (16.2):

```
> img_hg:=ToGrayscale(img_h);
```

$$img_hg := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

186 × 271 Array (16.4)

Табл. 16.2

Деякі команди управління кольорами пакету **ImageTools**.

Команда	Опис дії
ColorTransform	Дозволяє трансформувати кольори шарів
CombineLayers	Комбінує кольорове зображення з монохромних шарів
Gamma	Змінює інтенсивності шарів зображення
GetLayer	Виділяє певний шар в багатошаровому зображенні
SetLayer	Вставляє шар в багатошарове зображення
ToGrayscale	Переводить кольорове зображення в чорно-біле

Окрім команд Табл. 16.2, в пакеті є ще декілька команд конвертації кольорових шкал (HSV to RGB, RGB to HSV, RGB to YUV, YUV to RGB тощо).

16.1.5 Аналіз зображень

Розглянемо команди аналізу зображень. Наступні команди повертають висоту (кількість рядків) та ширину (кількість стовпців) зображення (порівняйте з Рис. 16.2):

```
> Height(img_H); Width(img_H);
```

225
225

Команда **Intensity** вимірює параметри пікселів для різних шарів зображення: *range*, *mean*, *variance*, *energy* тощо. Зокрема, з (16.4) видно, що найвища середня яскравість і найвища енергія – у третього шару зображення:

```
> Intensity(img_H, mean); Intensity(img_H, energy);
Intensity(img_H, range); Intensity(img_H, variance);
```

[0.204, 0.364, 0.429]
[0.102, 0.246, 0.326]
[0. ...1.000, 0. ...1.000, 0. ...1.000]
[0.060, 0.113, 0.142] (16.5)

Команда **Entropy** для обчислення ентропії шарів зображення, яка є мірою інформаційного вмісту шару. Ентропію шару зображення можна інтерпретувати як кількість бітів, необхідних для кодування кожного елемента шару за умов ідеального стискання. Ентропія є максимальною, коли кожен елемент однаково ймовірний. Розраховується за формулою Шеннона:

```
> Entropy(img_H);
```

[5.862, 6.437, 6.350]

Команда **Quality** дозволяє порівняти два монохромні зображення однакового розміру (первинне та трансформоване) по декільком параметрам. Трансформуємо монохромне зображення (16.4) за формулою:

```
> img_hr:=0.75*img_hg+0.2;
```

$$img_hr := \begin{bmatrix} 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & \dots \\ 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & \dots \\ 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & \dots \\ 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & \dots \\ 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & 0.200 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

186 × 271 Array

(16.6)

Далі порівняємо зображення (16.4) та (16.6) по відношенню «сигнал/шум»:

```
> Quality(img_hr, img_hg, snr);
```

6.878

Якість можна також порівняти по іншим параметрам:

$$\text{середньо-квадратична помилка } mse = \frac{\sum (r_{i,j} - s_{i,j})^2}{w h},$$

де r, s – яскравості пікселів для реконструйованого та первинного зображення,
 i, j – індекси пікселів,
 w, h – ширина та висота зображення:

```
> Quality(img_hr, img_hg, mse);
```

0.028

▪ пікове значення відношення «сигнал/шум»:

```
> Quality(img_hr, img_hg, psnr);
```

15.481

▪ корінь квадратний з параметру **mse**:

```
> Quality(img_hr, img_hg, rmse);
```

0.168

16.1.6 Трансформування зображень

Команда **Clip** дозволяє змінити яскравості пікселів зображення, вказавши дві величини:

- найвищу (high) межу;
- найнижчу (low) межу.

Після команди в зображенні всі пікселі з яскравістю вище верхньої межі зменшують яскравість до вказаного значення high, всі пікселі з яскравістю нижче межі low збільшують яскравість до вказаної межі. Пікселі з яскравістю в межах інтервалу [low, high] не змінюються. Звузимо (або розширимо) діапазон яскравостей зображення:

```
> Clip(img_H, low=0.25, high=0.65): View([img_H,%]);
```

Команда **Complement** дозволяє трансформувати яскравості пікселів на зворотні: чорні пікселі стають білими і навпаки, тобто утворюється «негатив» первинного зображення (Рис. 16.7):

```
> Complement(img_H); View([%,img_H]);
```

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.988 & 0.988 & 1.000 & 0.996 & \dots \\ 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & \dots \\ 1.000 & 1.000 & 0.980 & 1.000 & 1.000 & \dots \\ 1.000 & 0.988 & 0.988 & 1.000 & 0.988 & \dots \\ 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

slice of 225 × 225 × 3 Array

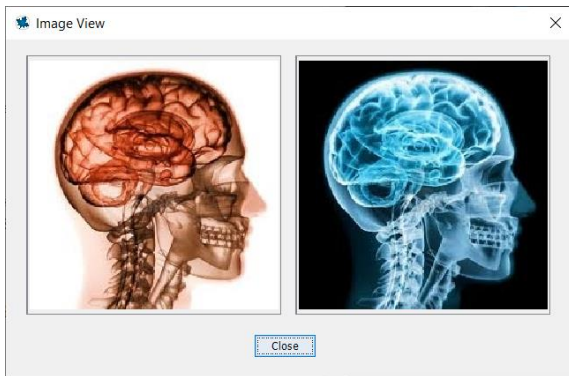


Рис. 16.7 – Застосування команди **Complement** до матриці зображення.



Рис. 16.8 – Застосування команди **GetSubImage** до матриці (16.1).

Команда **Flip** дозволяє віддзеркалювати (обертати) зображення у вертикальній або горизонтальній площинах:

```
> Flip(img_H, horizontal):    Flip(img_H, vertical):
    View([img_H,%%,%]);
```

Команда **GetSubImage** дозволяє виокремити фрагмент зображення з координатами, вказаними в опціях, а саме початкові номери рядків та стовпчиків, кінцеві номери рядків та стовпчиків (Рис. 16.8):

```
> GetSubImage(img_H, 65, 20, 150, 170):
    View([img_H, %]);
```

Команда **Scale** дозволяє трансформувати масив первинного зображення в менший або більший розмір (масштабувати):

```
> Scale(img_H, 2/3):    Scale(img_H, 3/2):
    View([img_H,%%,%], title="Масштабування");
```

Команда **Threshold** дозволяє очищати чорно-біле зображення (матриця зображення (16.1) перетворена командою **ToGrayscale**) від завад (Рис. 16.9), причому можна задати як здійснюватиметься операція трешолдінгу:

```
> img_H_thr_bl:=Threshold(ToGrayscale(img_H), method=below):
    img_H_thr_ab:=Threshold(ToGrayscale(img_H), method=above):
    img_H_thr_bth:=Threshold(ToGrayscale(img_H), method=both):
> Embed([ToGrayscale(img_H), img_H_thr_bl, img_H_thr_ab,
    img_H_thr_bth], exterior=none, interior=none);
```

Якщо в опціях команди **Threshold** вказати метод **above** для всіх пікселів (Рис. 16.9 в), які перевищують шумовий поріг, буде встановлено значення, визначене опцією **high**, а пікселі, які опускаються нижче порогового значення, зберігають своє значення. Зазначення методу **below** призводить до того, що для всіх пікселів нижче шумового порогу встановлюється значення, визначене опцією **low**, а пікселі вище порогу зберігають своє значення (Рис. 16.9 б). Якщо вказати **method = both** (Рис. 16.9 г), що є значенням за замовчуванням, для всіх пікселів нижче шумового порогу встановлюється значення, визначене опцією **low**, а для всіх пікселів, які перевищуватимуть порогове значення, – значення, визначене опцією **high**.

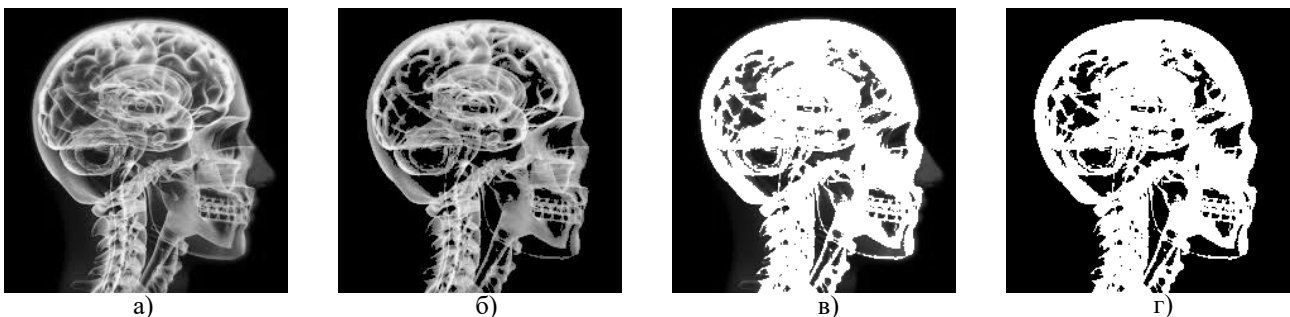


Рис. 16.9 – Результат застосування команди **Threshold** до `img_H`:

а) оригінальне зображення `img_H` (16.1); б) метод **below**;
в) метод **above**; г) метод **both**.

Подивимося, як впливає величина опцій **low** і **high** на результат трешолдінгу зображення за методом **below**:

```

> img_H_thr_bl_lsm:=Threshold(ToGrayscale(img_H), method=below,
low=0.2):
img_H_thr_bl_lbi:=Threshold(ToGrayscale(img_H), method=below,
low=1.2):
img_H_thr_bl_hsm:=Threshold(ToGrayscale(img_H), method=below,
high=0.2):
img_H_thr_bl_hbi:=Threshold(ToGrayscale(img_H), method=below,
high=1.2):
> View([ToGrayscale(img_H), img_H_thr_bl_lsm, img_H_thr_bl_lbi],
[ToGrayscale(img_H), img_H_thr_bl_hsm, img_H_thr_bl_hbi],
title="Очищення від завад");

```

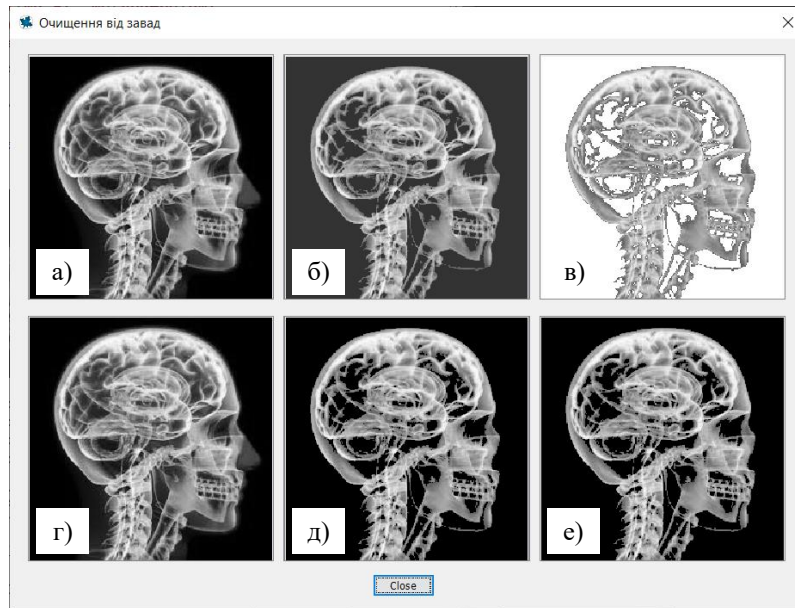


Рис. 16.10 – Трешолдінг (очищення від завад) за методом **below** зображення у матриці (16.1): а) оригінал; б) $low = 0.2$; в) $low = 1.2$; г) оригінал; д) $high = 0.2$; е) $high = 1.2$.

16.2 ГІСТОГРАМИ ЯСКРАВОСТІ ТА КОНВОЛЮЦІЙНІ МАСКИ

16.2.1 Маніпуляції з інтенсивностями (яскравістю) пікселів

Завдяки засобам пакету **ImageTools** можна легко маніпулювати інтенсивностями (яскравостями) пікселів зображень. Розглянемо гістограму файлу (Рис. 16.11) для першого шару зображення з матриці `img_hg` (16.4):

```

> PlotHistogram(img_hg, 12, autorange, normalized,
filled=[color=black, transparency=0.7], color=black,
labels=["Intensity, a.u.", "Value, a.u."], caption="Рис. 10 - Гіс-
тограма файлу img_hg із рентгенограмою руки.", size=[hor, ver],
plotopt);

```

Застосовуючи функцію $\sqrt{} = \text{sqrt}$ до всіх пікселів зображення, можна змінити його гістограму. Зауважимо, що під час застосування довільного оператора до всіх пікселів зображення, нові інтенсивності пікселів можуть виходити за межі інтервалу $[0, 1]$. Через це потрібно використовувати команду **FitIntensity** для приведення перетворених інтенсивностей вказаного інтервалу.

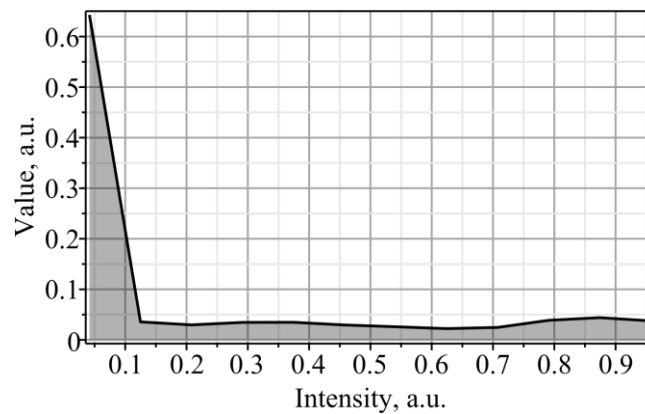


Рис. 16.11 – Гістограма матриці `img_hg` (16.4) із рентгенограмою руки.

Застосуємо операцію взяття кореня квадратного з інтенсивностей всіх пікселів зображення (операція відбувається на машинному рівні – `evalhf`):

```
> map[evalhf](sqrt, img_hg):
```

Підгонка нових інтенсивностей до інтервалу [0, 1]:

```
> img_hg1:=FitIntensity(%):
```

```
> Embed([img_hg, img_hg1], exterior=None, interior=None);
```

Відмічаємо, що трансформоване зображення Рис. 16.12 б є дещо більш контрастним.

Порівняємо гістограми до та після операції `sqrt` (Рис. 16.13):

```
> plots[display](PlotHistogram(img_hg, 12, color=red, normalized,
    legend="Original Image"), PlotHistogram(img_hg1, 12, color=blue,
    normalized, legend="Sqrt operator"), thickness=2,
    labels=["Intensity, a.u.", "Value, a.u."], caption="\nРис. 12 -
    Нормалізовані гістограми двох зображень.", view=[0..1,0..0.25],
    size=[hor, 1.2*ver], plotopt);
```



Рис. 16.12 – Результат застосування команди `FitIntensity` до матриці зображення `img_hg` (16.4) із рентгенограмою руки:
а) оригінальне зображення; б) після `sqrt` інтенсивностей всіх пікселів.

Так само ми можемо застосувати до інтенсивностей пікселів, наприклад, експоненціальний оператор (Рис. 16.14). Щоб підсилити результат експоненціального оператора, помножимо інтенсивність кожного пікселя первинного зображення на 0.25 перед вживанням оператора:

```
> img_hg2:=FitIntensity(map[evalhf](
    proc (x) options operator, arrow;
    exp(-2*x) end proc, 0.25*img_hg)):
```

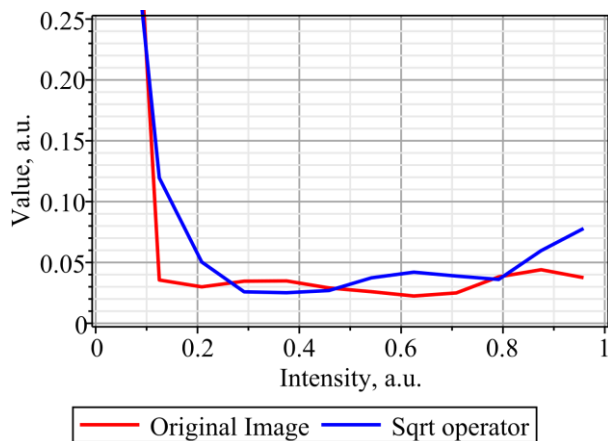


Рис. 16.13 – Гістограми оригінального та нормалізованого (**sqrt**) зображень з Рис. 16.12.

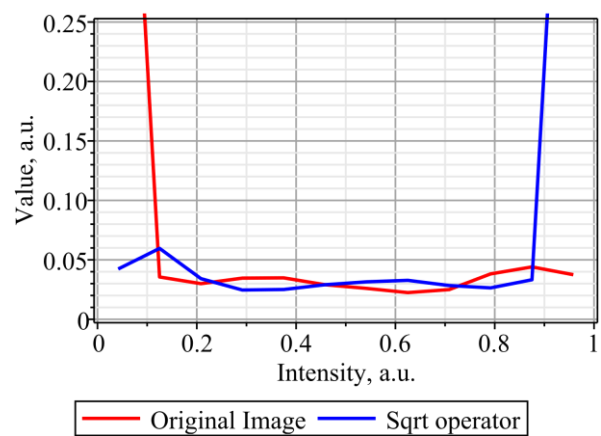


Рис. 16.14 – Гістограми оригінального та нормалізованого (**exp**) зображень з Рис. 16.12.

```
> plots[display](PlotHistogram(img_hg, 12, color=red, normalized,
legend="Original Image"), PlotHistogram(img_hg2, 12, color=blue,
normalized, legend="Sqrt operator"), thickness=2,
labels=["Intensity, a.u.", "Value, a.u."], caption="\nРис. 13 -
Нормалізовані гістограми двох зображень.", view=[0..1, 0..0.25],
size=[hor, 1.2*ver], plotopt);
```

Гістограма на Рис. 16.14 змінилася радикально: практично в трансформованому зображенні більшість пікселів мають інтенсивності близькі до одиниці, тоді як в первинному зображенні більшість пікселів мали нульові або близькі інтенсивності. Практично чорний фон змінився на білий, у той час як відтінки сірого на обох зображеннях приблизно однакові (Рис. 16.15).

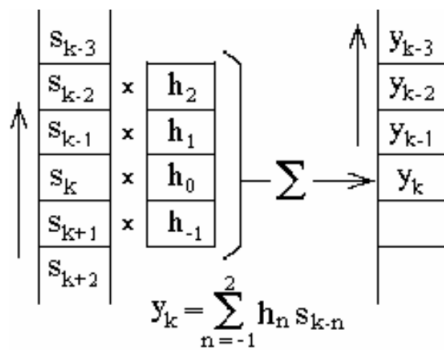
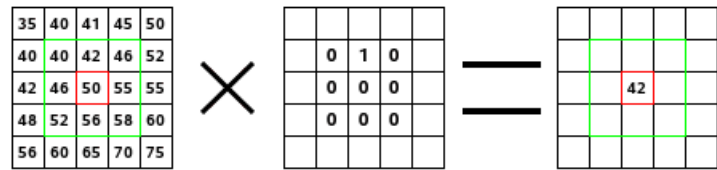
```
> Embed([img_hg, img_hg2], exterior=none, interior=none);
```



Рис. 16.15 – Результат застосування команди **FitIntensity** до матриці **img_hg** (16.4): а) оригінал; б) після оператору **exp**.

16.2.2 Конволюційні маски

Конволюція, або згортка, – одна з основних операцій під час цифрової обробки сигналів [171]. Вона застосовується як для одновимірних, так і для двовимірних дискретних сигналів (зокрема цифрових зображень). **Технологія згортки** (конволюції) одновимірних сигналів дуже схожа на цифрове фільтрування і наведена схематично на Рис. 16.16 (див. [172], тема 6, п. 6.4 на стор. 8).

Рис. 16.16 – Схема конволюції
одновимірного сигналу [172].Рис. 16.17 – Схема конволюції
двовимірного сигналу [173].

Для обчислення конволюції (згортки) масив вхідного сигналу упорядковується по відлікам s_k за зростанням номерів (стовпець зліва на Рис. 16.16). Масив другої функції (h_{-1}, h_0, h_1, h_2), або так званої **конволюційної маски (фільтру)** будується паралельно масиву s_k у зворотному порядку, тобто за зменшенням номерів (стовпець справа на Рис. 16.16). Для обчислення дискретного значення сигналу y_k застосовується така формула:

$$y_k = \sum_{n=-1}^2 h_n s_{k-n}$$

Після цього конволюційна маска зсувається на один крок уздовж масиву сигналу і обчислюється інше значення вихідної функції y_{k+1} .

Принцип конволюційних перетворень **двовимірних зображень** такий самий, лише конволюційна маска є матрицею, а не вектором, як це має місце в одновимірному випадку (Рис. 16.17). Маска ковзає по матриці зображення послідовно – зліва направо і згори до низу, перетворюючи інтенсивності піксель за пікселем [173]. Створення конволюційних масок – предмет вищої математики.

Розглянемо декілька стандартних конволюційних масок, які вирішують ті чи інші задачі трансформації зображень [173].

Конволюційна маска **контрастування (sharpen)** та збільшення **чіткості** зображення (Рис. 16.18):

```
> M_contr:=Matrix([
  [ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ],
  [ 0 , 0 , -1 , 0 , 0 ],
  [ 0 , -1 , 5 , -1 , 0 ],
  [ 0 , 0 , -1 , 0 , 0 ],
  [ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ]]);
> Convolution(img_H, M_contr, weight=1):
Embed([img_H,%], exterior=None, interior=None);
```



а)



б)

Рис. 16.18 – Конволюційна маска контрастування та збільшення чіткості зображення: а) оригінальне зображення img_H; б) результат застосування.

Конволюційна маска **розмиття (blur)** зображення (Рис. 16.19):

```
> M_blur:=Matrix([
  [ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ],
  [ 0 , 1 , 1 , 1 , 0 ],
  [ 0 , 1 , 1 , 1 , 0 ],
```

```
[ 0 , 1 , 1 , 1 , 0 ],
[ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ]]);
> Convolution(img_H, M_blur, weight=1):
Embed([img_H,%], exterior=none, interior=none);
```

Конволюційна маска виокремлення контурів (*edge detect*), (Рис. 16.20).

```
> M_edge:=Matrix([
[ 0 , 1 , 0 ],
[ 1 , -4, 1 ],
[ 0 , 1 , 0 ]]);
> Convolution(img_H, M_edge, weight=1):
Embed([img_H,2*%], exterior=none, interior=none);
```



а)



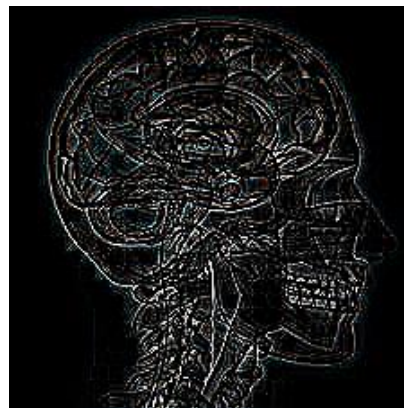
б)

Рис. 16.19 – Конволюційна маска розмиття (blur) зображення:

а) оригінальне зображення *img_H*; б) результат застосування.



а)



б)

Рис. 16.20 – Конволюційна маска виокремлення контурів зображення:

а) оригінальне зображення *img_H*; б) результат застосування.

Конволюційна маска рельєфу (*emboss*) зображення (Рис. 16.21):

```
> M_rel:=Matrix([
[ -2 , -1, 0 ],
[ -1 , 1 , 1 ],
[ 0 , 1 , 2 ]]);
> Convolution(img_H, M_rel, weight = none):
Embed([img_H,2*%], exterior=none, interior=none);
```



а)



б)

Рис. 16.21 – Конволюційна маска рельєфу зображення:
а) оригінальне зображення `img_H`; б) результат застосування.

16.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. В чому полягають характерні особливості графічних форматів BMP, JPEG, PNG, TIFF?
2. Що дозволяють аналізувати гістограми зображень?
3. Що таке конволюція?
4. В чому полягає технологія згортки?
5. Поясніть особливості створення та застосування конволюційних масок.

♦ 1.2 Maple

1. Поясніть можливості пакету **ImageTools**. Опис яких команд відсутній у загальній довідці до пакету?
2. В чому полягають особливості використання команди **Read**?
3. Які команди перегляду зображення є у пакеті **ImageTools**? В чому відмінність результатів їх виконання?
4. Як виокремити фрагмент зображення з певними координатами?
5. Поясніть їх особливості опцій в команді фільтрації зображень **Threshold**.

16.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Зробіть власним телефоном СВОЮ фотографію (свого обличчя) у форматі 3x4 (як на документи).
2. Додайте інформацію про якість фотографії: розмірність (*dimension*) цифрового зображення, параметри камери телефона та іншу інформацію.
3. Зменшить її до розмірів порядку 300 пікселів, але не менше 225.
4. Опрацюйте всіма способами, поданими у змісті практичній роботі.
5. Проаналізуйте результати. Сформулюйте висновки.

МЕТОДИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ ЗОБРАЖЕНЬ

- 1  Принципи та методи вейвлет-аналізу зображень.
- 2  Вейвлет-аналіз, очищення та стискання зображень.

17.1 ПРИНЦИПИ ТА МЕТОДИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ ЗОБРАЖЕНЬ

Розглянемо **сепарабельне двовимірне вейвлет-перетворення** (декомпозицію) деякого зображення детальніше. Візьмемо певний (r -й) рядок довжиною N зображення із загальними розмірами $N \times N$ [168]. Однократне дискретне вейвлет-перетворення (ДВП) такого рядку, якщо розглядати його як одновимірний **векторний сигнал**, дає:

- $\frac{N}{2}$ коефіцієнтів **апроксимації** $a_{r,l}$;
- $\frac{N}{2}$ коефіцієнтів **деталізації** $d_{r,k}$, де $(0 \leq l, k \leq \frac{N}{2})$.

Припустимо, що ми вже перетворили і упорядкували всі рядки наданого зображення, як на Рис. 17.1 в:

- ліворуч – вектори **низькочастотних** коефіцієнтів апроксимації **L**,
- праворуч – вектори **високочастотних** коефіцієнтів деталізації **H**.

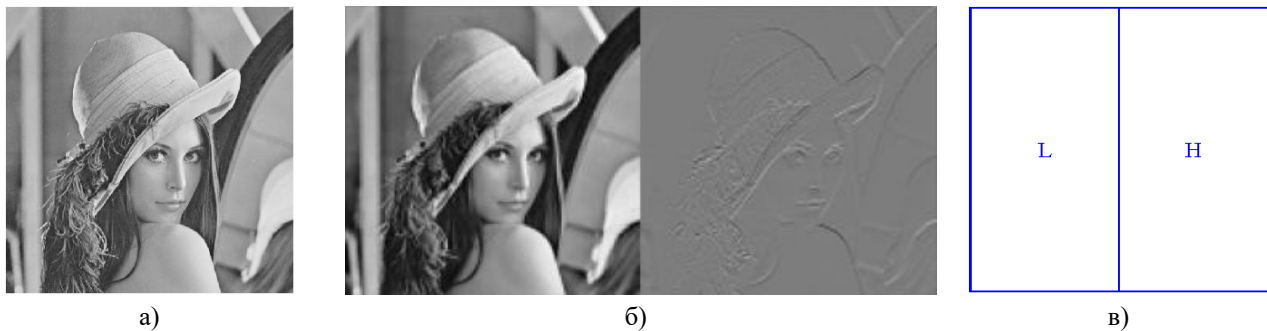


Рис. 17.1 – Одновимірне вейвлет-перетворення CDF(2,2), застосоване до рядків і стовпців еталонного зображення *lena* з відображенням на межах [174]: а) *lena*, $N = 512$, $depth = 8$; б) зображення, перетворене одновимірними вейвлетами CDF(2, 2) по рядках; в) низькочастотний (L , $a_{r,l}$) та високочастотний (H , $d_{r,k}$) блоки вейвлет-коефіцієнтів.

В такому разі масив пікселів зображення поділиться навпіл по вертикалі так, як показано на Рис. 17.1 в [174].

На Рис. 17.1 а показане відоме еталонне тестове зображення «Lena» [175], [176]. Рис. 17.1 б демонструє результат вейвлет-декомпозиції тестового зображення за допомогою одновимірних біортогональних вейвлетів CDF(2, 2), діючих по рядках. На Рис. 17.1 в ілюстрована ідея декомпозиції:

- низькочастотний блок коефіцієнтів апроксимації (L-блок),
- високочастотний блок коефіцієнтів деталізації (H-блок).

Зауважимо, що більшість високочастотних коефіцієнтів деталізації показані на Рис. 17.1 б світло-сірим кольором, що відповідає невеликим яскравостям пікселів, близьким до нуля. Одновимірне вейвлет-декомпозиція можлива також і по стовпцям (колонкам) зображення. Результати такої послідовної декомпозиції по рядках та колонках (стовпцях) показаний на Рис. 17.2 [174]:

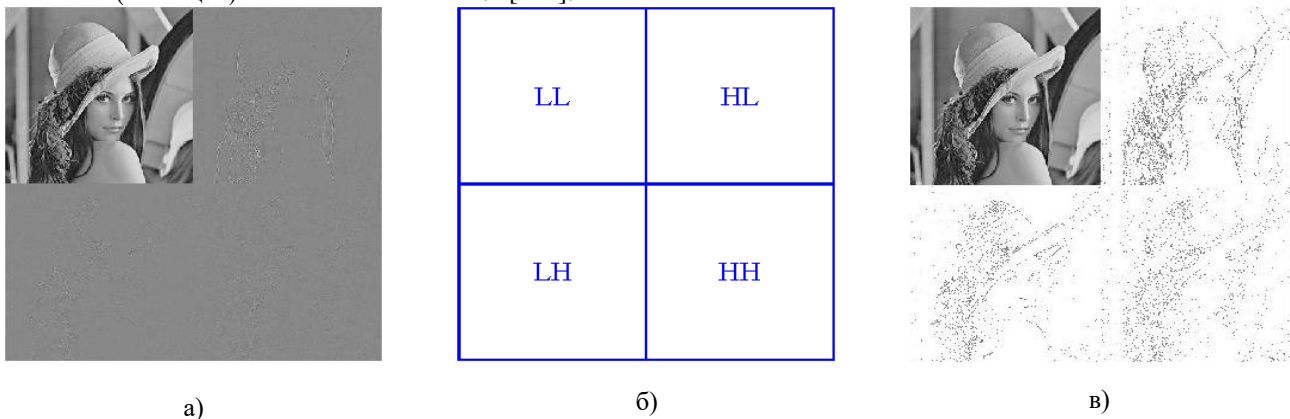


Рис. 17.2 – Одновимірне вейвлет-перетворення CDF(2,2), застосоване до рядків еталонного зображення *lena* з відображенням на межах [174]: а) результат декомпозиції по рядках та стовпцях; б) частотні блоки ВК; в) скоректований набір всіх ВК.

Зображення після однорівневої трансформації вейвлетами по рядках та колонках розбивається на чотири частотні блоки з різною інтерпретацією (Рис. 17.2 б):

1. LL-блок, є лівим верхнім блоком коефіцієнтів апроксимації, які були відфільтровані під час аналізу (розкладання) двома фільтрами нижніх частот. Блок містить копію первинного зображення з половинною роздільною здатністю;
2. HL/LH блоки, нижній лівий та правий верхній блоки, в яких містяться коефіцієнти деталізації відфільтровані як фільтрами низької, так і фільтрами високої частоти. Блок LH містить вертикальні края, тоді як блок HL – горизонтальні края зображення;
3. HH-блок, нижній лівий. Містить коефіцієнти деталізації двічі відфільтровані фільтрами високих частот. Ми можемо інтерпретувати цей блок як область, де знаходяться краї оригінального зображення в діагональному напрямі.

На Рис. 17.2 в представлений скоректований набір всіх ВК, причому коефіцієнти блоків HL, LH, HH з абсолютним значенням менше 20 (порогове значення) обнулені, тобто замінені на пікселі білого кольору. З цього ж рисунку також видно, що коефіцієнти деталізації підкреслюють ([177], рис. 10.3, стор. 407):

- горизонтальні краї предметів, відповідно HL (верхня права частина Рис. 17.2 в);
- вертикальні краї, LH (нижня ліва частина Рис. 17.2 в);
- діагональні краї предметів, HH (нижня права частина Рис. 17.2 в).

Оскільки ми розглядаємо квадратичне зображення з розмірами $N \times N = 2^m$, можемо виконувати щонайменше $m = 2 \log_2 N$ послідовних вейвлет-перетворень, так званих **рівнів масштабування**. Після чого вейвлет-коефіцієнт у верхньому лівому кутку відображатиме середнє значення інтенсивності пікселів цілого зображення в шкалі сирих тонів – він має назву DC-коефіцієнту (DC – постійний струм з англ.). На практиці для реального аналізу зображення достатньо, зазвичай, від чотирьох до шести рівнів масштабування (Рис. 17.3) [174].

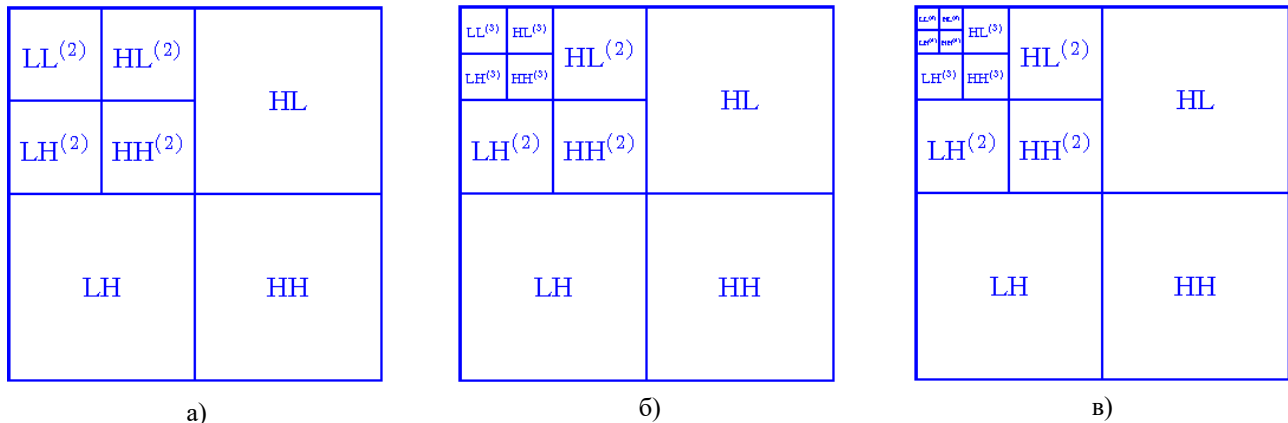


Рис. 17.3 – Мультирівнева схема ВП [174]: а) дворівнева вейвлет-декомпозиція; б) триврівнева декомпозиція; в) чотири рівні розкладання та відповідні блоки коефіцієнтів.

Завдяки тому, що сусідні пікселі зображень схожі за інтенсивністю, велика кількість коефіцієнтів деталізації в блоках LH, HL та HH будуть малими за абсолютним значенням (модулем). Як результат, лише частина ВК, зокрема ті, що розташовані в блоці LL найгрубішого масштабу, представляють енергію зображення.

Енергія зображення визначається таким виразом:

$$E = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{c=0}^{N-1} (x_{r,c})^2 \quad (17.1)$$

де індекси r, c – нумерують рядки та колонки зображення,
 $x_{r,c}$ – інтенсивність окремого пікселя зображення.

Ентропія для кожного шару зображення визначається шляхом розподілу інтенсивностей всіх пікселів шару на M рівнів інтервалів між 0 та 1 (звичайно $M = 256$). Далі визначається ймовірність потрапляння пікселів в кожний з таких інтервалів, пропорційна долі пікселів, які потрапили в певний інтервал P_i . Обчислення ентропії зображення проводять за формулою Шеннона:

$$H = \sum_{i=1}^M P_i \cdot \log_2(P_i) \quad (17.2)$$

17.2 ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ, ОЧИЩЕННЯ ТА СТИСКАННЯ ЗОБРАЖЕННЯ

Вейвлети отримали поширення в різних галузях, включно з сейсмологією, підводною акустикою, комп'ютерним баченням та обробкою сигналів. Найбільше застосування вейвлетів полягає саме в компресії (стисканні) зображень.

Нижче розглянемо приклади таких застосувань [178] за допомогою програмних пакетів розроблених в межах системи Maple.

17.2.1 Процедури вейвлет-аналізу та синтезу двовимірних зображень в Maple

Спочатку запишемо дві процедури:

- для **вейвлет-декомпозиції** (прямого перетворення);
- для **зворотного синтезу** (відновлення) двовимірного зображення в сирих тонах (одношарового).

Дискретне вейвлет-перетворення трансформує спочатку один вимір зображення (рядки), потім інший (колонки). Такий процес на виході має чотири масиви (LL, HL, LH, LL) вейвлет коефіцієнтів.

Коефіцієнти апроксимації (LL) можна перетворювати далі рекурсивно в межах наступного рівня масштабування. Визначимо також невелику процедуру для підрахунку долі пікселів нульової інтенсивності в матриці зображення, а також дві процедури, потрібні для знешумлення сигналу (очищення зображення).

```
> restart:
with(DiscreteTransforms);
with(ImageTools):

> interface(displayprecision=3, rtablesize=5):
plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:

> hor:=360: ver:=280:
```

Процедура **прямого вейвлет-перетворення** зображення по рядкам та колонкам задається в такий спосіб:

```
> ImageDWT:=
proc(img::(Or(Matrix, Array)), w1::Vector, w2::Vector,
iters::posint) local rows, cols, n, final, current, temp;
rows, cols:=LinearAlgebra:-Dimensions(img);
n:=1;
final:=Matrix(img);
if modp(rows, 2^iters)<>0
or modp(cols, 2^iters)<>0
then error "img's dimensions are not divisible by %1",
2^iters
end if;
temp:=Matrix(rtable_dims(final), datatype=float[8]);
for n to iters do
DiscreteWaveletTransform(rows/2^(n-1), cols/2^(n-1),
final, 1, w2, w1, temp, storagetype=singlearray);
DiscreteWaveletTransform(cols/2^(n-1), rows/2^(n-1),
temp, 2, w2, w1, final, storagetype=singlearray)
end do;
return final
end proc;
```

Вхідними параметрами процедури є:

- ім'я зображення (*img*), зображення повинно бути задано у вигляді двовимірного масиву, або матриці;
- два вектори вейвлет-фільтрів НЧ та ВЧ (*w1*, *w2*);
- скалярний цілочисельний позитивний параметр, який визначає кількість рівнів масштабування (*iters*).

Вектори фільтрів визначаються вибором системи вейвлетів, по яких відбувається розкладання, а також вибором довжини цих векторів. **Кількість рівнів** масштабування визначається розмірами зображення.

Зворотне вейвлет-перетворення зображення (відновлення фільтрованого зображення):

```
> InverseImageDWT:=
proc(img::(Or(Matrix, Array)), w1::Vector, w2::Vector,
iters::posint)
local rows, cols, n, final, current, temp, temp2, i, j;
rows, cols:=LinearAlgebra:-Dimensions(img);
n:=iters;
final:=Matrix(img);
if modp(rows, 2^iters)<>0
or modp(cols, 2^iters)<>0
then error "img's dimensions are not divisible by %1",
2^iters
end if;
temp:=Matrix(rtable_dims(final), datatype=float[8]);
for n from iters by -1 to 1
```

```

do InverseDiscreteWaveletTransform(cols/2^(n-1),
rows/2^(n-1),
final, 2, w2, w1, temp, storagetype=singlearray);
InverseDiscreteWaveletTransform(rows/2^(n-1),
cols/2^(n-1),
temp, 1, w2, w1, final, storagetype=singlearray)
end do;
return final
end proc;

```

Далі записана процедура підрахунку долі нульових пікселів у матриці вейвлет-коефіцієнтів:

```

> count0:=proc(img,`$`)
local rows,cols,i,j,count;
rows,cols:=LinearAlgebra:-Dimensions(img);
count:=0;
for j to cols do
for i to rows do
if img[i,j]=0 then count:=count+1
end if
end do
end do;
return floor(100*count/(rows*cols))
end proc;

```

Процедура вхідними параметрами визначає ім'я зображення (img) і повертає відсоток нулів у матриці вейвлет-коефіцієнтів після трешолдінгу – порогового очищення.

17.2.2 Приклад очищення та стискання зображення

Корисність вейвлет-розкладання полягає у великій кількості нульових, або близьких до нульових, вейвлет-коефіцієнтів в матриці вейвлет-образу. З метою **компресії** (стискання) файлу реконструйованого зображення малі значення вейвлет-коефіцієнтів можуть обнулятися, наприклад, за вже відомою процедурою трешолдінгу. Завантажимо деяке зображення:

```

> img:=Read("D:\\OneDrive\\Med_images.BMP");
# Зверніть увагу: в адресі зображення:
# НЕ повинно бути кирилических символів!
# Не рекомендовані пробіли у назвах папок і файлів.

```

$$img := \begin{bmatrix} 0. & 0.012 & 0.012 & 0. & 0.004 & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0.020 & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0.012 & 0.012 & 0. & 0.012 & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

slice of 225 × 225 × 3 Array

(17.3)

Кількість рядків та стовпчиків в (17.3) є непарною, що незручно для подальшого аналізу. Скоротимо кількість пікселів до найближчого парного числа, яке ділиться на ступені двійки, та трансформуємо зображення в градації сірого:

```

> img:=ToGrayscale(GetSubImage(img, 1, 1, 224, 224));
Embed(Create(img));

```

$$img := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

224 × 224 Array

(17.4)

Тепер ми оберемо:

1. кількість рівнів декомпозиції,
2. долю нульових коефіцієнтів у вейвлет-образі,
3. родину та параметри вейвлетів, які будуть застосовані для розкладання.



Рис. 17.4 – Скорочене до 224 пікселів і трансформоване у градації сірого зображення рентгенограми голови.

Доля (відсоток) нульових коефіцієнтів обирається з простих міркувань. Якщо нехтувати всіма вейвлет-коефіцієнтами областей LL, LH, HL при однорівневому вейвлет-розкладанні, то їх кількість пропорційна площі, яку ці області займають на Рис. 17.1, тобто 75%. В Табл. 17.1 наведений максимальний відсоток нулів для трешолдінгу матриці вейвлет-коефіцієнтів в залежності від кількості рівнів масштабування.

Табл. 17.1

Максимальний відсоток нулів для трешолдінгу матриці ВК.					
Кількість рівнів масштабування (m)	1	2	3	4	5
Відсоток нулів для трешолдінгу (%)	75	93.75	98.43750	99.60938	99.90234

Як видно з Рис. 17.3, доля (відсоток) коефіцієнтів, якими можна знехтувати, зростає з кількістю рівнів масштабування відповідно до виразу:

$$N_0 = 100 \left(1 - \frac{1}{2^{2m}} \right) \quad (17.5)$$

Квантиль – одна з числових характеристик випадкових величин, що застосовується в математичній статистиці. Термін використаний вперше *Кендалом* в 1940 р. Квантилі відсікають в межах ряду певну частину його членів, тобто, квантиль розподілення значень – це таке число x_p , що значення p -ї частини сукупності менше або рівне x_p . Наприклад, квантиль 0.25 (також називається 25-м процентілем або нижнім квантилем) змінної – це таке значення (x_p), що 25% (p) значень змінної попадають нижче даного значення.

Варіантом квантилів є так звані **перцентилі**: p -им перцентилем називають квантиль рівня $\frac{p}{100}$. При цьому зазвичай розглядають перцентилі для цілих p , хоча дана вимога не обов'язкова. Відповідно, **медіана** є 50-м перцентилем, а **перший** і **третій квантилі** – 25-м і 75-м перцентилем.

В цілому, поняття квантиль і перцентиль взаємозамінні, також, як і шкали числення вірогідності – абсолютна і процентна. Перцентилі також називаються **процентілями** або центілями.

Використаємо поняття процентіля для визначення порогового значення інтенсивності для тих пікселів, якими надалі нехтуватимемо під час трешолдінгу.

```
> imglevels:=2:
# Обрано два рівні масштабування
imgper:=floor(100*(1-1/(2)^(2*imglevels)));
# Задано відсоток нульових коефіцієнтів (заокруглено до цілого значення)
imgWLname:=Daubechies:
# Обрано родину вейвлетів Добеші [177]
imgWLparam:=16:
# Параметр довжини цифрових вейвлет-фільтрів
imgper := 93
(17.6)

> wave_pl:=WaveletPlot(WaveletCoefficients("Daubechies", 16),
minpoints=800, waveletname="Daubchies_16"):
plots[display](wave_pl, caption=("\nРис. 5 - Батьківські вейвлети
```

```
Добеші-16."), size=[hor, ver], plotopt);
# Батьківські вейвлети Добеші-16 використані в аналізі
```

Тепер можна провести вейвлет-перетворення (розкладання, декомпозицію) зображення та провести трешолдінг вейвлет-коефіцієнтів. Під час трешолдінгу найменші за абсолютним значенням вейвлет-коефіцієнти (їх відносна кількість визначена встановленим вище відсотком нулів у матриці вейвлет-коефіцієнтів, тобто 93%) будуть приведені до нульових значень.

В якості контролю перевіriamo кількість нулів в очищеній після трешолдінгу малих вейвлет-коефіцієнтів матриці вейвлет-декомпозиції.

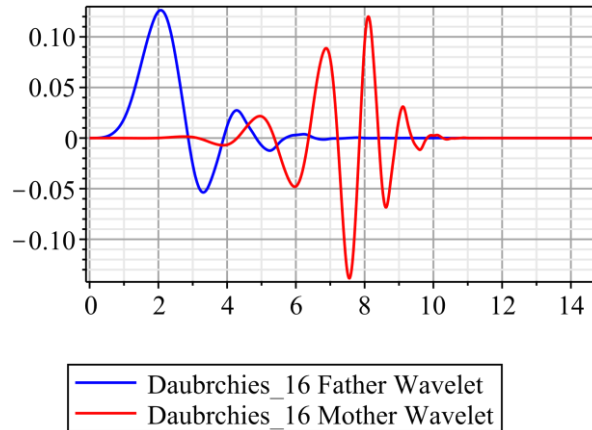


Рис. 17.5 – Батьківські вейвлети Добеші-16, використані в аналізі.

Пряме ДВП зображення (процедура ImageDWT, див. п. 17.2.1):

```
> imgT:=ImageDWT(img, WaveletCoefficients(imgWLname, imgWLparam),
imglevels):
```

Визначення максимальної величини, яку не перевищують найменші за модулем 93% (параметр *imgper* у (17.6)) вейвлет-коефіцієнтів:

```
> imgthresh:=Statistics[Percentile](ListTools:-
Flatten(convert(map(abs, imgT), listlist)), imgper);
imgthresh := 0.195
```

(17.7)

Трешолдінг малих вейвлет-коефіцієнтів з порогом *imgthresh* (17.7):

```
> imgR:=Matrix(map(
proc(z) options operator, arrow;
`if`(abs(z) <= imgthresh, 0, z)
end proc, imgT), datatype=float[8]));
```

imgR :=

$$\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

224 × 224 Matrix

(17.8)

Перевірка відсотка нульових пікселів в матриці вейвлет-декомпозиції (17.8) зображення другого рівня:

```
> count0(imgR);
```

93

Дворівневе очищення від 93% малих коефіцієнтів деталізації розкладання зображення (порівняйте з Рис. 17.3 в), тобто декомпозиція 2-го рівня (Рис. 17.6):

```
> Embed(imgR);
```

Отже, з усіх вейвлет-коефіцієнтів ненульовими залишилося лише 7%, таким чином відновлене зображення буде суттєво стиснуте.



Рис. 17.6 – Дворівневе очищення (декомпозиція 2-го рівня) зображення.

Тепер можна відновити (синтезувати) первинне зображення з урахуванням результатів трешолдінгу. Для цього здійснимо **зворотне** вейвлет-перетворення (відновлення, синтез) після трешолдінгу вейвлет-коефіцієнтів (процедура `InverseImageDWT`, див. п. 17.2.1):

```
> interface(displayprecision=1):
imgNew:=InverseImageDWT(imgR, WaveletCoefficients(imgWLname,
imgWLparam), imglevels);
interface(displayprecision=3):
```

$$imgNew := \begin{bmatrix} -4.7 \times 10^{-11} & -1.9 \times 10^{-11} & 1.1 \times 10^{-11} & 1.8 \times 10^{-12} & -1.6 \times 10^{-12} & \dots \\ 2.0 \times 10^{-10} & 7.3 \times 10^{-10} & -2.1 \times 10^{-10} & -1.6 \times 10^{-10} & 7.6 \times 10^{-11} & \dots \\ 9.3 \times 10^{-11} & -1.5 \times 10^{-10} & 2.4 \times 10^{-11} & 4.0 \times 10^{-11} & -1.7 \times 10^{-11} & \dots \\ -1.7 \times 10^{-10} & -2.0 \times 10^{-10} & 7.2 \times 10^{-11} & 3.6 \times 10^{-11} & -2.0 \times 10^{-11} & \dots \\ 5.5 \times 10^{-13} & 7.3 \times 10^{-11} & -1.8 \times 10^{-11} & -1.7 \times 10^{-11} & 7.8 \times 10^{-12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

224 × 224 Matrix (17.9)

Порівняємо первинне з Рис. 17.4 (матриця (17.4)) та синтезоване очищене зображення на Рис. 17.7 (матриця (17.9)):

```
> Embed([img,imgNew], interior=none, exterior=none):
"Рис. 7 - Оригінальне зображення (а) та очищене (б).";
```

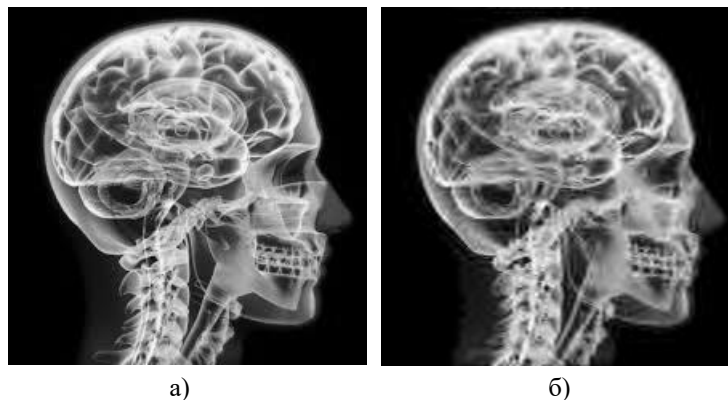


Рис. 17.7 – Оригінальне зображення з Рис. 17.4 (а) та очищене і відновлене (б).

Якість відновленого зображення на Рис. 17.7 (б) візуально виглядає доволі пристойно, особливо, якщо врахувати, що воно реконструйовано лише з 6% всіх вейвлет-коефіцієнтів розкладання.

На додаток до візуальної оцінки якості реконструйованого зображення обчислимо середню похибку (щодо оригінального зображення), використавши команду `ImageTools[Quality]`, а також проглянемо чорно-білу матрицю, яка зображує піксели з найбільшими похибками, тобто більшими за дві середні.

Середнє стандартне відхилення (похибка) інтенсивностей пікселів відновленого зображення від первинного [179]:

```
> rmse:=Quality(imgNew, img, rmse);
```

$$rmse := 0.04554 \quad (17.10)$$

Відношення енергії первинного зображення до середньоквадратичної похибки [179] відновленого зображення задане у децибелах ($20 \cdot \log(SNR)$) – або так зване **відношення «сигнал/шум»**:

```
> dB_SNR:=Quality(imgNew, img, snr);
dB_SNR := 19.86934
```

Якість відновленого зображення згідно до виразів (17.10) доволі висока: стандартне відхилення інтенсивності пікселів від оригіналу менше 5%, а відношення «сигнал/шум» складає майже 20 дБ, тобто майже порядок (дещо точніше це відношення дорівнює $SNR \approx 9.85$).

Візуальний образ «помилкових пікселів» відновленого зображення представим у вигляді чорно-білої матриці. Матриця пікселів з найбільшою похибкою (якщо похибка в інтенсивності пікселя більше $2 \cdot rmse$, піксель білий, в іншому випадку – чорний):

```
> Er:=Matrix(LinearAlgebra:-Dimensions(img),
proc (i, j) options operator, arrow;
`if`(2*rmse < abs(imgNew[i, j]-img[i, j]), 1, 0)
end proc);
```

$$Er := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

224 × 224 Matrix

(17.11)

Створимо зображення з матриці (17.11) і покажемо його:

```
> Embed(Create(Er));
```

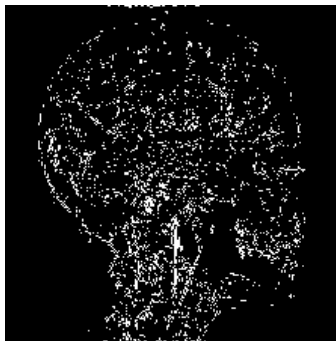


Рис. 17.8 – Візуальний образ «помилкових пікселів» відновленого зображення.

Оцінимо **ентропії** двох зображень (середню кількість інформації в бітах в розрахунку на один піксель зображення):

```
> Entropy(img); Entropy(imgNew);
6.42588
6.35913
```

Вони, як і очікувалося, є близькими. Ентропія відновленого зображення лише незначно відрізняється від оригіналу. Приблизна рівність ентропій оригіналу та зображення означає так само близькі закони ймовірнісного розподілу елементів обох зображень (пікселів) по інтенсивностях.

Статистична **кореляція** первинного та перетвореного зображень також дуже висока і позитивна:

```
> Statistics:-Correlation(convert(img, Vector),
convert(imgNew, Vector));
0.98907
```

Записуючи первинний файл зображення та синтезований файл, звертаємо увагу на їх розміри (у Кб):

```
> Write("D:\\OneDrive\\img-OD.BMP", img, format=BMP);
Write("D:\\OneDrive\\img-OD.jpeg", imgNew, format=JPEG);
51254
8384
```

Легко побачити, що відновлений файл суттєво стиснутий, більше ніж в 6 разів у порівнянні з первинним:

```
> compression:=evalf(%/%);
compression := 6.11331
```

17.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. Де використовуються вейвлети?
2. Що являє собою декомпозиція зображення? Поясніть особливості процесу.
3. В чому полягає однократне ДВП?
4. Що розуміється під позначеннями L та H ? Розшифруйте та поясніть їх зміст.
5. Поясніть зміст коефіцієнтів деталізації LH , HL , HH .
6. Скільки рівнів масштабування достатньо для аналізу зображення?
7. Чим визначається кількість рівнів масштабування?
8. Що таке енергія зображення? Що вона дозволяє оцінювати?
9. Який сенс має ентропія зображення? Що дозволяє оцінити ентропія зображення?
10. Які дві процедури необхідні для вейвлет-аналізу та синтезу двовимірних зображень?
11. Чому для аналізу краще використовувати парну кількість рядків та стовпчиків?
12. Як визначається доля нульових коефіцієнтів?
13. Поясніть поняття квантиля, процентіля та квартиля.
14. Як в практичній роботі організовано визначення відсотка нульових пікселів в матриці вейвлет-декомпозиції зображення?

♦ 1.2 Maple

1. Який пакет підключає дискретні перетворення? Поясніть перетворення, що до нього входять.
2. Яка команда дозволяє визначити розмірність матриці зображення?
3. Поясніть особливості команди, яка здійснює завантаження зображення.
4. Як за допомогою Maple конвертувати зображення в градації сірого?
5. Як переглянути зображення у **Worksheet**?
6. Що дозволяє визначити команда **floor**?
7. Як побудувати графік вейвлетів в Maple? Поясніть, що він демонструє.
8. Як команда дозволяє визначити максимальну величину, яку не перевищують вейвлет-коефіцієнти?
9. Поясніть зміст процедури трешолдінгу.
10. Поясніть особливості команд прямого та зворотного вейвлет-перетворень.
11. Як в Maple оцінюється якість відновленого зображення?
12. Поясніть призначення опцій *rmse* та *snr* в команді **Quality**.
13. Яка команда створює зображення з матриці числових даних? В яких пакетах ця команда зустрічається?
14. Як в Maple оцінити кореляцію між оригінальним та фільтрованим зображенням?

17.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Для виконання завдання скористайтесь власною фотографією для практичної роботи 7.
2. Опрацюйте способами, поданими у цій практичній.
3. Порівняйте параметри оригінального файлу з файлом після стискання. Так само порівняйте оригінальне зображення із зображенням після перетворень відповідно.
4. Проаналізуйте результати. Сформулюйте висновки.

ОБРОБКА АУДІО-СИГНАЛІВ

- 1  Запис дискретизованого аудіосигналу у Maple.
- 2  Фільтр Баттерворта для очищення аудіосигналу.
- 3  Вейвлет-аналіз, очищення та стискання аудіосигналу.

18.1 ЗАПИС ДИСКРЕТИЗОВАНОГО АУДІОСИГНАЛУ У MAPLE

18.1.1 Цифровий запис звуку та його відтворення. Мовлення

♦ 1.1 Цифровий запис звуку

Процес цифрового запису звуку [180], [181] включає етапи з наступними особливостями:

1. Аналоговий сигнал з пристрою введення передається на АЦП. Пристроєм введення може бути мікрофон, наприклад, мембранного, п'єзоелектричного [182] або електретного типу [183], [184], як на Рис. 18.1, функціональна схема якого наведена на Рис. 18.2 [185]. Ймовіріше за все саме електретний мікрофон вбудований у ваш мобільний пристрій, лептоп або ноутбук та ін.
2. АЦП перетворює сигнал з високою частотою (частотою дискретизації), при цьому здійснюючи вимірювання рівня аналогової звукової хвилі (квантування з певною розрядністю) і привласнення результату вимірювання двійникового числа з заданою кількістю бітів. Частота, з якою АЦП вимірює рівень аналогової хвилі, називається частотою дискретизації, або частотою семплення (*sample rate*).
3. Один семпл (зразок) із заданою кількістю бітів являє собою звуковий рівень в даний момент. Кількість можливих рівнів напруги на виході – це кількість рівнів, яку можна представити максимально можливим цифровим числом, тобто числом у вигляді 2^N , де N – кількість бітів в кожному семплі.

Від кількості бітів в одному семплі залежить точність, а отже й якість **відновлення** рівня звукової хвилі. З одного боку чим більше бітів в кожному семплі, тим точніше відображення сигналу, оскільки кожен додатковий біт подвоює кількість можливих значень. З іншого боку, викривлення сигналу (у відсотках) в цифрових системах збільшується зі зниженням рівня сигналу, на відміну від аналогових систем.

Кількість бітів безпосередньо впливає на результуючий **шум** у запису.



Рис. 18.1 – Загальний вигляд найбільш популярних електретних конденсаторних мікрофонів [185].

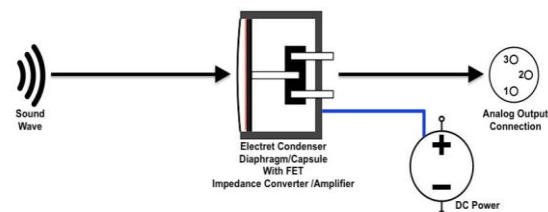


Рис. 18.2 – Спрощена схема функціонування вбудованого електретного мікрофону [185].

1. Частота цифрового сигналу залежить від частоти дискретизації.
2. АЦП виводить послідовність цифрових аудіосемплів у вигляді потоку нулів та одиниць.
3. Ці двійникові числа можуть зберігатися на різноманітних носіях. За потреби ці дані можуть бути відновлені у вигляді сигналу, а після підсилення відтворені на аналогових пристроях.

Параметри, які суттєво впливають на **якість відтворення** цифрового запису [180], [181]:

- розрядності АЦП та ЦАП;
- частоти дискретизації АЦП та ЦАП;
- джиттер (спотворень сигналу) АЦП та ЦАП;
- передискретизації.

До того ж важливу роль відіграють **налагодження**:

- кількості шумів по відношенню до сигналу;
- кількість спотворень нелінійного типу;
- інтермодуляція завад;
- нерівномірні параметри амплітуди і частот;
- процес взаємного проникнення каналів;
- динамічність діапазону.

Якість результату оцифрування сигналу в першу чергу залежить від АЦП.

♦ 1.2 Мовлення

Поглянемо тепер на характерні особливості мовлення, частотний діапазон якого знаходиться в межах 70-7000 Гц. Основний тон, інтонація, манера розмовляти та тембр голосу – основні характеристики, за якими можна впізнати людину.

Імпульси **основного тону** мають пилкоподібну форму, тому при їх періодичному повторенні отримується дискретний спектр з великою кількістю **гармонік** (до 40), частоти яких кратні частоті основного тону. Огинаюча спектра основного тону є спадною у бік високих частот. Тому для голосу чоловіка рівень складових на частоті 3000 Гц нижче їх рівня на частоті 100 Гц приблизно на 30 дБ.

Дзвінкі звуки мовлення, особливо голосні, мають *високий рівень інтенсивності, глухі – найнижчий*. Динамічний діапазон рівнів мовлення лежить в межах 35-45 дБ. Середня **тривалість голосних звуків** 0.15 с, *приголосних* – 0.08 с, звук «п» триває приблизно 0.03 с. До того ж, звуки мовлення не однаково інформативні: голосні звуки містять менше інформації на відміну від приголосних.

Одне й те саме повідомлення потребує різної пропускну здатності. Наприклад, для телеграфного повідомлення достатньо не більше 100 біт/с, а для мовного – приблизно 100 000 біт/с, тобто у 100 разів більше.

Приклад використання автокореляції для розпізнавання звуку, що відповідає проголошенню літери «а» добре описаний у [78], с. 65 та с. 67.

Декілька прикінцевих тезисів та рекомендацій до теоретичної частини:

- переважна більшість видань з технологій мовлення надрукована англійською мовою;
- найбільш повним і фундаментальним сучасним керівництвом з цифрової обробки мовлення є книга «Springer Handbook of Speech Processing», 2008 [186]. Нажаль, книга представлена тільки у комерційному доступі, однак з її змістом ви можете ознайомитися за посиланням у бібліографії;
- класичною є робота авторів Рабинер Л. Р., Шафер Р. В. 1981 р. [187];

Далі запишемо аудіосигнал, перетворимо и проаналізуємо его засобами Maple 2021, а також застосуємо до нього декілька методів фільтрації.

| 18.1.2 Запис власного мовлення

Підключимо всі необхідні пакети для роботи та задамо опції відображення результатів виконання команд.

```
> restart;
> with(AudioTools);
    [Audio, Clip, Convolution, Create, Duration, Extract,
    FormatFromName, Formats, Modulate, Normalize, Play, Preview,
    Read, Record, Resample, Scale, ToMono, ToStereo, Write]

> with(DocumentTools):
> with(SignalProcessing):
    with(SignalProcessing[Engine]):
> interface(displayprecision=3, rtablesize=7):
    plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
    ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:
    plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], 'font'=[TIMES,
    ROMAN, 12], 'axesfont'=[TIMES, ROMAN, 12], 'labelfont'=[TIMES,
    ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:
> hor:=360: ver:=280:
```

Детальна інформація про пакет роботи з аудіо-файлами **AudioTools**, зокрема про запис **Record** [188].

♦ 2.1 Встановлення параметрів запису в Maple 2021

З інформацією про вбудовані в інтерфейс Maple компоненти **Embedded Components** для роботи з аудіо-пристроями, а саме **MicrophoneComponent** можна ознайомитися або безпосередньо з довідки в Maple або на сайті [189].

Розмістіть курсор у потрібному місті документа. З панелі зліва «Palettes» в блоці «Components» (Рис. 18.3 а) натисніть на кнопку додавання мікрофону (Speaker) у «Worksheet»:



>

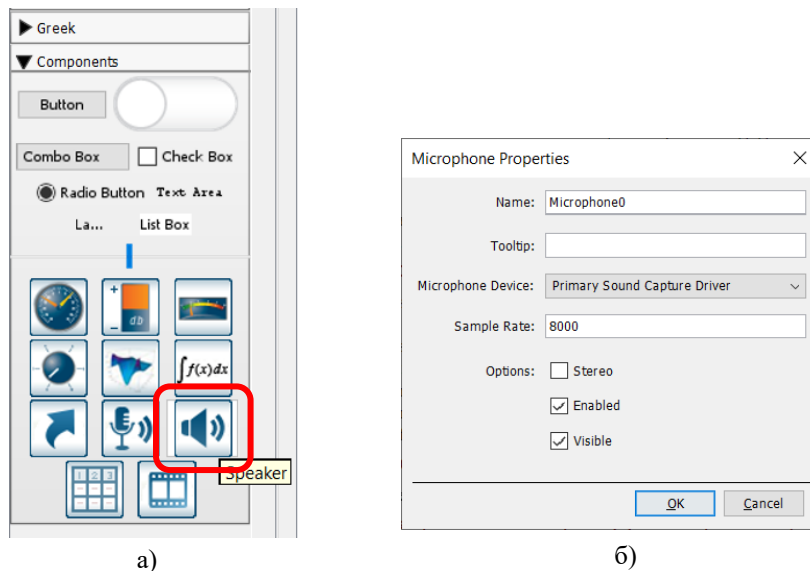


Рис. 18.3 – Додання мікрофону в документ Maple: а) кнопка мікрофону на панелі «Components»; б) вікно налагодження параметрів мікрофону.

Натисніть праву кнопку миші та у властивостях «Component Properties» змініть *samplerate* з 16 000 на 8 000 (Рис. 18.3 в).

```
> SetProperty("Microphone0", record, true);
```

Коли мікрофон записує, його «значення» є буфером зберігання, який зберігає частоту дискретизації мікрофона, поділену на 2. Щоб записати звук, цей буфер потрібно постійно очищувати, тобто переміщати в іншу таблицю зберігання.

```
> R:=GetProperty("Microphone0", value):
```

Перевіримо який *samplerate* встановлено у мікрофоні:

```
> f_sample8:=GetProperty("Microphone0", samplerate);
# Частота дискретизації (Hz) (sample rate)
f_sample8 := 8000
```

♦ 2.2 Запис мовлення з частотою дискретизації 8 кГц

Команду **AudioTools:-Record** можна використати для захоплення зразка заданої тривалості. В опціях команди ми покладемо тривалість запису у 3 (три) секунди. Переконайтеся, що навкруги не надто шумно. Одразу після натискання Enter у командному рядку нижче скажіть «ГАРНЕ СЯЙВО»:

```
> audio8rec_OD:=Record(3*Unit('s'), "Microphone0");
```

```
audio8rec_OD :=
┌ "Sample Rate"      8000
│ "File Format"      PCM
│ "File Bit Depth"   16
│ "Channels"         1
│ "Samples/Channel"  24000
│ "Duration"         3.00000 s
└
```

Збережемо запис у файлі із розширенням .wav, який буде збережено в поточну директорію, що вказується опцією "currentdir()" в команді об'єднання адрес для запису файлу з ім'ям audio8_OD.wav:

```
> Write(cat(currentdir(), "/audio8_OD.wav"), audio8rec_OD);
```

Поглянемо, як буде виглядати аудіозапис (аудіограма) голосу із промовленою фразою на площині з осями: по вертикалі – амплітуда у відносних одиницях, по горизонталі – час в секундах (Рис. 18.4):

```
> Preview(audio8rec_OD, output=embed, color="LightSkyBlue");
plots[textplot]([0, 0, "Рис. 1 - Аудіосигнал 8 кГц у вигляді аудіограми."], align={'below', 'right'}, axes=none,
'view'=[-1..4, -1..1], size=[600, 40]);
```

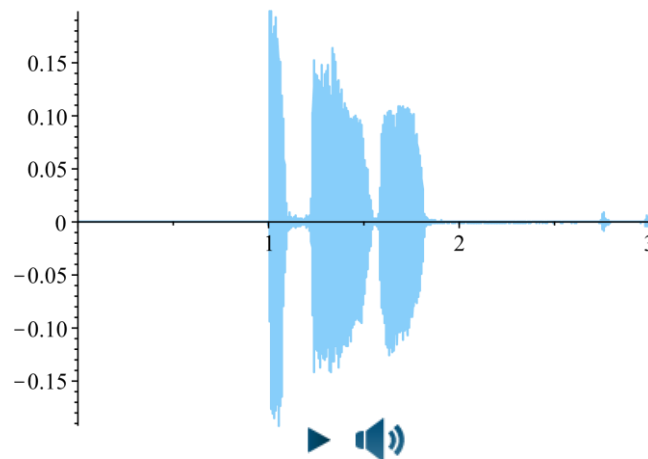


Рис. 18.4 – Аудіограма запису.

♦ 2.3 Аналіз запису

Далі будемо працювати з файлом-записом, для цього переглянемо адресу директорії, де він зберігається:

```
> audiofile8:=cat(currentdir(), "/audio8_OD.wav");
audiofile8 :=
"D:\OneDrive\02 Courses\ - Chuiko - \Signal Processing 305\ - Посібник -
\Maple for Practice\Pract 9 - 18/audio8_OD.wav"
```

```
> aud8_OD:=Read(audiofile8);    attributes(aud8_OD)[1];
attributes(aud8_OD)[2];        attributes(aud8_OD)[3];
```

```
aud8_OD :=
[
  "Sample Rate"      8000
  "File Format"      PCM
  "File Bit Depth"   16
  "Channels"         1
  "Samples/Channel"  24000
  "Duration"         3.000 s
]
```

(18.1)

З'ясуємо об'єм файлу із записом:

```
> FileTools[Size](cat(currentdir(), "/audio8_OD.wav")):
%/1e3*Unit('kB');
48.044 kB
```

(18.2)

Про одиниці вимірювання об'єму інформації та їх використання у Maple ви можете дізнатися більше з Help System за посиланням **?Units, Information** або з інтернет-сторінки [190]:

```
> ?Units, Information
```

Подивимося на весь аудіозапис (Рис. 18.5). З огляду на особливості Maple у відображенні аудіограм у pdf-файлах після конвертації, варто розміщувати їх у таблицях з можливістю обмежувати розміри комірок. На жаль, розмір аудіограм в Maple автоматично масштабується під розмір вікна. Тому далі необхідно додати таблицю на 2 комірки: в першій розмістити команди відображення аудіограми і побудови графіку із підписом; а в другій – команди і, відповідно, відображення другої аудіограми. Далі наведено команди для першої і другої комірок текстової таблиці.

Перша комірка таблиці (Рис. 18.5):

```
> Extract(aud8_OD, 1.33..2.77):
Preview(%, output=embed, color="RoyalBlue"):
plots[textplot]([0, 0, "Рис. 2 - Частина запису із мовленням."],
align={'below', 'right'}, axes=none, 'view'=[-1..4, -1..1],
size=[600, 40]);
```

Друга комірка таблиці (Рис. 18.6):

```
> Extract(aud8_OD, 2.525..2.77):
Preview(%, output=embed, color="RoyalBlue"):
plots[textplot]([0, 0, "Рис. 3 - Форма аудіограми, зручна для від-
шукування інтервалів звучання літер."], align={'below', 'right'},
axes=none, 'view'=[-1..4, -1..1], size=[600, 40]);
```

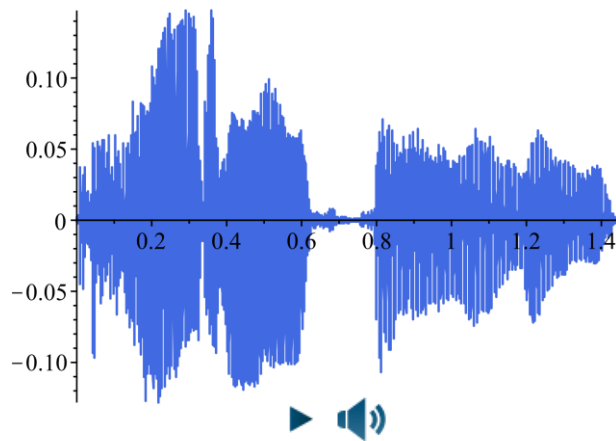


Рис. 18.5 – Частина запису із промовлянням фрази.

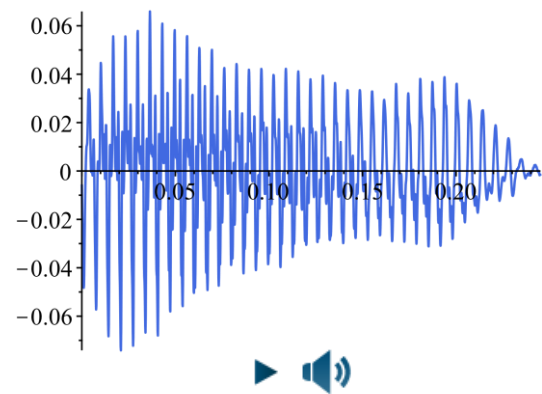


Рис. 18.6 – Форма аудіограми, зручна для визначення інтервалів звучання літер.

Спробуємо на слух виділити інтервали звучання літер у запису, представленому на Рис. 18.6, та зберемо їх у Табл. 18.1.

Табл. 18.1

Часові інтервали звучання літер.				
Г	а	р	н	е
1.33..1.45	1.5..1.6	1.63..1.72	1.72..1.84	1.84..2.05
С	я	й	в	о
2.058..2.13	2.13..2.31	2.35..2.525	2.525..2.6	2.6..2.77

Поглянемо на ділянку на початку промовляння з 0.98 с по 1.35 с (Рис. 18.7):

```
> Preview(aud8_OD, 0.98..1.35, color="Blue") :
plots[display](%, gridlines, caption="Рис. 4 - Інтервал з 0.98 по
1.35 с.", size=[500, 300], plotopt);
```

Для прослуховування виділеної на Рис. 18.7 ділянки нам необхідно спочатку перевести дані (18.1) у числову послідовність у вигляді ряду. Перевіримо тип даних у (18.1) і поглянемо яка інформація, окрім числової, міститься у виразі:

```
> whattype(aud8_OD);      nops(aud8_OD);
   op(4, aud8_OD);        op(2, aud8_OD);
                               Array
                               4
                               datatype = float, storage = rectangular, order
                               = Fortran_order, attributes = [8000, 16, 1]
                               1 ..24000
```

Оскільки в матриці (18.1) є також супровідна стрингова інформація, виділимо з неї вектор-рядок числових даних:

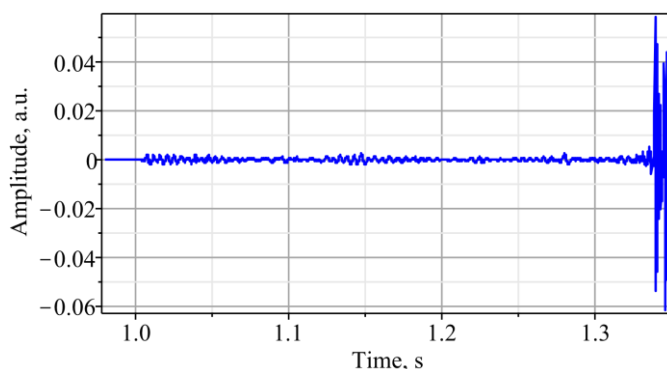


Рис. 18.7 – Інтервал з 0.98 по 1.35 с на початку промовляння фрази.

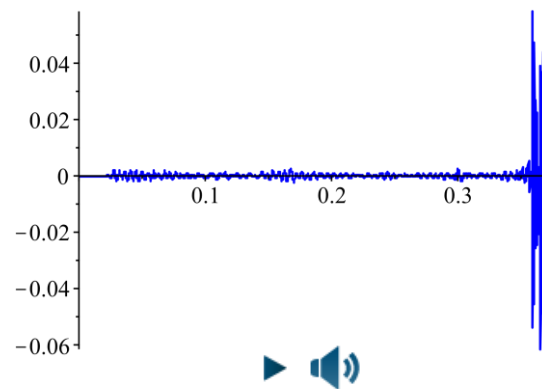


Рис. 18.8 – Інтервал з Рис. 18.7 у вигляді аудіограми.

```

> aud8_dat:=convert(aud8_OD, Vector[row], datatype=float[8]);
num_el:=numelems(%);
      aud8_dat := [0., 0., -0.00003, 0., 0., 0., 0., 0., ...,
      ... 23993 row vector entries not shown]
      num_el := 24000

```

(18.3)

Тепер з'ясуємо, з якого номера у рядку (18.3) починається час, якому відповідає 0.98 с, і час, якому відповідає 1.35 с. Для цього зробимо прості математичні обчислення:

```

> interface(displayprecision=2):
Duration(aud8_OD)/num_el;
# Тобто на 1 секунду припадає відповідно 8000 значень, як то і має бути
згідно заданої частоти дискретизації.
# Отже, номер позиції у масиві числа, якому відповідає 0.98 с:
0.98*num_el/Duration(aud8_OD): Numb[0.98]:=trunc(%);
# Номер позиції числа у масиві, якому відповідає 1.35 с:
1.35*num_el/Duration(aud8_OD): Numb[1.35]:=trunc(%);
interface(displayprecision=3):
      1
      8000      Numb0.98 := 7840      Numb1.35 := 10800

```

Тепер виберемо з масиву потрібний інтервал:

```

> aud8_part:=aud8_dat[7840..10800];
      aud8_part := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., ...,
      ... 2954 row vector entries not shown]

```

Перетворимо отриманий вектор в аудіофайл з відповідною частотою дискретизації 8 кГц:

```

> aud8_cut:=Create(aud8_part, rate=8000):
Переглянемо результат на Рис. 18.8:
> Preview(aud8_cut, output=embed, color="Blue"):
plots[textplot]([0, 0, "Рис. 5 - Інтервал аудіосигналу у вигляді
аудиограми.", align={ 'below', 'right' }, axes=none, 'view'=[-1..4,
-1..1], size=[600, 40]);

```

Між Рис. 18.7 та Рис. 18.8 є важлива відмінність, окрім сітки на площині та підписів по осях, – на Рис. 18.8 є кнопки керування медіаконтентом. Тобто, вибраний інтервал значень з матриці можна прослуховувати. За потреби вирізану частину аудіоданих можна записати у окремий файл, скориставшись командою:

```

> Write("aud8_cut.wav", aud8_cut);
      5966

```

Після конвертації аудіозапису у масив числових даних ми можемо прослідкувати «положення» літер на графіку. Спочатку побудуємо графік тільки тієї частини, де звучить саме мова:

```

> pl_lat:=plots[listplot](aud8_dat, tickmarks=[8, 8], style=line,
thickness=1, color="Silver", caption="Рис. 6 - Часовий ряд первин-
них спостережень (8 кГц).", labels=["Number of sample", "Value"],
view=[10600..22200, -0.15..0.17], size=[1000, ver], plotopt):
pl_lat:
> Розрахуємо номери крайових значень відповідних часових інтервалів
для літер з урахуванням в аналізу.

```

Для прослуховування виділеної на Рис. 18.7 ділянки нам необхідно спочатку перевести дані (18.1) у числову послідовність у вигляді ряду. Перевіримо тип даних у (18.1) і поглянемо яка інформація, окрім числової, міститься у виразі:

```

> whattype(aud8_OD);      nops(aud8_OD);
op(4, aud8_OD);          op(2, aud8_OD);
      Array
      4
      datatype = float8, storage = rectangular, order
      = Fortran_order, attributes = [8000, 16, 1]
      1..24000

```

Оскільки в матриці (18.1) є також супровідна стрингова інформація, виділимо з неї вектор-рядок числових даних:

Табл. 18.2

Номера значень відповідних країв інтервалів звучання літер.					
Літера	Початок, час (с)	Кінець, час (с)	Тривалість (с)	Початок, № відліку	Кінець, № відліку
Г	1.33	1.45	0.12	10600	11600
а	1.5	1.6	0.10	12000	12800
р	1.63	1.72	0.09	13000	13800
н	1.72	1.84	0.12	13800	14700
е	1.84	2.05	0.21	14700	16400
С	2.058	2.13	0.07	16500	17000
я	2.13	2.31	0.18	17000	18500
й	2.31	2.525	0.21	18500	20200
в	2.525	2.6	0.08	20200	20800
о	2.6	2.77	0.17	20800	22200

Для зручності варто задати опцію відображення 2-х чисел після коми:

```
> interface(displayprecision=2):
```

Для визначення тривалості, номера початку відліку та номера його кінця у кожному відповідну комірку необхідно додати команди за прикладом нижче:

```
> 1.45-1.33; # Тривалість
```

```
> 1.33*num_el/Duration(aud8_OD): trunc(%); # Початок, № відліку
```

```
> 1.45*num_el/Duration(aud8_OD): trunc(%); # Кінець, № відліку
```

Команда **trunc** здійснює округлення до найближчого цілого, що зручно для відображення у Maple великих чисел з нульовою дрібною частиною, як от $10\,800.000 = 10\,800$.

Після завершення обрахунків на панелі справа з властивостями таблиці «зніміть» галочку з опції «Show Input». Так в таблиці залишаться тільки результати розрахунків, як в Табл. 18.2.

Після таблиці повернемо відображення 3-х чисел після коми:

```
> interface(displayprecision=3):
```

Підберемо колір для виділення інтервалів літер:

```
> ColorTools[Color] ("OrangeRed");  
(RGB:10.2710)
```

Вертикальні лінії, що позначатимуть границі інтервалів на графіку, інтервали часу, де майже відсутній звук і, власне, графік (Рис. 18.9), – варто завдавати одним командним рядком:

```
> pl_lin:=plot([  
  <<10640,10640>|<-0.15,0.18>>, <<11600,11600>|<-0.15,0.18>>,  
  <<12000,12000>|<-0.15,0.18>>, <<13040,13040>|<-0.15,0.18>>,  
  <<13760,13760>|<-0.15,0.18>>, <<14720,14720>|<-0.15,0.18>>,  
  <<16400,16400>|<-0.15,0.18>>, <<16464,16464>|<-0.15,0.18>>,  
  <<17040,17040>|<-0.15,0.18>>, <<18480,18480>|<-0.15,0.18>>,  
  <<20200,20200>|<-0.15,0.18>>, <<20800,20800>|<-0.15,0.18>>,  
  <<22160,22160>|<-0.15,0.18>>  
], style=line, linestyle=dash, thickness=1, color="OrangeRed",  
axes=boxed, size=[1000, 300], plotopt):  
# pl_lin - вертикальні лінії, що відповідають границям літер  
pl_title:=plots:-textplot([  
  [11000, 0.15, "Г"], [12300, 0.15, "а"],  
  [13300, 0.15, "р"], [14100, 0.15, "н"],  
  [15500, 0.15, "е"], [16650, 0.15, "с"],  
  [17500, 0.15, "я"], [19200, 0.15, "й"],  
  [20400, 0.15, "в"], [21400, 0.15, "о"]  
], 'align'={ 'above', 'right' }, plotopt):  
# pl_lin - написи відповідних інтервалам літер  
POLYGONS([ [11600,-0.15], [11600,0.18], [12000,0.18], [12000,-  
  0.15] ], STYLE(PATCHNOGRID), COLOR(RGB, 0.2, 0.2, 0.2),  
TRANSPARENCY(0.5)): pl_p11:=%:  
POLYGONS([ [16400,-0.15], [16400,0.18], [16464,0.18], [16464,-  
  0.15] ], STYLE(PATCHNOGRID), COLOR(RGB, 0.2, 0.2, 0.2),
```

```

TRANSPARENCY(0.5)): pl_pol2:=%:
# pl_pol1, pl_pol2 - сірі прямокутники
> plots[display](pl_pol1, pl_pol2, pl_lat, pl_lin, pl_title,
caption="Рис. 7 - Суб'єктивні границі інтервалів літер.");

```

Для порівняння якості запису на 8 кГц і, наприклад, CD-quality (44.1 kHz), можна записати новий файл, скориставшись наступними командами (не забувайте прибрати хеші):

```

> # audioCD_OD:=Record(3000*Unit('ms'), "Microphone0",
rate=44.1*Unit('kHz'));
> # Write("audioCD_OD.wav", audioCD_OD);
> # Preview(audioCD_OD, output=embed, color="LightSkyBlue");

```

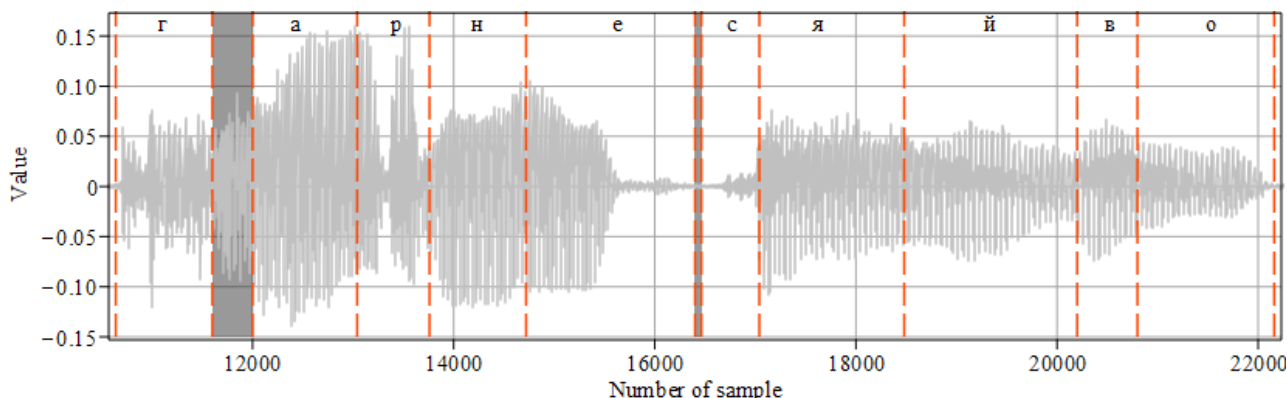


Рис. 18.9 – Суб'єктивні границі інтервалів літер у записі 8 кГц.

♦ 2.4 Запис мовлення з частотою дискретизації 16 кГц

Додаємо мікрофон, як в п. 18.1♦ 2.1:



>

Тепер зробимо запис з удвічі більшою частотою дискретизації. Для цього натисніть праву кнопку миші і у властивостях «Component Properties» змініть *samplerate* з 8 000 на 16 000:

```

> SetProperty("Microphone1", record, true);
Переконаємося, що налагодження змінено:
> R:=GetProperty("Microphone1", value);
R := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., ..., 7993 Array entries not shown]
> rf_sample16:=GetProperty("Microphone1", samplerate);
# частота дискретизації (Gz) (sample rate)
rf_sample16 := 16000

```

В опціях команди встановлено тривалість запису у 3 (три) секунди. Знову переконайтеся, що навкруги не надто шумно, і, після натискання Enter у командному рядку, скажіть «ГАРНЕ СЯЙВО»:

```

> audio16rec_OD:=Record(3*Unit('s'), "Microphone1");

```

```

audio16rec_OD :=
┌ "Sample Rate"      16000
├ "File Format"      PCM
├ "File Bit Depth"   16
├ "Channels"         1
├ "Samples/Channel"  48000
└ "Duration"         3.00000 s

```

```

> Write("audio16_OD.wav", audio16rec_OD);
96044

```

```

> Preview(audio16rec_OD, output=embed, color="DarkSalmon"):
plots[textplot]([0, 0, "Рис. 8 - Аудіосигнал 16 кГц у вигляді аудіограми."], align={'below', 'right'}, axes=none, 'view'=[-1..4, -1..1], size=[600, 40]);

```

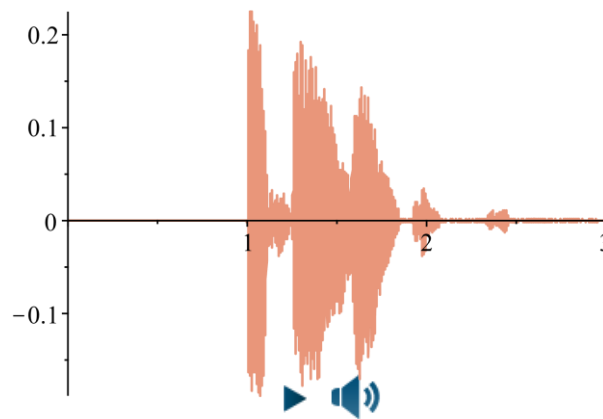


Рис. 18.10 – Аудіосигнал 16 кГц у вигляді аудіограми.

Опрацюємо запис, файл якого знаходиться у директорії за такою адресою:

```
> audiofile16:=cat(currentdir(), "/audio16_OD.wav");
# "D:\OneDrive\02 Courses\ - Chuiko -\Signal Processing 305\
Laboratory SP 2022\Voice Recognition"
> aud16_OD:=Read(audiofile16); attributes(aud16_OD)[1];
attributes(aud16_OD)[2]; attributes(aud16_OD)[3];
```

```
aud16_OD :=
[
  "Sample Rate"      16000
  "File Format"      PCM
  "File Bit Depth"   16
  "Channels"         1
  "Samples/Channel"  48000
  "Duration"         3.00000 s
]
```

Переглянемо об'єм файлу із записом:

```
> FileTools[Size](cat(currentdir(), "/audio16_OD.wav"))*Unit('B'):
%/1e3*Unit('kB');
96.04400 B kB
```

Як видно з порівняння із (18.2), його розмір у два рази більший.

18.1.3 Фільтр Баттерворта для очищення аудіо-сигналу

В попередніх пунктах ми отримали два записи голосу з частотами дискретизації у 8 кГц та 16 кГц. Далі ми оброблятимемо двома методами запис частотою 8 кГц та аналізуватимемо результати, спробуємо відфільтрувати голос і відновити відфільтрований запис для порівняння з оригінальним записом.

♦ 3.1 Спектральний аналіз аудіо-сигналу частотою 8 кГц

Пакет Maple для обробки масивів даних **SignalProcessing** пропонує наступні інструменти для обробки дискретних даних: **FFT**, **DFT**, **DWT** (вейвлет-аналіз), **IIR** та **FIR** фільтри, генерація сигналів, спектральний аналіз та побудова спектрограм і багато іншого.

Побудуємо спектрограму даних аудіофайлу і додамо для порівняння графік первинного сигналу (Рис. 18.11):

```
> Spectrogram(aud8_OD, colorscheme=["zgradient", [white, Bisque,
black], markers=[0, 0.5, 1]], tickmarks=[12,8], caption="Рис. 9а -
Спектрограма первинного аудіосигналу.",
includesignal=[color=ColorTools:-Color([0.25, 0.2, 0.2]),
tickmarks=[12,8], caption="Рис. 9б - Первинний аудіосигнал 8кГц
(для співставлення зі спектрограмою).", plotopt2], size=[700,
0.9*ver], plotopt2); pls8_orig:=%:
```

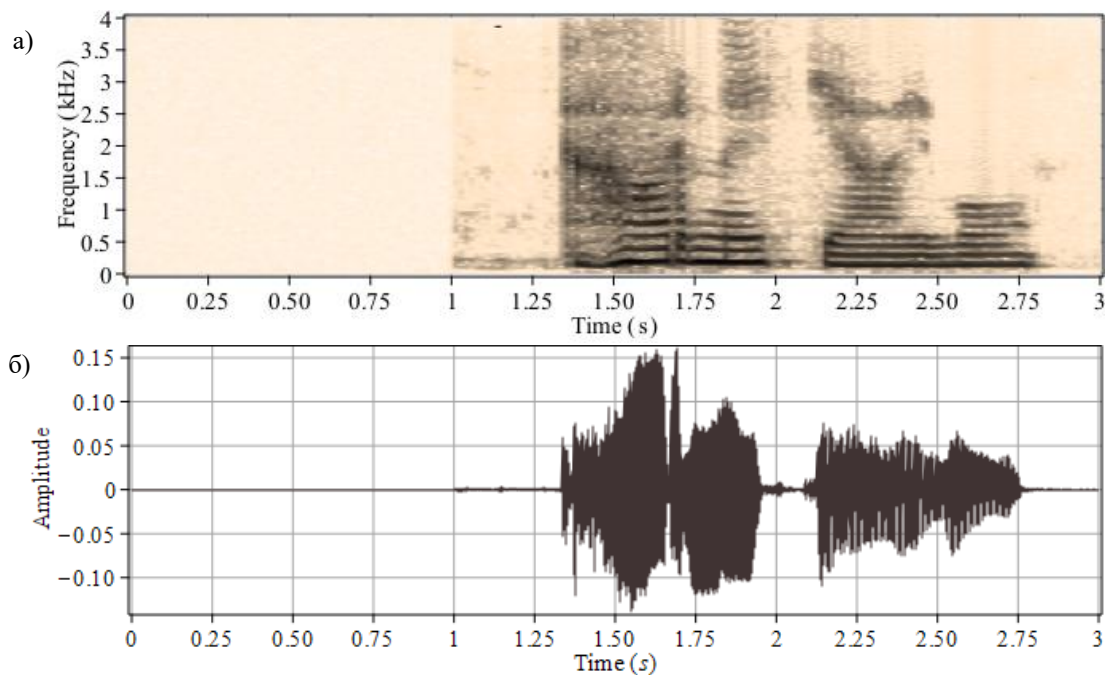


Рис. 18.11 – Спектрограма (а) та графік первинного сигналу (б).

З порівняння Рис. 18.11 (а) і (б) добре видно, що під час промовляння глухої літери «г» (див. Рис. 18.9) у звуку, що генерується, наявний майже весь спектр частот. Також можна побачити, що частотний спектр голосних ширший за приголосні (Рис. 18.11 (а)). На інтервалах часу формування голосних можна побачити складові частоти (лінії затемнення на спектрограмі Рис. 18.11 (а)).

Побудуємо періодограму – залежність потужності сигналу від частоти:

```
> Periodogram(aud8_OD, frequencyscale="kHz", reduceplot=4,
color="DimGrey", tickmarks=[8, 6], caption="Рис. 10 - Періодограма
первинного аудіо-сигналу 8 кГц.", size=[700, 0.9*ver], plotopt2);
plp8_orig:=%:
```

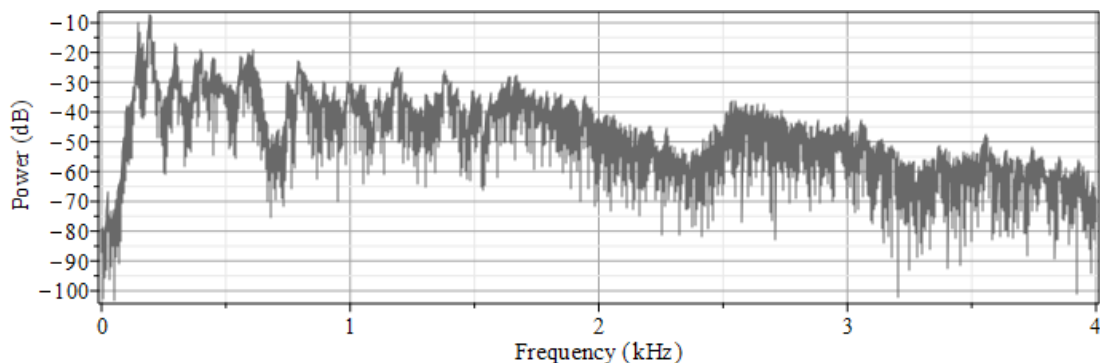


Рис. 18.12 – Періодограма первинного аудіо-сигналу 8 кГц.

Зробимо спектральний аналіз потужності за допомогою ШПФ. Для цього спочатку вибілимо частину сигналу, кратну 2 у деякому ступені:

```
> log[2](24000):=evalf(%);
14.55
> power_2:=2^floor(%);
power_2 := 16384
> 24000-%:="стартуємо з номеру меншого за"':=%;
"стартуємо з номеру меншого за" = 7616
```

Здійснимо швидке перетворення Фур'є над інтервалом даних aud8_OD від 7501 до $7500 + 16384 = 23884$ і побудуємо графік зі спектром (Рис. 18.13 (а)):

```
> fq:=FFT(aud8_OD[7501..23884]):
> psq:=PowerSpectrum(fq):
```

```
> ps1:=plots:-pointplot([seq([i*f_sample8/power_2, psq[i]],
i=1..(1/2)*power_2)], thickness=0, color="DimGrey", connect=true,
caption="Рис. 11 - Спектр потужності первинного запису мовлення,
побудований за допомогою ШПФ.", labels=["Frequency, Hz", "Power,
dB"], view=[0..1000, 0..0.2], size=[800, ver], plotopt2):
plots:-display(ps1, size=[700, ver]);
```

Побудуємо періодограму з опцією *powerscale = absolute*, і порівняємо її з Рис. 18.13 (б), тобто отриманою за допомогою ШПФ та додаткового розрахунку:

```
> Periodogram(aud8_OD, powerscale="absolute", thickness=0,
color="CadetBlue", labels=["Frequency, Hz", "Power, dB"],
caption="Рис. 12 - Спектр потужності (періодограма) первинного ау-
діосигналу, отриманий вбудованою командою Periodogram з опцією
powerscale='absolute'.", view=[0..1000, 0..0.2], size=[700,
1.05*ver], plotopt2);
```

З порівняння Рис. 18.13 (а) і (б) очевидним є простий висновок, що спектр потужності – те ж саме, що й періодограма. Хоча на графіку Рис. 18.13 (а) піки (максимуми) виглядають дещо вищими. Цьому є просте пояснення: кількість точок для аналізу у першому випадку менша, тоді як для побудови графіка на Рис. 18.13 (б) використаний увесь ряд значень.

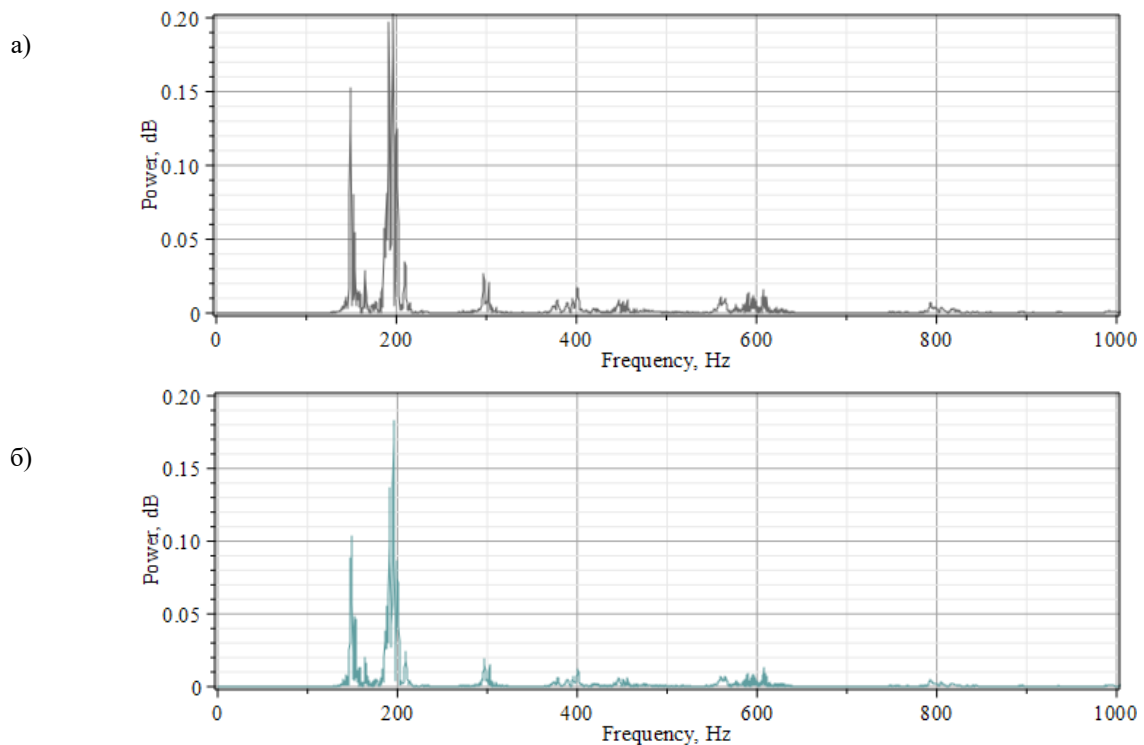


Рис. 18.13 – Спектр потужності первинного аудіо-сигналу, побудований за допомогою:
а) ШПФ; б) вбудованої команди **Periodogram** з опцією *powerscale="absolute"*.

♦ 3.2 Застосування фільтра Баттерворта для очищення аудіо-сигналу 8 кГц

Далі спроектуємо **фільтр Баттерворта**, причому як для **верхніх**, так і для **нижніх** частот, визначимо критичну частоту, згенеруємо відводи фільтра та застосуємо його до первинного аудіо-сигналу.

Опції команди **GenerateButterworthTaps**, яка генерує масив відводів для фільтра Баттерворта з безкінечною імпульсною характеристикою, є такими:

- *order* – ціле число [1..12], визначає порядок фільтра для створення;
- *freq* – дійсне число, тобто частота обрізання для фільтра нижніх або верхніх частот; *f* має задовольняти умові $0 < f < \frac{1}{2}$.

Додатково можна вказати тип фільтра за допомогою опції *filtertype*:

- *lowpass* – нижніх частот,
- *highpass* – верхніх частот.

Покладемо критичну частоту наступною:

```
> fc:=1500;
```

Вкажимо частоту дискретизації фільтру Баттерворта:

```
> samplingRate8:=attributes(aud8_OD)[1];
      samplingRate8 := 8000
```

Спроекуємо фільтр Баттерворта 9-го порядку для нижніх і верхніх частот:

```
> taps_lp:=GenerateButterworthTaps(9, fc/samplingRate8,
  'filtertype'='lowpass');
taps_hp:=GenerateButterworthTaps(9, fc/samplingRate8,
  'filtertype'='highpass');
      taps_lp := [0.00067, 0.00605, 0.02418, 0.05642, 0.08463, 0.08463,
      0.05642, ..., ... 13 Array entries not shown]
      taps_hp := [0.02530, -0.22771, 0.91085, -2.12532, 3.18798,
      -3.18798, 2.12532, ..., ... 13 Array entries not shown]
```

Застосуємо фільтр Баттерворта до даних аудіо-сигналу:

```
> filteredSpeech8_lp:=InfiniteImpulseResponseFilter(aud8_OD,
  taps_lp);
  filteredSpeech8_hp:=InfiniteImpulseResponseFilter(aud8_OD,
  taps_hp);
```

Побудуємо спектрограму (Рис. 18.14) сигналу, обробленого *lowpass*-фільтром (фільтром нижніх частот), і порівняємо з оригінальними даними:

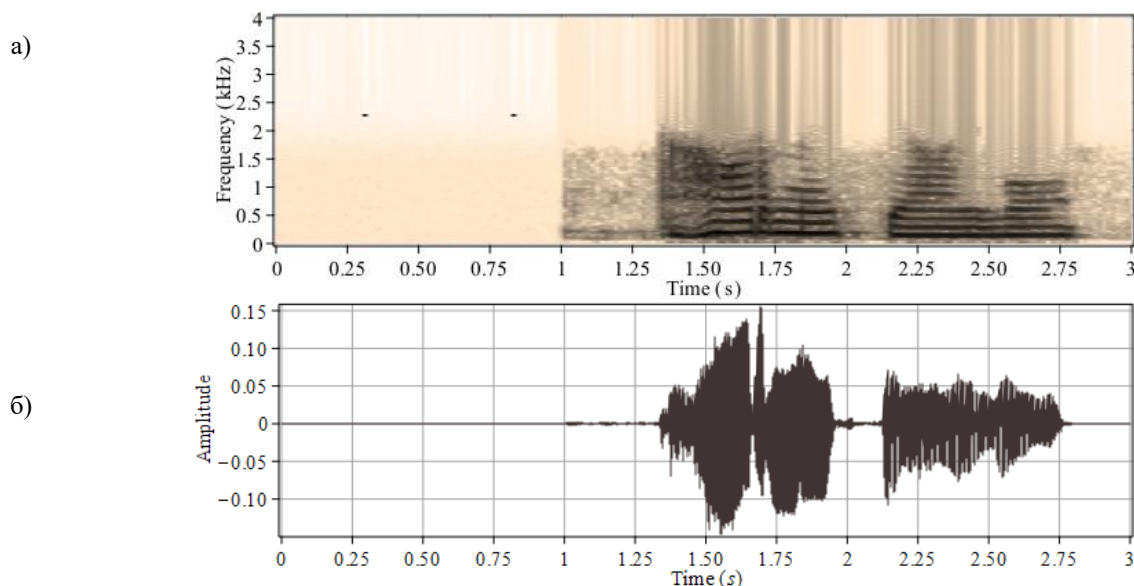


Рис. 18.14 – Спектрограма (а) та графік (б) очищеного аудіосигналу 8 кГц після застосування фільтру Баттерворта нижніх частот.

```
> Spectrogram(filteredSpeech8_lp, samplerate=samplingRate8,
  colorscheme=["zgradient", [white, Bisque, black], markers=[0, 0.5,
  1]], tickmarks=[12, 8], reduceplot=1, caption="Рис. 13 а - Спект-
  рограма аудіосигналу обробленого lowpass-фільтром.",
  includesignal=[color=ColorTools:-Color([0.25, 0.2, 0.2]),
  tickmarks=[12,8], caption="Рис. 13 б - Аудіосигнал 8 кГц після об-
  робки lowpass-фільтром.", plotopt2], size=[700, 240], plotopt2);
```

Як можна бачити з Рис. 18.14 (а), фільтр Баттерворта «відфільтрував», тобто, залишив у масиві дані, що відповідають частотам нижче приблизно 2 кГц. А дані, що відповідають високим частотам, тобто, ті, що вищі за 2 кГц, – «обрізав», тобто майже обнулив.

Вплив порядку фільтру на результат фільтрації спробуйте дослідити самостійно, оскільки це не складно: достатньо міняти величину порядку в команді проектування фільтру **GenerateButterworthTaps** і слідкувати за змінами спектрограми аудіосигналу.

Подивимось, як змінилась періодограма (Рис. 18.15 (б)):

```
> Periodogram(filteredSpeech8_lp, samplerate=samplingRate8,
  frequencyscale="kHz", color="DimGrey", tickmarks=[8, 6],
  caption="Рис. 14 - Періодограма аудіо-сигналу 8 кГц очищеного
```

```
lowpass-фільтром Баттерворта.", size=[700, 240], plotopt2):
plp8_f_lp:=%:
plots:-display(Array([[plp8_orig], [plp8_f_lp]]));
```

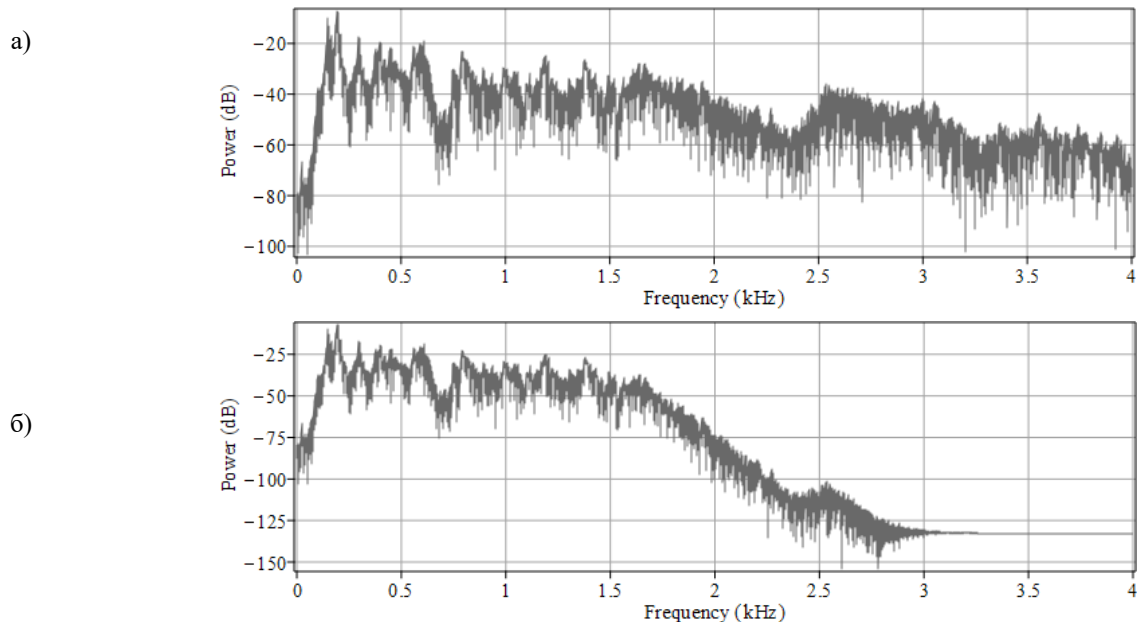


Рис. 18.15 – Періодограма (а) первинного та (б) очищеного lowpass-фільтром Баттерворта аудіо-сигналу 8 кГц.

Рис. 18.15 підтверджує висновки, зроблені вище щодо характеру результату фільтрації аудіо-сигналу 8 кГц: «хвіст» періодограми на Рис. 18.15 (б) виглядає наче «зрізаний».

Аналогічне дослідження спектру потужності для очищеного аудіо-сигналу 8 кГц фільтром Баттерворта верхніх частот ви можете зробити самостійно і оцінити в такий спосіб вплив роботи фільтра на результат.

Фільтрований масив даних можна відновити на частоті дискретизації та експортувати (записати) у файл:

```
> aud8_filtBT_lp_OD:=Create(filteredSpeech8_lp, rate=8000);
aud8_filtBT_hp_OD:=Create(filteredSpeech8_hp, rate=8000);
```

$aud8_filtBT_lp_OD := \begin{bmatrix} \text{"Sample Rate"} & 8000 \\ \text{"File Format"} & PCM \\ \text{"File Bit Depth"} & 16 \\ \text{"Channels"} & 1 \\ \text{"Samples/Channel"} & 24000 \\ \text{"Duration"} & 3.00\ s \end{bmatrix},$	$aud8_filtBT_hp_OD := \begin{bmatrix} \text{"Sample Rate"} & 8000 \\ \text{"File Format"} & PCM \\ \text{"File Bit Depth"} & 16 \\ \text{"Channels"} & 1 \\ \text{"Samples/Channel"} & 24000 \\ \text{"Duration"} & 3.00\ s \end{bmatrix}$
--	---

```
> Write("IIRtest-aud8_filtBT_lp_OD.wav", aud8_filtBT_lp_OD);
Write("IIRtest-aud8_filtBT_hp_OD.wav", aud8_filtBT_hp_OD);
48044
48044
```

Видно, що розмір файлу при цьому не змінився. Прослухаємо і порівняємо результат обробки сигналу фільтрами Баттерворта нижніх (Рис. 18.16) і верхніх частот (Рис. 18.17):

```
> Preview(aud8_filtBT_lp_OD, output=embed, color="DarkCyan"):
plots[textplot]([0, 0, "Рис. 15 - Аудиограма сигналу обробленого
lowpass-фільтром Баттерворта."], align={'below', 'right'},
axes=None, 'view'=[-1..4, -1..1], size=[600, 40]);
> Preview(aud8_filtBT_hp_OD, output=embed, color="Cyan"):
plots[textplot]([0, 0, "Рис. 16 - Аудиограма сигналу обробленого
highpass-фільтром Баттерворта."], align={'below', 'right'},
axes=None, 'view'=[-1..4, -1..1], size=[600, 40]);
```

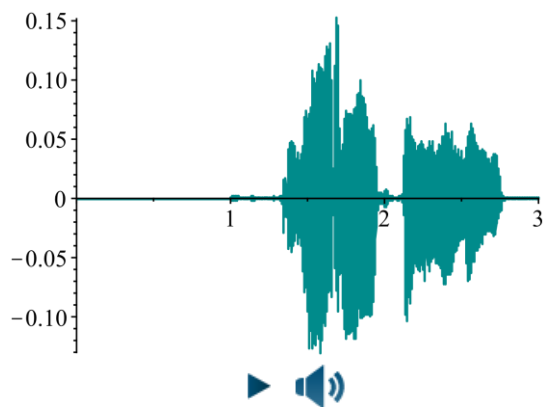


Рис. 18.16 – Аудіограма аудіо-сигналу обробленого lowpass-фільтром Баттерворта.

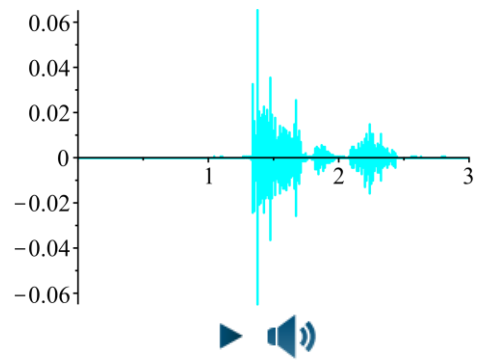


Рис. 18.17 – Аудіограма сигналу, обробленого highpass-фільтром Баттерворта.

18.2 ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ, ОЧИЩЕННЯ ТА СТИСКАННЯ АУДІО-СИГНАЛУ

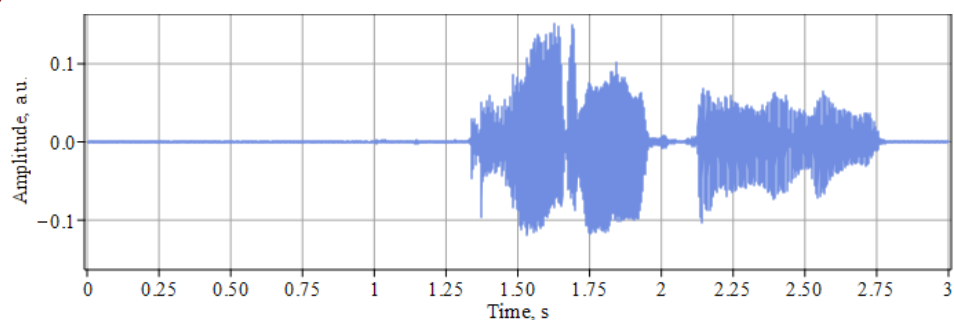
Скористаємося технікою дискретного вейвлет-аналізу (див. [↗](#) Практика 6, пп. 15.2.2). Спочатку створимо колір, дещо світліший за основний «RoyalBlue»:

```
> ColorTools[Color] ("HSV", "RoyalBlue");
ColorTools[Color] ("HSV", [0.625, 0.5, 0.882]);
ColorTools[ToRGB24] ([0.625, % [2], 0.882], "HSV");
RBlight:=ColorTools[Color] ([112, 141, 225]);
      HSV: 0.625 0.711 0.882
      HSV: 0.625 0.5 0.882
      [112, 141, 225]
      RBlight := RGB: 0.439 0.553 0.882
```

Весь інтервал даних запису в часовому представленні (Рис. 18.18 (а)):

```
> Preview(aud8_OD, color=ColorTools[Color] ([112, 141, 225])):
plots[display] (% , caption="Рис. 17 - Часове представлення даних
протягом 3 сек запису.", labels=["Time, s", "Amplitude, a.u."],
tickmarks=[12,5], view=[0..3, -0.16..0.16], size=[700, 0.9*ver],
plotopt);
```

а)



б)

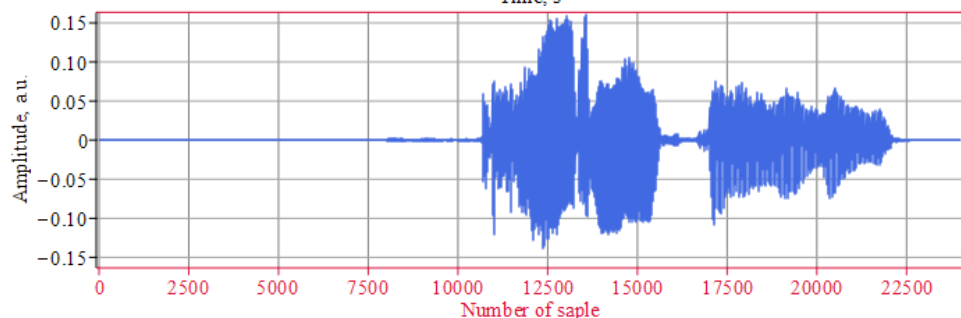


Рис. 18.18 – Первинні дані: а) часове представлення; б) за номерами семплів.

Перебудуємо графік з Рис. 18.18 (а) з використанням номерів семплів (Рис. 18.18 (б)):

```
> plots[listplot](aud8_dat, style=line, thickness=1,
  color="RoyalBlue", tickmarks=[8, 8], axis[1]=[color="Crimson",
  gridlines=[10, thickness=0, subticks=false, color="Grey"]],
  caption="Рис. 18 - Ряд первинних даних за номерами семплів.",
  labels=["Number of saple", "Amplitudе, a.u."],
  view=[0..numelems(aud8_dat), -0.16..0.16], size=[700, 0.9*ver],
  plotopt);
```

Приблизно визначимо номер семплу з початком і кінцем промовляння фрази, для чого подивимось на збільшені відповідні ділянки, показані на Рис. 18.19 та Рис. 18.20:

```
> pl_st:=plots[listplot](aud8_dat, tickmarks=[8,8], style=line,
  thickness=1, color="RoyalBlue", caption="Рис. 19 - Ряд первинних
  спостережень на початку промовляння фрази.", labels=["Number of
  saple", "Amplitudе, a.u."], view= [10500..11000, -0.1..0.1],
  size=[400, ver], plotopt): pl_st:
pl_end:=plots[listplot](aud8_dat, tickmarks=[5,8], style=line,
  thickness=1, color="RoyalBlue", caption="Рис. 20 - Ряд первинних
  спостережень наприкінці промовляння фрази.", labels=["Number of
  saple", "Amplitudе, a.u."], view= [21800..22500, -0.1..0.1],
  size=[400, ver], plotopt): pl_end:
Array([pl_st, pl_end]): plots:-display(%);
```

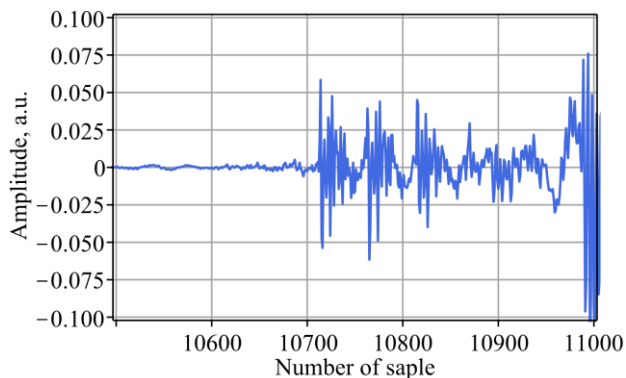


Рис. 18.19 – Ряд первинних спостережень на початку промовляння фрази.

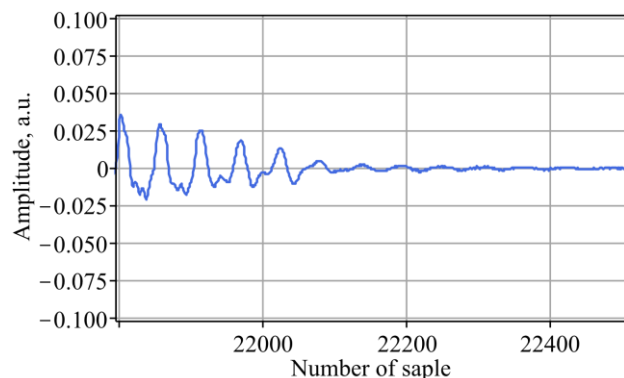


Рис. 18.20 – Ряд первинних спостережень наприкінці промовляння фрази.

Як видно з Рис. 18.19, мовлення почалось десь з 1.4 с (див. Рис. 18.18 (а)), що відповідає приблизно 10720 номеру в ряді, тому для подальшого аналізу візьмемо дані приблизно з 10700 номера і орієнтовно до 22200.

Змінимо кількість відображуваних у інтерфейсі чисел після коми для зручності роботи з номерами семплів паралельно використовуючи команду **trunc**:

```
> interface(displayprecision=5):
  _st:=1.338*num_el/Duration(aud8_OD): trunc(%);
  _end:=2.75*num_el/Duration(aud8_OD): trunc(%);
  10704
  22000
```

Тобто замість 24000 значень ми візьмемо:

```
> _end-_st: trunc(%);
  11296
```

Дізнаємося, який ступінь відповідає кількості даних у зменшеному наборі:

```
> '"загальна кількість даних у масиві"'=%;
log[2](_end-_st): evalf(%): '"ступінь 2"'=%;
2^floor(%): '"2 у ступені 13"'=%; # Начебто малий інтервал
2^14: '"2 у ступені 14"'=%;
# Але, ми все одно візьмемо інтервал загальною кількістю 2^13
_st: '"початок частини масиву"'=trunc(%);
(_end-_st)*Duration(aud8_OD)/num_el: evalf(%):
```

```

"час який відповідає початку частини" := %;
# тобто початок буде з цього часу
"загальна кількість даних у масиві" = ("час який відповідає початку частини" = 1.41200)
    "ступінь 2" = 13.46352
    "2 у ступені 13" = 8192
    "2 у ступені 14" = 16384
    "початок частини масиву" = 10704
    "час який відповідає початку частини" = 1.41200
> _st+8192: evalf(%): trunc(%);
    18896

```

Тепер виділимо з усього об'єму даних аудіозапису масив у 8192 даних починаючи з 107005, тобто на одиницю більше від того значення, що приблизно відповідає 1.4125 с, пояснення цього див. у [Практика 3](#), пп. 12.1.5:

```

> aud8_dat_cut:=aud8_dat[10705..18896];
# Виділення зручного для аналізу набору результатів довжиною у 8192 від-
ліки
numelems(aud8_dat_cut);
    aud8_dat_cut := [0.00140, -0.00272, -0.00134, -0.00189, 0.00201, 0.00177,
    0.00360,..., ... 8185 row vector entries not shown]
    8192

```

Побудуємо графік обраного інтервалу даних (Рис. 18.21):

```

> gs:=plots[listplot](aud8_dat_cut, tickmarks=[12,8], style=line,
    thickness=2, color="DarkGrey", caption="Рис. 21 - Інтервал даних
    об'ємом 2^13=8192 починаючи з 107005.", labels=["Number of sample",
    "Amplitude, a.u."], view=[0..8200,-0.15..0.17], size=[800, ver],
    plotopt): gs;

```

Пряма вейвлет-декомпозиція аудіосигналу в базисі вейвлетів Хаара:

```

> A1,A2:=DWT(aud8_dat_cut);
    A1,A2 := [-0.00066, -0.00162, 0.00189, 0.00038, 0.03836, -0.05014, 0.01030,...,
    ... 4089 Array entries not shown], [-0.00206, -0.00027, -0.00012, -0.00322,
    0.02005, -0.00360, 0.00816,..., ... 4089 Array entries not shown]

```

Зобразимо коефіцієнти вейвлет-розкладання в базисі Хаара для 1-го рівня графічно. Перший рівень апроксимації – вейвлет-коефіцієнти (Рис. 18.22 (а)):

```

> st:=time():
Statistics:-ColumnGraph(A1, color="Orange", caption="Рис. 22 -
Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень апроксимації.",
labels=["Number of coefficient", "Amplitude, a.u."],
view=[0..4150,-0.08..0.08], style=polygon, size=[700, 0.9*ver],
plotopt);
time()-st: culc_time:=%;
    culc_time := 8.96800

```

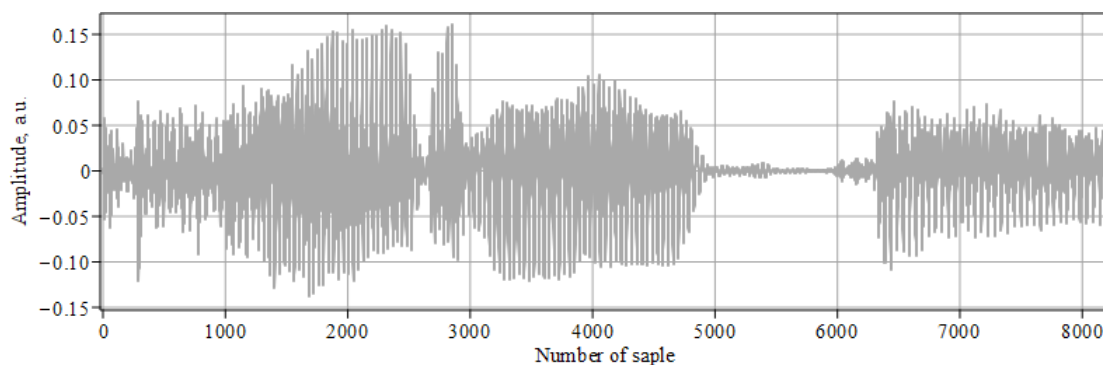


Рис. 18.21 – Інтервал даних об'ємом $2^{13}=8192$ починаючи з 107005.

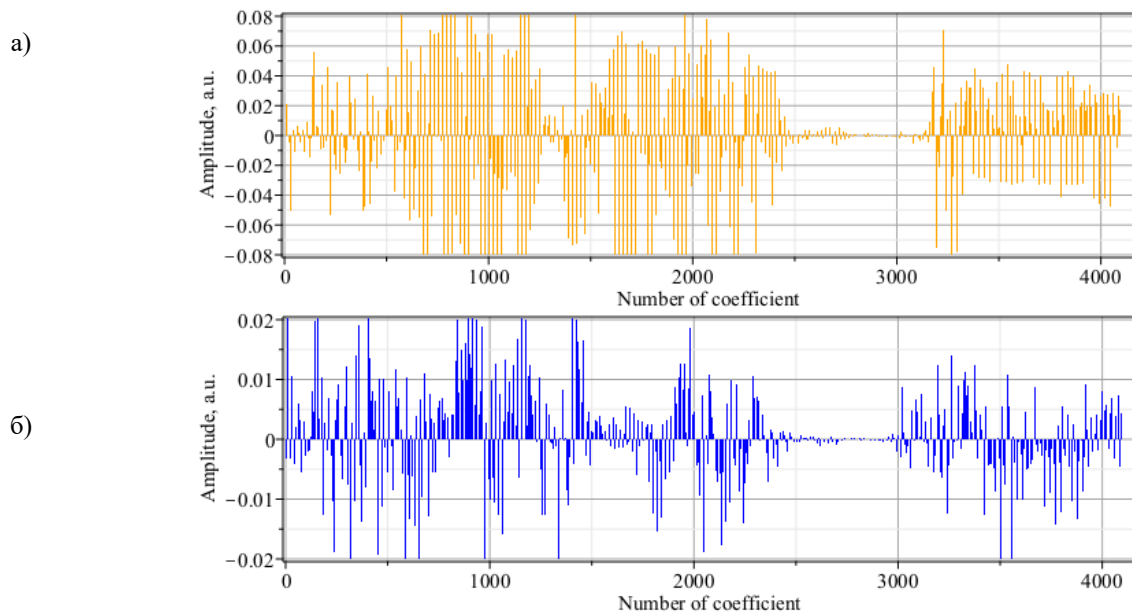


Рис. 18.22 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: а) 1-й рівень апроксимації;
б) 1-й рівень деталізації.

Перший рівень деталізації – вейвлет-коефіцієнти (Рис. 18.22 (б)):

```
> st:=time():
Statistics:-ColumnGraph(A2, color="Blue", caption="Рис. 23 - Вей-
влет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації.", labels=["Number
of coefficient", "Amplitude, a.u."], view=[0..4150,-0.02..0.02],
style=polygon, size=[700, 0.9*ver], plotopt);
time()-st: culc_time:=%;
culc_time := 9.23500
```

Основні статистичні характеристики коефіцієнтів деталізації 1-го рівня:

```
> tb1:=Statistics:-DataSummary(A2);
```

tb1 :=	mean = 1.61169×10^{-7}
	standarddeviation = 0.00865
	skewness = -0.63117
	kurtosis = 8.69483
	minimum = -0.05342
	maximum = 0.06490
cumulativeweight = 4096.00000	

Відмітимо практично нульове математичне сподівання коефіцієнтів деталізації та помітне відхилення від нормального розподілу по ексцесу ($kurtosis = 8.69483$).

Нагадаємо, що універсальний шумовий поріг для очищення коефіцієнтів деталізації від шумів визначається стандартним відхиленням та довжиною масиву (див. Практика 6). Тому для коефіцієнтів деталізації 1-го рівня аудіо-сигналу універсальний шумовий поріг визначатимемо наступним чином:

```
> rhs(tb1[2]): "станд. відхил." :=%;
rhs(tb1[7]): "кількість значень" :=trunc(%);
T:=evalf(rhs(tb1[2])*sqrt(2*ln(rhs(tb1[7]))));
"станд. відхил." = 0.00865
"кількість значень" = 4096
T := 0.03526 (18.4)
```

Далі проводимо трешолдінг (очистку) коефіцієнтів деталізації, яка полягає в обнуленні всіх коефіцієнтів, абсолютна величина яких менша від порогу (18.4), і зменшенні на величину порогу (18.4) абсолютних величин всіх коефіцієнтів, абсолютна величина яких перевищує цей поріг.

```
> A2r:=Array(map(z-> `if`(abs(z) <= T, 0, z-sign(z)*T), A2),
datatype=float[8]);
A2r := [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., ..., 4089 Array entries not shown]
```

```
> z-sign(z)*T;      min(A2r);
                                z - 0.03526
                                -0.01816
```

Масив коефіцієнтів деталізації після такої процедури:

```
> st:=time():
Statistics:-ColumnGraph(A2r, color="Blue", caption="Рис. 24 - Вей-
влет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації після м'якого тре-
шолдінгу.", labels=["Number of coefficient", "Amplitude, a.u."],
tickmarks=[6,5], view=[0..4150,-0.02..0.02], style=line,
size=[700, 0.9*ver], plotopt);
time()-st: culc_time:=%;
# Перший рівень деталізації після трешолдінгу
                                culc_time := 9.31300
```

Рис. 18.23 свідчить, що більшу частину коефіцієнтів деталізації 1-го рівня можна покласти рівними нулю. Отже, більшість з них мають шумову природу.

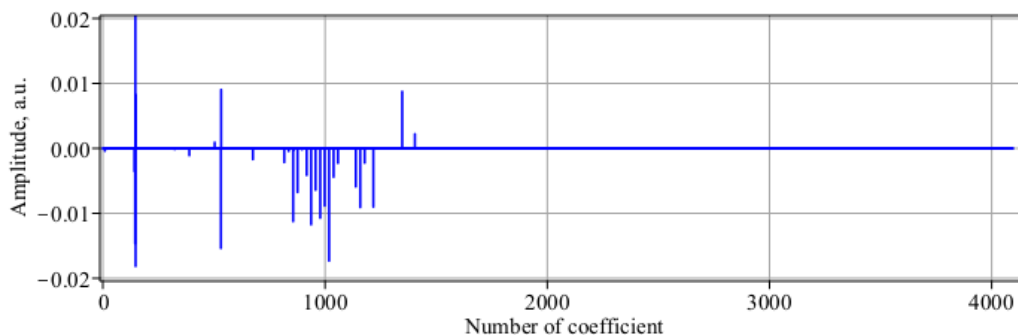


Рис. 18.23 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу.

Продовжимо очищення на другому масштабному рівні. Пряма вейвлет-декомпозиція децимованого сигналу (коефіцієнтів апроксимації 1-го рівня):

```
> B1,B2:=DWT(A1);
B1,B2 := [-0.00114, 0.00114, -0.00589, -0.00141, 0.00145, 0.00588, 0.01420, ...,
... 2041 Array entries not shown], [-0.00048, -0.00076, -0.04425, -0.01171,
-0.01146, -0.01549, -0.00440, ..., ... 2041 Array entries not shown]
```

Другий рівень апроксимації – вейвлет-коефіцієнти (Рис. 18.24 (а)):

```
> st:=time():
Statistics:-ColumnGraph(B1, color="Orange", caption="Рис. 25 -
Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень апроксимації.",
labels=["Number of coefficient", "Amplitude, a.u."],
style=polygon, view=[0..2070, -0.08..0.08], size=[700, 0.9*ver],
plotopt); time()-st: culc_time:=%;
```

Другий рівень деталізації – вейвлет-коефіцієнти (Рис. 18.24 (б)):

```
> st:=time():
Statistics:-ColumnGraph(B2, color="Blue", caption="Рис. 26 - Вей-
влет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень деталізації.", labels=["Number
of coefficient", "Amplitude, a.u."], tickmarks=[6,10],
style=polygon, view=[0..2070,-0.02..0.02], size=[700, 0.9*ver],
plotopt); time()-st: culc_time:=%;
```

Статистичні характеристики коефіцієнтів деталізації 2-го рівня:

```
> tb2:=Statistics:-DataSummary(B2);
```

$$tb2 := \begin{bmatrix} \text{mean} = -0.00004 \\ \text{standarddeviation} = 0.01340 \\ \text{skewness} = -0.86195 \\ \text{kurtosis} = 7.84736 \\ \text{minimum} = -0.07446 \\ \text{maximum} = 0.06190 \\ \text{cumulativeweight} = 2048.00000 \end{bmatrix} \quad (18.5)$$

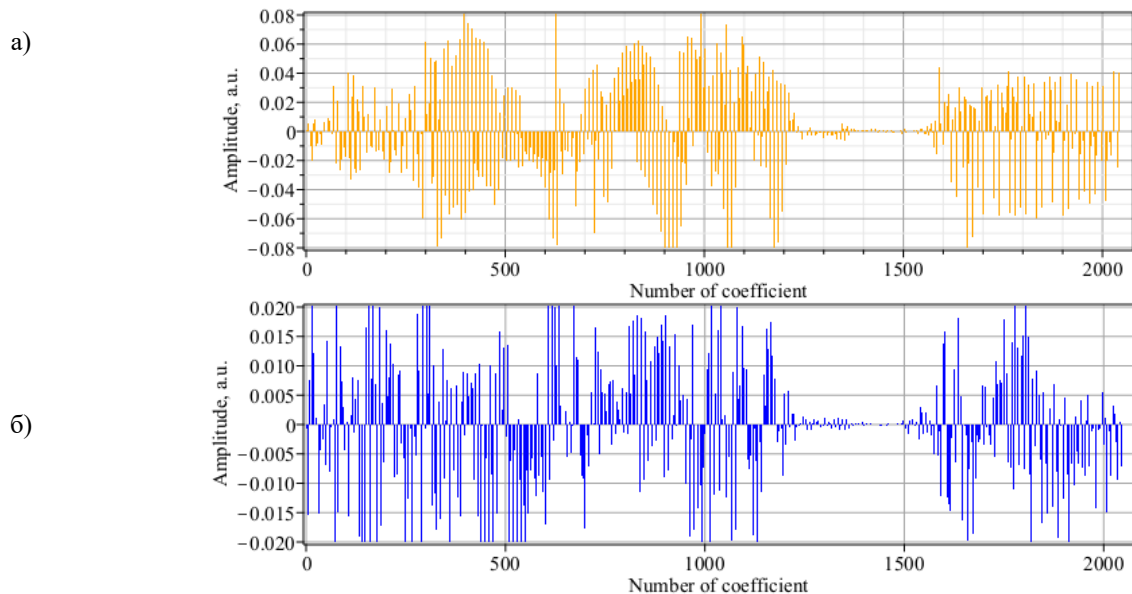


Рис. 18.24 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: а) 2-й рівень апроксимації; б) 2-й рівень деталізації.

Шумовий поріг для коефіцієнтів деталізації 2-го рівня:

$$T2 := \text{evalf}(\text{rhs}(tb2[2]) * \sqrt{2 * \ln(\text{rhs}(tb2[7]))}); \quad T2 := 0.05235 \quad (18.6)$$

Оскільки поріг (18.6) перевищує абсолютне значення не всіх коефіцієнтів деталізації 2-го рівня, оскільки $\text{maximum} = 0.06190$ в (18.5), то внаслідок трешолдінгу обнуляться не всі коефіцієнти (Рис. 18.25).

```
> B2r:=Array(map(z -> `if` (abs(z) <= T2, 0, z-sign(z)*T2), B2),
  datatype=float[8]);
  B2r := [0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,..., ..., 2041 Array entries not shown]

> st:=time():
Statistics:-ColumnGraph(B2r, color="Blue", caption="Рис. 27 - Вей-
влет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень деталізації після м'якого тре-
шолдінгу.", labels=["Number of coefficient", "Amplitude, a.u."],
style=line, size=[700, 0.9*ver], plotopt);
time()-st: culc_time:=%;
# Другий рівень деталізації після м'якого трешолдінгу
```

Наступним етапом є відновлення (синтез) первинного сигналу із застосуванням очищених від шумів коефіцієнтів деталізації другого та першого рівнів, а також зворотного вейвлет-перетворення.

```
> A1:=InverseDWT(B1,B2r):
# Відновлення (синтез) першого рівня апроксимації
aud8_OD_rev:=InverseDWT(A1,A2r);
# Синтез очищеного вхідного сигналу
aud8_OD_rev := [-0.00114, -0.00114, -0.00114, -0.00114, 0.00114, 0.00114,
  0.00114,..., ..., 8185 Array entries not shown]
```

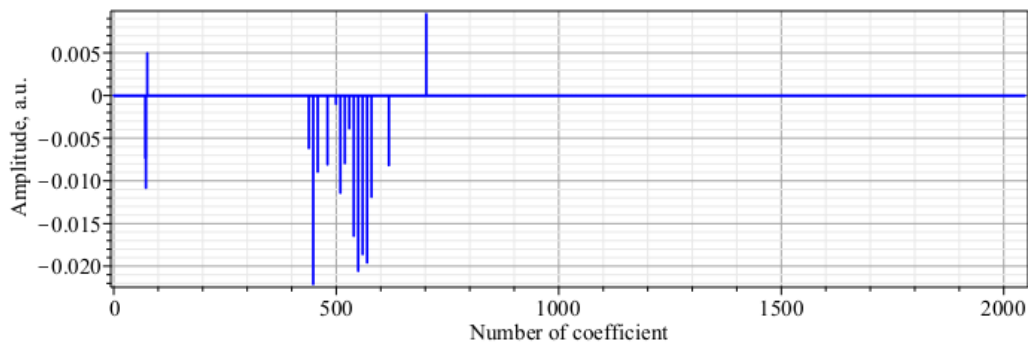


Рис. 18.25 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу.

Зобразимо синтезований сигнал:

```
> st:=time():
gsr2:=plots[listplot]([aud8_OD_rev], thickness=2,
tickmarks=[15,12], color="Coral", caption="Рис. 28 - Часовий ряд
очищених спостережень (8 кГц).", labels=["Number of saple",
"Amplitude, a.u."], size=[700, 0.9*ver], plotopt): gsr2;
time()-st: culc_time:=%;
```

Порівняємо синтезований сигнал з первинним:

```
> plots[display](gs, gsr2, caption="Рис. 29 - Порівняння первинного
та синтезованого сигналів (8 кГц).", view=[0..8200,-0.15..0.17],
size=[800, 0.9*ver], plotopt);
```

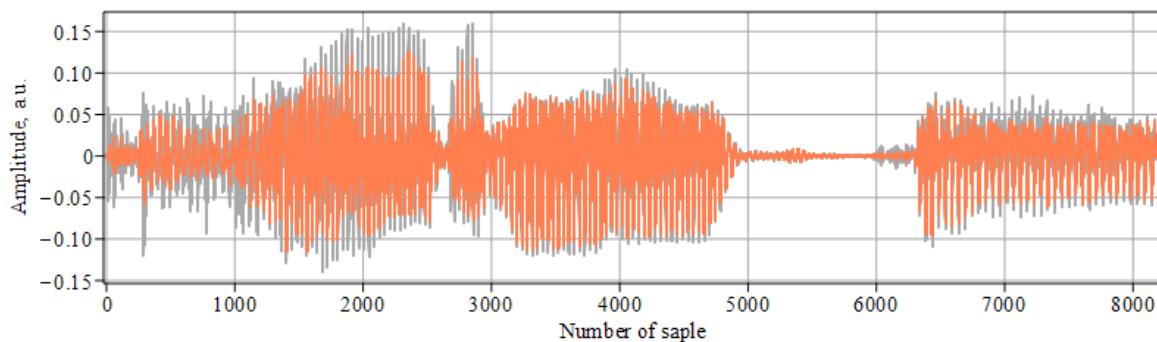


Рис. 18.26 – Первинний (сірий) та синтезований (помаранчевий) сигнали.

Конвертуємо дані у аудіофайл:

```
> aud8_filtW_OD:=Create(aud8_OD_rev, rate=8000);
```

```
aud8_filtW_OD :=
[ "Sample Rate"      8000
  "File Format"      PCM
  "File Bit Depth"   16
  "Channels"         1
  "Samples/Channel"  8192
  "Duration"         1.02400s ]
```

```
> Write("IIRtest-aud8_filtW_OD.wav", aud8_filtW_OD);
16428
```

Як видно, файл з очищеним аудіо-сигналом менший у 2.5 рази за первинний. Прослухаємо синтезований файл:

```
> Preview(aud8_filtW_OD, output=embed, color="Coral");
plots[textplot]([0, 0, "Рис. 30 - Фільтрований аудіосигнал \n за-
пису мовлення 8 кГц у вигляді аудіограми."], align={'below',
'right'}, axes=none, 'view'=[-1..4, -1..1], size=[400, 35]);
```

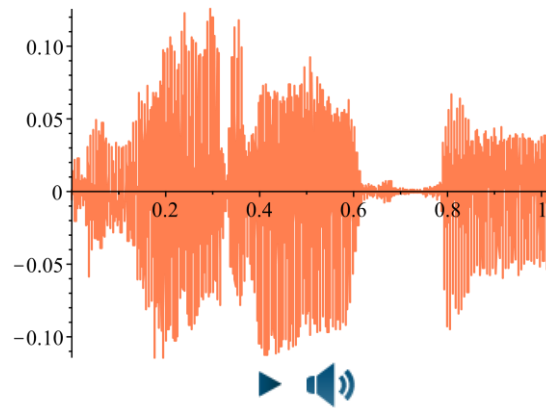
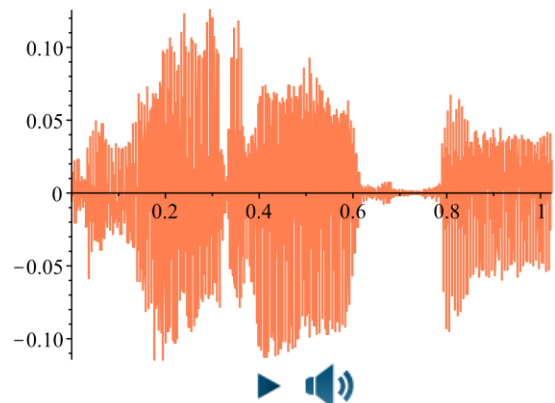
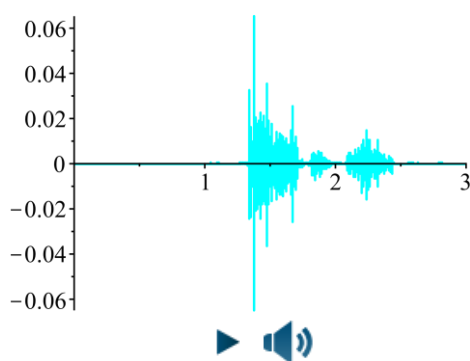
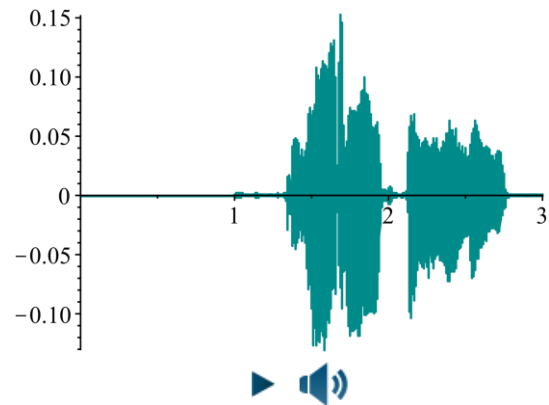
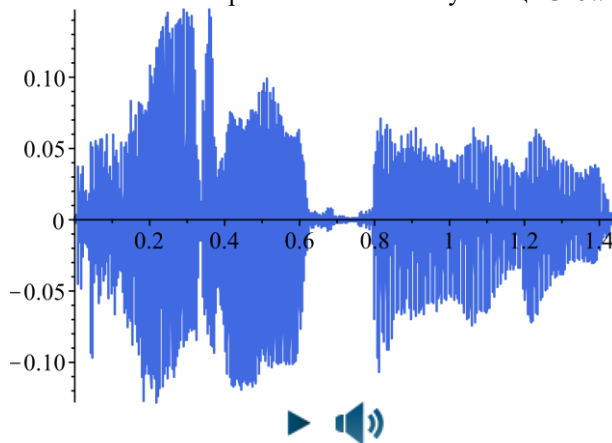


Рис. 18.27 – Аудіограма синтезованого після очищення аудіо-сигналу.

З аудіограми на Рис. 18.27 добре чутно, що якість звучання значно впала, однак всі слова можна зрозуміти. До того ж, об'єм файлу із записом став у 2.5 рази меншим за первинний.

Тепер можна прослухати всі записи первинного та фільтрованого аудіо-сигналу на 8 кГц і почути відмінність між якістю звучання, а також співставити об'єми файлів до і після фільтрації і зробити відповідні висновки. Нагадаємо, що для приховування Maple-коду у таблиці розмістив курсор деінде всередині таблиці, а потім у властивостях на панелі справа зніміть помітку з опції *Show Input*.



18.3 ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ

♦ 1.1 Теорія

1. Поясніть етапи цифрового запису мовлення.
2. Чим квантування відрізняється від семпсування?
3. Поясніть, що таке семпл.
4. Що впливає на якість відтворення цифрового запису?
5. Поясніть особливості частотного діапазону мовлення.

6. Поясніть характерні особливості дзвінких і глухих, голосних та приголосних звуків мовлення.
7. Що дозволяє прослідкувати спектрограма сигналу?
8. Поясніть призначення періодограми в аналізі цифрових сигналів.
9. Яке призначення швидкого перетворення Фур'є?
10. Поясніть відмінність у результаті застосування фільтрів нижніх та верхніх частот аудіо-сигналу.

♦ 1.2 Maple

1. Який програмний пакет в Maple призначений для запису звуку та його попереднього оброблення?
2. Поясніть команди програмного пакету **AudioTools**.
3. Поясніть послідовність команд та опцій для здійснення запису голосу.
4. Посніть опції команди **Write**.
5. Поясніть команду для перегляду файлу із записом.
6. Що необхідно здійснити із записом перед його цифровою обробкою у Maple?
7. Яка команда дозволяє виділити частину аудіозапису?
8. Що необхідно зробити із масивом даних оцифрованого аудіо-сигналу перед його подальшою математичною обробкою?
9. Як побудувати на графіку пряму вертикальну лінію?
10. Яка команда призначена для побудови прямокутника?
11. Яка команда і з якого пакету дозволяє побудувати спектрограму і графік первинного сигналу в одній таблиці? Поясніть синтаксис цієї команди.
12. Поясніть команди із послідовності дій СА потужності.
13. Поясніть роботу та опції команди **GenerateButterworthTaps**.
14. Яка команда застосовує фільтр Баттерворта до масиву даних?

18.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Здійсніть запис згідно теоретичних відомостей.
2. Зробіть аналіз, обробку та фільтрацію власного мовлення.
3. Порівняйте результати перетворення запису вашого голосу до і після перетворення: розмір файлів, якість після фільтрування, тривалість голосних та приголосних на графіках і таке інше.
4. Проаналізуйте результати. Сформулюйте висновки.
5. До звіту з лабораторної роботи додайте аудіо-файли записів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

- [1] «List of computer algebra systems», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems), 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems. [Дата звернення: 20, Червень 2023]
- [2] G. Chuiko, O. Dvornik, Y. Darnapuk, i Y. Baganov, «Devising a new filtration method and proof of self-similarity of electromyograms», *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, вип. 4, вип. 9(112), с. 15–22, Сер 2021, doi: 10.15587/1729-4061.2021.239165. Доступний у: <http://journals.urau.ua/eejet/article/view/239165>. [Дата звернення: 08, Квітень 2023]
- [3] G. Chuiko, Y. Darnapuk, O. Dvornik, i Y. Krainyk, «Improved robust handling of electromyograms with mining of new diagnostic signs», в *Proceedings of the 1st International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems 2021. ITTAP 2021*, I. Lytvynenko i S. Lupenko, Ред., Ternopil, Ukraine: CEUR-WS.org. CEUR Workshop Proceedings, 2021, с. 55–62. Доступний у: <https://ceur-ws.org/Vol-3039/short6.pdf>. [Дата звернення: 08, Квітень 2023]
- [4] G. P. Chuiko, O. V. Dvornik, i Y. S. Darnapuk, «Shape Evolutions of Poincaré Plots for Electromyograms in Data Acquisition Dynamics», в *Proceedings of the 2018 IEEE 2nd International Conference on Data Stream Mining and Processing, DSMP 2018*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2018, с. 119–122. doi: 10.1109/DSMP.2018.8478516
- [5] G. P. Chuiko i I. O. Shyian, «Computer-Aided Electroneuromyography with Maple», в *Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 5th International Scientific Conference of Students and Young Scientists*, Kyiv: Bukrek, 2015, с. 101–107. Доступний у: <http://taac.org.ua/uk/a2015/proceedings>. [Дата звернення: 24, Липень 2023]
- [6] G. P. Chuiko i I. A. Shyian, «Processing and analysis of electroneuromyograms with Maple tools», *Biomedical Engineering and Electronics*, вип. 3, с. 1–7, 2015, Доступний у: <https://oaji.net/articles/2015/2529-1445679149.pdf>. [Дата звернення: 11, Квітень 2023]
- [7] О. В. Дворник, Г. П. Чуйко, С. С. Дарнапук, i Я. М. Крайник, *Методи обробки медичних сигналів засобами комп'ютерної математики Maple: монографія*. Миколаїв: Іліон, 2021. Доступний у: <https://dSPACE.chmnu.edu.ua/jspui/handle/123456789/529>. [Дата звернення: 17, Лютий 2022]
- [8] A. V. Oppenheim, *Digital signal processing*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, 1976. 133 p.
- [9] А. Й. Наконечний, Р. А. Наконечний, i В. А. Павлиш, *Цифрова обробка сигналів: навч. посібник*. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. Доступний у: <https://vlp.com.ua/node/5927>. [Дата звернення: 20, Червень 2023]
- [10] А. Й. Наконечний, Р. І. Стахів, i Р. А. Наконечний, *Обробка сигналів: навч. посіб.* Львів: Нац. ун-т «Львівська політехніка», 2017. Доступний у: <https://odnb.odessa.ua/vnn/book/1448>. [Дата звернення: 20, Червень 2023]
- [11] Ю. О. Ушенко, М. С. Гавриляк, М. В. Талах, i В. В. Дворжак, *Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник*. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. Доступний у: https://archer.chnu.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/4107/Ушенко_Основи_та_методи_цифрової_обробки_сигналів.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- [12] Massachusetts Institute of Technology, «Search 'signal'. Free Online Course Materials», *MIT OpenCourseWare*, [ocw.mit.edu](https://ocw.mit.edu/search/?d=Electrical+Engineering+and+Computer+Science&q=sig+nal&s=department_course_numbers.sort_coursenum&u=compact). Доступний у: https://ocw.mit.edu/search/?d=Electrical+Engineering+and+Computer+Science&q=sig+nal&s=department_course_numbers.sort_coursenum&u=compact. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [13] A. V. Oppenheim i G. Verghese, «Introduction to Communication, Control, and Signal Processing. Electrical Engineering and Computer Science», *MIT OpenCourseWare*, [ocw.mit.edu](https://ocw.mit.edu/courses/6-011-introduction-to-communication-control-and-signal-processing-spring-2010/), 2010. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/courses/6-011-introduction-to-communication-control-and-signal-processing-spring-2010/>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [14] A. V. Oppenheim, «Discrete-Time Signal Processing. Electrical Engineering and Computer Science», *MIT OpenCourseWare*, [ocw.mit.edu](https://ocw.mit.edu/courses/6-341-discrete-time-signal-processing-fall-2005/), 2005. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/courses/6-341-discrete-time-signal-processing-fall-2005/>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [15] A. V. Oppenheim, «Digital Signal Processing. Supplemental Resources», *MIT OpenCourseWare*, [ocw.mit.edu](https://ocw.mit.edu/courses/res-6-008-digital-signal-processing-spring-2011/), 1987. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/courses/res-6-008-digital-signal-processing-spring-2011/>. [Дата звернення: 20, Червень 2023]
- [16] D. Freeman, «Signals and Systems. Electrical Engineering and Computer Science», *MIT OpenCourseWare*, [ocw.mit.edu](https://ocw.mit.edu/courses/6-003-signals-and-systems-fall-2011/), 2011. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/courses/6-003-signals-and-systems-fall-2011/>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [17] D. Cory, I. Hutchinson, i M. Chaniotakis, «Introduction to Electronics, Signals, and Measurement. Electrical Engineering and Computer Science», *MIT OpenCourseWare*, [ocw.mit.edu](https://ocw.mit.edu/courses/6-071j-introduction-to-electronics-signals-and-measurement-spring-2006/), 2006. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/courses/6-071j-introduction-to-electronics-signals-and-measurement-spring-2006/>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [18] J. Glass i V. Zue, «Automatic Speech Recognition. Electrical Engineering and Computer Science», *MIT OpenCourseWare*, [ocw.mit.edu](https://ocw.mit.edu/courses/6-345-automatic-speech-recognition-spring-2003/), 2003. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/courses/6-345-automatic-speech-recognition-spring-2003/>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]

- [19] G. Clifford, J. Fisher, J. Greenberg, i W. Wells, «Biomedical Signal and Image Processing. Health Sciences and Technology», *MIT OpenCourseWare*, *ocw.mit.edu*, 2007. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/courses/hst-582j-biomedical-signal-and-image-processing-spring-2007/>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [20] Н. Ма, «Biomedical Devices Design Laboratory. Mechanical Engineering», *MIT OpenCourseWare*, *ocw.mit.edu*, 2007. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/courses/2-996-biomedical-devices-design-laboratory-fall-2007/>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [21] В. Delgutte, «Introduction to Biomedical Signal and Image Processing. Biomedical Signal and Image Processing. Health Sciences and Technology», *MIT OpenCourseWare*, *ocw.mit.edu*, 1999. Доступний у: https://ocw.mit.edu/courses/hst-582j-biomedical-signal-and-image-processing-spring-2007/resources/l1_intro/. [Дата звернення: 24, Травень 2023]
- [22] Р. Prandoni i М. Vetterli, «Digital Signal Processing», *Coursera*, *coursera.org*. Доступний у: <https://www.coursera.org/specializations/digital-signal-processing?isNewUser=true>. [Дата звернення: 20, Червень 2023]
- [23] Є. О. Баганов, *Методи розрахунку на ЕОМ: навч. посібник*. Херсон: ХНТУ, 2008. Доступний у: <http://kntu.net.ua/ukr/content/download/7461/64265/file/Посібник.pdf>. [Дата звернення: 20, Червень 2023]
- [24] «Інформація», *Вікіпедія*, *uk.wikipedia.org*, 2022. Доступний у: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Інформація>. [Дата звернення: 26, Травень 2023]
- [25] International Organization for Standardization, «ISO 13527:2010(en), Space data and information transfer systems — XML formatted data unit (XFUD) structure and construction rules», *iso.org/obp*, 2010. Доступний у: <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:13527:ed-1:v1:en>. [Дата звернення: 31, Травень 2023]
- [26] «Дані», *Вікіпедія*, *uk.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Дані>. [Дата звернення: 31, Травень 2023]
- [27] «Сигнал», *Вікіпедія*, *uk.wikipedia.org*, 2020. Доступний у: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Сигнал>. [Дата звернення: 24, Травень 2023]
- [28] «Сигнал», *Вікіпедія*, *uk.wikipedia.org*, 2021. Доступний у: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Сигнал>. [Дата звернення: 26, Травень 2023]
- [29] «Біомедицина», *Вікіпедія*, *uk.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Біомедицина>. [Дата звернення: 21, Червень 2023]
- [30] «Категорія: Розділи медицини», *Вікіпедія*, *uk.wikipedia.org*. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Категорія:Розділи_медицини. [Дата звернення: 21, Червень 2023]
- [31] ChatGPT, «What is the difference between Biomedical and Biological Engineering?», *poe.com/ChatGPT*, 2023. Доступний у: <https://poe.com/s/20iW9ghX5nh3RD9uKAE>. [Дата звернення: 13, Червень 2023]
- [32] «Biomedical engineering», *Wikipedia*, *en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Biomedical_engineering. [Дата звернення: 21, Червень 2023]
- [33] «Biological engineering», *Wikipedia*, *en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Biological_engineering. [Дата звернення: 13, Червень 2023]
- [34] ChatGPT, «What is the difference between Biomedical and Biological Signals?», *poe.com/ChatGPT*, 2023. Доступний у: <https://poe.com/s/NhxGVxZgY4WlzyZGXLvB>. [Дата звернення: 13, Червень 2023]
- [35] «Biosignal», *Wikipedia*, *en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: <https://en.wikipedia.org/wiki/Biosignal>. [Дата звернення: 13, Червень 2023]
- [36] «Biosignals from the point of view of biophysics/electrical biosignals in the organism - WikiLectures», *WikiLectures*, *wikilectures.eu*, 2022. Доступний у: https://www.wikilectures.eu/w/Biosignals_from_the_point_of_view_of_biophysics/electrical_biosignals_in_the_organism. [Дата звернення: 13, Липень 2023]
- [37] R. Martinek *et al.*, «Advanced Bioelectrical Signal Processing Methods: Past, Present and Future Approach — Part I: Cardiac Signals», *Sensors 2021*, Vol. 21, Page 5186, вип. 21, вип. 15, с. 5186, Лип 2021, doi: 10.3390/S21155186. Доступний у: <https://www.mdpi.com/1424-8220/21/15/5186/htm>. [Дата звернення: 13, Липень 2023]
- [38] F. Hadaeghi, «An Introduction to Biomedical Signal Processing», в *Lecture Notes for BSP*, Jacobs University Bremen: sites.google.com, 2018. Доступний у: https://www.ai.rug.nl/minds/uploads/Chapter_1_introduction.pdf. [Дата звернення: 13, Червень 2023]
- [39] R. M. Rangayyan, *Biomedical Signal Analysis*, 2ий вид. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2015. Доступний у: https://eclass.hmu.gr/modules/document/file.php/ECE224/Project/RANGAYYAN_Biomedical_Signal_Analysis.pdf. [Дата звернення: 13, Червень 2023]
- [40] «Digital signal processing», *Wikipedia*, *en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_signal_processing. [Дата звернення: 21, Червень 2023]
- [41] MATLAB & Simulink, «Biomedical Signal Processing», *MathWorks*, *mathworks.com*, 2023. Доступний у: <https://www.mathworks.com/discovery/biomedical-signal-processing.html>. [Дата звернення: 21, Червень 2023]
- [42] A. Rao, «Biomedical Signal Processing», *International Journal Of Electrical, Electronics And Data Communication*, вип. 5, с. 2320–2084, 2017, Доступний у: https://www.iraj.in/journal/journal_file/journal_pdf/1-411-151446342142-45.pdf. [Дата звернення: 22, Червень 2023]

- [43] Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софіна, і О. М. Шушура, «Згортка. Кореляція», *Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 2 : навчальний посібник*, 2013. Доступний у: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa/2kvetnyj_komp'yuterne_modelyuvannya_system_procesiv/t2/16..htm. [Дата звернення: 25, Вересень 2020]
- [44] Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софіна, і О. М. Шушура, *Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1 : навч. посібник*. Вінниця: ВНТУ, 2013. Доступний у: http://ea.donntu.edu.ua/bitstream/123456789/18438/1/FULL_BOOK_tom1.pdf. [Дата звернення: 25, Вересень 2020]
- [45] Й. Й. Білінський, К. В. Огородник, і М. Й. Юкиш, «Квантування сигналів», в *Електронні системи : навчальний посібник*, Вінниця: ВНТУ, 2011, с. 208. Доступний у: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/firen/6bilynskyj_elektronni_systemy/43.htm. [Дата звернення: 23, Червень 2023]
- [46] A. V. Oppenheim, «Demonstration 1: Sampling, Aliasing, and Frequency Response, Part 1, Video Lectures, Digital Signal Processing», *MIT OpenCourseWare, ocw.mit.edu*, 1975. Доступний у: <https://ocw.mit.edu/resources/res-6-008-digital-signal-processing-spring-2011/video-lectures/demonstration-1-sampling-aliasing-and-frequency-response-part-1/>. [Дата звернення: 18, Листопад 2020]
- [47] Е. Ю. Железнякова, І. Л. Лебедева, і С. С. Лебедєв, «Основні означення теорії ймовірностей. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей», в *Теорія ймовірностей та математична статистика : методичні рекомендації до самостійної роботи*, Харків: ХНЕУ ім. Сємена Кузнеця, 2018, с. 184. Доступний у: <http://ebooks.git-elt.hneu.edu.ua/tvms/p-1-1.html>. [Дата звернення: 26, Липень 2023]
- [48] «Закон великих чисел», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Закон_великих_чисел. [Дата звернення: 26, Липень 2023]
- [49] «Математичне сподівання», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Математичне_сподівання. [Дата звернення: 26, Липень 2023]
- [50] «Стандартне відхилення», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Стандартне_відхилення. [Дата звернення: 29, Липень 2023]
- [51] «Дисперсія випадкової величини», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Дисперсія_випадкової_величини. [Дата звернення: 29, Липень 2023]
- [52] «Cumulative distribution function», *Wikipedia, en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Cumulative_distribution_function. [Дата звернення: 28, Липень 2023]
- [53] Yu. V. Prokhorov, «Distribution function», *Encyclopedia of Mathematics, encyclopediaofmath.org*, 2013. Доступний у: https://encyclopediaofmath.org/wiki/Distribution_function. [Дата звернення: 28, Липень 2023]
- [54] «Густина ймовірності#Абсолютно_неперервний_розподіл_однієї_величини», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Густина_ймовірності#Абсолютно_неперервний_розподіл_однієї_величини. [Дата звернення: 30, Липень 2023]
- [55] M. Roser, C. Appel, і H. Ritchie, «Human Height», *Our World in Data, ourworldindata.org*, 2013. Доступний у: <https://ourworldindata.org/human-height#height-is-normally-distributed>. [Дата звернення: 29, Липень 2023]
- [56] «Нормальний розподіл», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Нормальний_розподіл. [Дата звернення: 29, Липень 2023]
- [57] «Абрахам де Муавр», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Абрахам_де_Муавр. [Дата звернення: 30, Липень 2023]
- [58] S. Stahl, «The Evolution of the Normal Distribution», *Mathematics magazine*, вип. 79, вип. 2, с. 96–113, 2006, Доступний у: https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Allendoerfer/stahl96.pdf. [Дата звернення: 30, Липень 2023]
- [59] Maplesoft. Division of Waterloo Maple, «Create a Custom Distribution», *Support : Online Help : Statistics and Data Analysis : Statistics Package : Distributions, maplesoft.com*, 2023. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=Statistics%2FDistribution>. [Дата звернення: 30, Липень 2023]
- [60] «Skewness», *Wikipedia, en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: <https://en.wikipedia.org/wiki/Skewness>. [Дата звернення: 25, Липень 2023]
- [61] І. Я. Лукасевич, «Коефіцієнт асиметрії (скоса)», в *Аналіз фінансових операцій. Методи, моделі, техніка обчислень: навч. посібник*, Фінанси, ЮНІТИ, 1998, с. 400. Доступний у: <http://ebib.pp.ua/koeffitsient-asimmetrii-skosa-6339.html>. [Дата звернення: 25, Липень 2023]
- [62] J. F. Hair, G. T. M. Hult, C. M. Ringle, і M. Sarstedt, «How to Interpret Excess Kurtosis and Skewness - SmartPLS», в *A Primer on Partial Least Squares Structural Equation Modeling (PLS-SEM)*, Зий вид. CA: Sage: housand Oaks, 2022, с. 384. Доступний у: <https://www.smartpls.com/documentation/functionalities/excess-kurtosis-and-skewness/>. [Дата звернення: 25, Липень 2023]
- [63] «Kurtosis», *Wikipedia, en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Kurtosis#Excess_kurtosis. [Дата звернення: 25, Липень 2023]
- [64] М. М. Хом'як, *Геостатистика. Курс лекцій. Ч. 2. Вступ до дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізу*. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. Доступний у: http://prima.franko.lviv.ua/faculty/geology/phis_geo/Khomyak/E-book_Geostatistics/Part2/Lectons2-3-1.htm

- [65] «Кореляція», *Bikinedia*, *uk.wikipedia.org*, 2022. Доступний у: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Кореляція>. [Дата звернення: 16, Жовтень 2023]
- [66] В. Є. Бахрушин, *Методи аналізу даних: навч. посібник*. Запоріжжя: КПУ, 2011. Доступний у: <http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/metDataManing.pdf>. [Дата звернення: 01, Серпень 2023]
- [67] «Автокореляція», *Bikinedia*, *uk.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Автокореляція>. [Дата звернення: 31, Липень 2023]
- [68] «Взаємна кореляція», *Bikinedia*, *uk.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Взаємна_кореляція. [Дата звернення: 30, Червень 2023]
- [69] В. А. Алексєєва, *Аналіз часових рядів: навч. посібник*. Ульяновськ: УЛГТУ, 2020. Доступний у: <http://lib.ulstu.ru/venec/disk/2022/6.pdf>. [Дата звернення: 30, Червень 2023]
- [70] R. M. Baevsky і A. G. Chernikova, «Heart rate variability analysis: physiological foundations and main methods», *Cardiometry*, вип. 10, с. 66–76, Трав 2017, doi: 10.12710/CARDIOMETRY.2017.10.6676. Доступний у: https://www.researchgate.net/publication/317227023_Heart_rate_variability_analysis_physiological_foundations_and_main_methods. [Дата звернення: 30, Червень 2023]
- [71] «Heart rate variability», *Wikipedia*, *en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Heart_rate_variability. [Дата звернення: 30, Червень 2023]
- [72] R. M. Baevsky і A. P. Berseneva, *Use KARDiVAR system for determination of the stress level and estimation of the body adaptability. Methodical recommendations. Standards of measurements and physiological interpretation*. Prague, 2008.
- [73] Р. М. Баевский *et al.*, «Аналіз варіабельності серцевого ритму під час використання різноманітних електрокардіографічних систем (методичні рекомендації)», *Вісник аритмології*, вип. 24, с. 65–87, 2002.
- [74] P. Stoica і R. Moses, *Spectral analysis of signals*. Upper Saddle River, US: Prentice Hall, Inc., 2005. Доступний у: <https://user.it.uu.se/~ps/SAS-new.pdf>. [Дата звернення: 21, Липень 2023]
- [75] S. L. Marple, *Digital Spectral Analysis: Second Edition*, 2ий вид. Mineola, New York: Courier Dover Publications, 2019. Доступний у: https://books.google.de/books?id=JYmFDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=gbs_book_other_versions#v=onepage&q&f=false. [Дата звернення: 21, Липень 2023]
- [76] Г. Л. Конончук, В. М. Прокопєць, і В. В. Стукаленко, *Вступ до фур'є-оптики: навч. посібник*. Київ: Вид.-поліграф. центр «Київський університет», 2010. Доступний у: http://exp.phys.univ.kiev.ua/ua/Study/Lib/Navch_posibnyky/NP_Fure_optyka_Kononchuk.pdf. [Дата звернення: 08, Жовтень 2023]
- [77] Р. М. Рангайян, *Аналіз біомедичних сигналів. Практичний підхід*. М.: Фізматліт, 2007.
- [78] О. В. Дробик *et al.*, *Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: навч. посібник*. Київ: Наукова думка, 2008. Доступний у: <https://duikt.edu.ua/ua/lib/1/category/739/view/602?lang=ua&act=view&page=1&category=739&id=602>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [79] Maplesoft, «Spectrograms Introduction», *Maple Application Gallery*, *maplesoft.com*, 2016. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/Applications/Detail.aspx?id=154012>. [Дата звернення: 03, Вересень 2023]
- [80] R. G. Lyons, *Understanding Digital Signal Processing (2nd Edition)*. Prentice Hall PTR, 2004. 688 p.
- [81] «Cleveland Clinic medical professional. Heart Rate Variability (HRV): What It Is and How You Can Track It», *Cleveland Clinic*. Доступний у: <https://my.clevelandclinic.org/health/symptoms/21773-heart-rate-variability-hrv>. [Дата звернення: 02, Липень 2023]
- [82] К. П. В. Є.А. Паламарчук, «Верифікація механізму обрахунку спектральних характеристик варіабельності серцевого ритму в діагностичних системах за допомогою програмного еталону гармонічних сигналів», *Клінічна інформатика і телемедицина*, вип. 1, вип. 1, с. 41–46, 2004, Доступний у: http://kit-journal.com.ua/doc/2004_1/13.pdf. [Дата звернення: 02, Липень 2023]
- [83] К. П. Воробйов і Є. А. Паламарчук, «До запитання про стандартизацію методів спектрального аналізу кардіоінтервалограм», *pallar.com.ua*. Доступний у: http://pallar.com.ua/docs/hrvteach_u.php. [Дата звернення: 02, Липень 2023]
- [84] «Heart rate variability. Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use. Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology», *Eur Heart J*, вип. 17, с. 354–381, 1996, Доступний у: <https://www.escardio.org/static-file/Escardio/Guidelines/Scientific-Statements/guidelines-Heart-Rate-Variability-FT-1996.pdf>. [Дата звернення: 14, Грудень 2023]
- [85] Peyton A. J. *Analog electronics with op amps: A source book of practical circuits*. Cambridge: Cambridge U.P., 1993. 304 p.
- [86] R. Mancini, Ред., *Op Amps For Everyone. Design Reference*. Dallas: Texas Instruments, 2002. Доступний у: https://web.mit.edu/6.101/www/reference/op_amps_everyone.pdf. [Дата звернення: 09, Серпень 2023]
- [87] Maplesoft, «Laplace Transforms», *Exploring Engineering Fundamentals. Intro to Control Systems*, *maplesoft.com*, 2010. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/engineeringfundamentals/topic.aspx?tid=9#w=690>. [Дата звернення: 16, Липень 2023]
- [88] «Impulse response», *Wikipedia*, *en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Impulse_response. [Дата звернення: 09, Серпень 2023]

- [89] «Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика», *Вікіпедія*, [uk.wikipedia.org](https://uk.wikipedia.org/wiki/Логарифмічна_амплітудно-частотна_характеристика), 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Логарифмічна_амплітудно-частотна_характеристика. [Дата звернення: 09, Серпень 2023]
- [90] Element, «Різниця між серво та кроковими двигунами», *moyelement.com*, 2023. Доступний у: <https://moyelement.com/news/otlichie-servodvigatel-j-i-shagovyh-dvigatel-j/>. [Дата звернення: 19, Липень 2023]
- [91] Maplesoft, «DC Motor Control Design», *Maple Help*, [maplesoft.com](https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=applications%2FDCMotor), 2014. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=applications%2FDCMotor>. [Дата звернення: 03, Вересень 2023]
- [92] ЦІТМ Експонента, *Основи ЦОС: 03. Вирішувані задачі*, (2019). Доступний у: <https://www.youtube.com/watch?v=xLii7YcSO8>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [93] ЦІТМ Експонента, *Основи ЦОС: 12. Шум як випадковий процес*, (2019). Доступний у: <https://www.youtube.com/watch?v=c5mG7jv0JgA>. [Дата звернення: 23, Травень 2023]
- [94] J. Zhang, G. Hou, H. Wang, Y. Zhao, i J. Huang, «Operation feature extraction of flood discharge structure based on improved variational mode decomposition and variance dedication rate», *Journal of Vibration and Control*, вип. 26, вип. 3–4, с. 229–240, Лис 2019, doi: 10.1177/1077546319878542. Доступний у: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1077546319878542>. [Дата звернення: 04, Липень 2023]
- [95] «Принципова електрична схема», *Вікіпедія*, [uk.wikipedia.org](https://uk.wikipedia.org/wiki/Принципова_електрична_схема), 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Принципова_електрична_схема. [Дата звернення: 09, Серпень 2023]
- [96] «Електрична схема», *Вікіпедія*, [uk.wikipedia.org](https://uk.wikipedia.org/wiki/Електрична_схема), 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Електрична_схема. [Дата звернення: 09, Серпень 2023]
- [97] «Electronic filter topology», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_filter_topology#Ladder_topologies), 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_filter_topology#Ladder_topologies. [Дата звернення: 04, Липень 2023]
- [98] Записки програміста, «Продвинуті аналогові фільтри: теорія і практика», *eax.me*, 2018. Доступний у: <https://eax.me/advanced-filters/>. [Дата звернення: 11, Серпень 2023]
- [99] Фізична енциклопедія, «Фільтрація», *femto.com.ua*. Доступний у: http://femto.com.ua/articles/part_2/4323.html. [Дата звернення: 04, Липень 2023]
- [100] Ю. В. Бобков, Ред., «Цифрова фільтрація. Лабораторний практикум: навч. посібник», в *Математичне забезпечення цифрових систем*, Київ: КІП ім. Ігоря Сікорського, 2023, с. 75. Доступний у: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/56430/1/Navch_posibn_MZTsS_ch2_TsF_lab_2023.pdf. [Дата звернення: 13, Серпень 2023]
- [101] С. В. Заболотний, *Цифрове оброблення сигналів: посібник*. Черкаси: ЧДТУ, 2010. Доступний у: https://er.chdtu.edu.ua/bitstream/ChSTU/96/1/Заболотний_Цифрове_оброблення_сигналів.pdf. [Дата звернення: 13, Серпень 2023]
- [102] Г. Є. Філатова, *Проектування цифрових фільтрів: навч. посібник*. Харків: ХНАДУ, 2017. Доступний у: <https://repository.kpi.kharkov.ua/server/api/core/bitstreams/5a91b34c-8020-4797-8e3e-95a132e272ec/content>. [Дата звернення: 13, Серпень 2023]
- [103] Maplesoft, «Digital Filter Design», *Maple Help*, [maplesoft.com](https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=applications%2FDigitalFilterDesign), 2023. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=applications%2FDigitalFilterDesign>. [Дата звернення: 07, Серпень 2023]
- [104] P. Stone, «The Fourier transform of periodic functions. Maple Worksheets: Fourier transforms», *peterstone.name*. Доступний у: <http://www.peterstone.name/Maplepgs/FRtrans.html>. [Дата звернення: 03, Вересень 2023]
- [105] A Little About Science, *Як математики пророкують майбутнє? Вейвлет-перетворення*, (2017). Доступний у: <https://youtu.be/wKVBzwvUF1k>
- [106] S. Talebi, «The Wavelet Transform. An Introduction and Example», *Towards Data Science, towardsdatascience.com*, 2020. Доступний у: <https://towardsdatascience.com/the-wavelet-transform-e9cfa85d7b34>. [Дата звернення: 05, Липень 2023]
- [107] A. Kirsanov, *Wavelets: a mathematical microscope*, (2022). Доступний у: <https://youtu.be/jnxqHcObNK4>
- [108] «Ортогональні функції», *Вікіпедія*, [uk.wikipedia.org](https://uk.wikipedia.org/wiki/Ортогональні_функції), 2020. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Ортогональні_функції. [Дата звернення: 16, Жовтень 2023]
- [109] «Orthonormality», *Вікіпедія*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Orthonormality), 2023. Доступний у: <https://en.wikipedia.org/wiki/Orthonormality>. [Дата звернення: 16, Жовтень 2023]
- [110] G. P. Chuiko i I. A. Danishevska, «Wavelet analysis of the blood pressure and pulse frequency measurements with Maple», *Maple Application Center*, [maplesoft.com](https://www.maplesoft.com/applications/Detail.aspx?id=149420), 2013. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/applications/Detail.aspx?id=149420>. [Дата звернення: 17, Серпень 2023]
- [111] Microlife AG, «BP 3AG1», *microlife.com*, 2023. Доступний у: <https://www.microlife.com/support/blood-pressure/bp-3ag1>. [Дата звернення: 05, Липень 2023]
- [112] «Мода (статистика)», *Вікіпедія*, [uk.wikipedia.org](https://uk.wikipedia.org/wiki/Мода_(статистика)), 2023. Доступний у: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Мода_\(статистика\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/Мода_(статистика)). [Дата звернення: 15, Серпень 2023]
- [113] EMR. Expert Market Research, «Global Electroencephalography Systems/Devices Market Outlook», Sheridan, Wyoming, U.S., 2023. Доступний у: <https://www.expertmarketresearch.com/reports/electroencephalography-systems-devices-market>. [Дата звернення: 10, Липень 2023]

- [114] «Bionics», *Wikipedia, en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: <https://en.wikipedia.org/wiki/Bionics>. [Дата звернення: 10, Липень 2023]
- [115] «Нейрокомп'ютерний інтерфейс», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Нейрокомп%27ютерний_інтерфейс. [Дата звернення: 13, Липень 2023]
- [116] M. Orban, M. Elsamanty, K. Guo, S. Zhang, i H. Yang, «A Review of Brain Activity and EEG-Based Brain-Computer Interfaces for Rehabilitation Application», *Bioengineering*, вип. 9, вип. 12, с. 768–790, Груд 2022, doi: 10.3390/BIOENGINEERING9120768. Доступний у: [/pmc/articles/PMC9774292/](https://pmc/articles/PMC9774292/). [Дата звернення: 13, Липень 2023]
- [117] Q. Ai, Q. Liu, W. Meng, i S. Q. Xie, «Introduction», в *Advanced Rehabilitative Technology. Neural Interfaces and Devices*, Academic Press, 2019, с. 1–10. doi: 10.1016/B978-0-12-814597-5.00001-1. Доступний у: <https://pdf.sciencedirectassets.com/319342/3-s2.0-C20170017147/3-s2.0-B9780128145975000011/main.pdf?X-Amz-Security-Token=IQoJb3JpZ2luX2VjEHcaCXVzLWVhc3QtMS-JIMEYCIQck2OdkZgaArIXxKSBAqGklZy%2FoIFvQajQJYjvqE2paQwIhA-JYIX2W5CIXv3kuO2bHheHAgJs9ugKKwdTI7Se5c9awL>. [Дата звернення: 13, Липень 2023]
- [118] R. Martinek *et al.*, «Advanced Bioelectrical Signal Processing Methods: Past, Present and Future Approach — Part II: Brain Signals», *Sensors*, вип. 21, вип. 19, с. 6343–6378, Жов 2021, doi: 10.3390/S21196343. Доступний у: [/pmc/articles/PMC8512967/](https://pmc/articles/PMC8512967/). [Дата звернення: 13, Липень 2023]
- [119] M. Rashed-Al-Mahfuz, M. R. Islam, K. Hirose, i M. K. I. Molla, «Artifact suppression and analysis of brain activities with electroencephalography signals», *Neural Regen Res*, вип. 8, вип. 16, с. 1500, Чер 2013, doi: 10.3969/J.ISSN.1673-5374.2013.16.007. Доступний у: [/pmc/articles/PMC4107812/](https://pmc/articles/PMC4107812/). [Дата звернення: 11, Липень 2023]
- [120] S. Martis, «Neuroscience of ADHD: Causes, Types, Diagnosis, and Treatment», *Applied chemistry and neuroscience, chemistry-neuroscienceblog.com*, 2020. Доступний у: <https://www.chemistry-neuroscienceblog.com/post/neuroscience-of-adhd-causes-types-diagnosis-and-treatment>. [Дата звернення: 14, Липень 2023]
- [121] Jochem, «The 'normal' brain vs the ADD and ADHD brain», *ADD ADHD HSP - Stand in your Power, addken-merken.net/*, 2019. Доступний у: <https://www.addkenmerken.net/en/normal-brain-vs-add-adhd-brain/>. [Дата звернення: 14, Липень 2023]
- [122] The Medical Imaging Technology Association (MITA). Division of National Electrical Manufacturers Association (NEMA), «About DICOM: Overview», *DICOM, dicomstandard.org*, 2023. Доступний у: <https://www.dicomstandard.org/about-home>. [Дата звернення: 14, Липень 2023]
- [123] «DICOM», *Wikipedia, en.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: <https://en.wikipedia.org/wiki/DICOM#History>. [Дата звернення: 14, Липень 2023]
- [124] J. Cawthra *et al.*, «Securing Picture Archiving and Communication System (PACS): Cybersecurity for the Healthcare Sector», *nvlpubs.nist.gov*. National Institute of Standards and Technology, McLean, Virginia, US, с. 386, 2020. doi: 10.6028/NIST.SP.1800-24. Доступний у: <https://doi.org/10.6028/NIST.SP.1800-24>. [Дата звернення: 14, Липень 2023]
- [125] S. Patterson, «Understanding Histograms - Low-Key And High-Key Images», *photoshopessentials.com*, 2023. Доступний у: <https://www.photoshopessentials.com/photo-editing/understanding-histograms-low-key-and-high-key-images/>. [Дата звернення: 14, Липень 2023]
- [126] G. Najah, «Emotion estimation from facial images», Atilim University, 2017. doi: 10.13140/RG.2.2.25113.62565. Доступний у: https://www.researchgate.net/publication/314193214_EMOTION_ESTIMATION_FROM_FACIAL_IMAGES. [Дата звернення: 14, Липень 2023]
- [127] C. Hwung, «Understanding Histogram in Photography (in Plain Language)», *VideoProc, videoproc.com*, 2023. Доступний у: <https://www.videoproc.com/resource/understanding-histogram.htm>. [Дата звернення: 15, Липень 2023]
- [128] Gepard_vvk, «Алгоритми виділення контурів зображень», *Хабр, habr.com*, 2011. Доступний у: <https://habr.com/ru/articles/114452/>. [Дата звернення: 16, Липень 2023]
- [129] U. Lauther, «Method for determining contours in images», US 2007/0025620 A1, 28, Липень 2006 Доступний у: <https://patents.google.com/patent/US20070025620>. [Дата звернення: 16, Липень 2023]
- [130] «Сегментація зображення», *Вікіпедія, uk.wikipedia.org*, 2023. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Сегментація_зображення. [Дата звернення: 16, Липень 2023]
- [131] R. J. Hemalatha *et al.*, «Active Contour Based Segmentation Techniques for Medical Image Analysis», в *Medical and Biological Image Analysis*, R. Koprowski, Ред., IntechOpen, 2018, с. 17–34. doi: 10.5772/INTECHOPEN.74576. Доступний у: <https://www.intechopen.com/chapters/59741>. [Дата звернення: 16, Липень 2023]
- [132] A. Acharya, «Guide to Image Segmentation in Computer Vision: Best Practices», *Encord, encord.com*, 2022. Доступний у: <https://encord.com/blog/image-segmentation-for-computer-vision-best-practice-guide/>. [Дата звернення: 16, Липень 2023]
- [133] A. Rosebrock, «Sliding Windows for Object Detection with Python and OpenCV», *PyImageSearch, pyimagesearch.com*, 2015. Доступний у: <https://pyimagesearch.com/2015/03/23/sliding-windows-for-object-detection-with-python-and-opencv/>. [Дата звернення: 16, Липень 2023]

- [134] A. Khireddine, K. Benmahammed, i W. Puech, «Digital image restoration by Wiener filter in 2D case», *Advances in Engineering Software*, вип. 38, с. 513–516, 2007, doi: 10.1016/j.advengsoft.2006.10.001. Доступний у: www.elsevier.com/locate/advengsoft. [Дата звернення: 19, Липень 2023]
- [135] J. McKim, «Bit Depth: 8-bit Vs. 16-bit - Retouching Academy», *Retouching Academy*, retouchingacademy.com, 2016. Доступний у: <https://retouchingacademy.com/qualities-of-digital-images-bit-depth/>. [Дата звернення: 20, Липень 2023]
- [136] PCMag, «Definition of color depth», *PCMag Encyclopedia*, PCMag.com, 2023. Доступний у: <https://www.pcmag.com/encyclopedia/term/color-depth>. [Дата звернення: 20, Липень 2023]
- [137] D. R. Dance, S. Christofides, A. D. A. Maidment, I. D. Mclean, i K. H. Ng, *Diagnostic Radiology Physics: Handbook*. Vienna: International Atomic Energy Agency, 2014. Доступний у: <https://www.iaea.org/publications/8841/diagnostic-radiology-physics>. [Дата звернення: 20, Липень 2023]
- [138] MathWorkth Inc., «Using Wavelets. Two-Dimensional Analysis Using the Command Line», *Wavelet Toolbox*, matlab.izmiran.ru, 2005. Доступний у: http://matlab.izmiran.ru/help/toolbox/wavelet/ch02_u29.html. [Дата звернення: 20, Липень 2023]
- [139] Maplesoft, «Signal Processing in Maple», *Maple Application Center*, maplesoft.com, 2011. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/Applications/Detail.aspx?id=102646>. [Дата звернення: 24, Липень 2023]
- [140] «Crash test», *Wikipedia*, en.wikipedia.org, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Crash_test. [Дата звернення: 24, Липень 2023]
- [141] FUTEK Advanced Sensor Technology, «Crash Test Sensors. Multi-Axis Sensor. Applications», futek.com, 2023. Доступний у: <https://www.futek.com/applications/Crash-Test-Sensors>. [Дата звернення: 24, Липень 2023]
- [142] S. Rutkove i B. Israel, «Examples of Electromyograms», *PhysioNet*, archive.physionet.org, 2010. doi: 10.13026/C24S3D. Доступний у: <https://archive.physionet.org/physiobank/database/emgdb/>. [Дата звернення: 24, Липень 2023]
- [143] D. L. Donoho, «De-Noising via Soft-Thresholding», *IEEE Trans. Info. Theory*, вип. 41, с. 613–627, 1995, doi: 10.1109/18.382009. Доступний у: <https://web.stanford.edu/dept/statistics/cgi-bin/donoho/wp-content/uploads/2018/08/denoiserelease3.pdf>. [Дата звернення: 02, Серпень 2023]
- [144] D. L. Donoho i J. M. Johnstone, «Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage», *Biometrika*, вип. 81, вип. 3, с. 425–455, Вер 1994, doi: 10.1093/BIOMET/81.3.425. Доступний у: <https://dx.doi.org/10.1093/biomet/81.3.425>. [Дата звернення: 01, Серпень 2023]
- [145] «Solar phenomena», *Wikipedia*, en.wikipedia.org, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_phenomena. [Дата звернення: 04, Серпень 2023]
- [146] «Coronal mass ejection», *Wikipedia*, en.wikipedia.org, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Coronal_mass_ejection. [Дата звернення: 04, Серпень 2023]
- [147] «Solar cycle», *Wikipedia*, en.wikipedia.org, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_cycle. [Дата звернення: 04, Серпень 2023]
- [148] NASA, «NASA - Developing Sunspot», *NASA*, nasa.gov, 2007. Доступний у: https://www.nasa.gov/mission_pages/hinode/solar_022.html. [Дата звернення: 03, Серпень 2023]
- [149] «Sunspot», *Wikipedia*, en.wikipedia.org, 2023. Доступний у: <https://en.wikipedia.org/wiki/Sunspot>. [Дата звернення: 04, Серпень 2023]
- [150] Maplesoft, «Periodicity of Sunspots», *Maple Application Center*, maplesoft.com, 2013. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/Applications/Detail.aspx?id=144592>. [Дата звернення: 03, Серпень 2023]
- [151] S. Khan, «Sunspot Periodicity», *Maple Application Center*, maplesoft.com, 2018. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/Applications/Detail.aspx?id=154013>. [Дата звернення: 03, Серпень 2023]
- [152] S. Khan, «Investigating the Periodicity of Sunspots», *Maple Application Center*, maplesoft.com, 2022. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/Applications/Detail.aspx?id=154864>. [Дата звернення: 03, Серпень 2023]
- [153] SILSO World Data Center, «Sunspot Number», *SIDC*, sidc.be, 20н. е. Доступний у: <https://www.sidc.be/SILSO/datafiles>. [Дата звернення: 04, Серпень 2023]
- [154] Maplesoft, «Sunspot Periodicity», *Maple Help*, maplesoft.com, 2023. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=applications%2FSunspotPeriodicity>. [Дата звернення: 04, Серпень 2023]
- [155] Analog Devices, «A Filter Primer. APP 733», pdfserv.maximintegrated.com, 2008. Доступний у: <https://pdfserv.maximintegrated.com/en/an/AN733.pdf>. [Дата звернення: 08, Серпень 2023]
- [156] «Електронний фільтр», *Вікіпедія*, uk.wikipedia.org, 2023. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Електронний_фільтр#Типи_фільтрів. [Дата звернення: 08, Серпень 2023]
- [157] «Electronic filter topology», *Wikipedia*, en.wikipedia.org, 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_filter_topology#Ladder_topologies. [Дата звернення: 10, Серпень 2023]
- [158] «Діаграма Найквіста», *Вікіпедія*, uk.wikipedia.org, 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Діаграма_Найквіста. [Дата звернення: 09, Серпень 2023]
- [159] Maplesoft, «NyquistPlot», *Maple Help*, maplesoft.com, 2023. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=DynamicSystems%2FNyquistPlot>. [Дата звернення: 09, Серпень 2023]

- [160] «Butterworth filter», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter), 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter. [Дата звернення: 10, Серпень 2023]
- [161] T. W. Parks і C. S. Burrus, *Digital Filter Design*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1987. Доступний у: http://lmu.web.psi.ch/docu/manuals/software_manuals/DigitalFilterTheory/DigitalFilterDesign.pdf. [Дата звернення: 08, Серпень 2023]
- [162] «Band-stop filter», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Band-stop_filter), 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Band-stop_filter. [Дата звернення: 10, Серпень 2023]
- [163] П. Дж. Пупалайкіс, «Групова затримка та її вплив на тестування потоків послідовних даних», 2006. Доступний у: https://cdn.teledynelecroy.com/files/whitepapers/group_delay-designcon2006.pdf. [Дата звернення: 10, Серпень 2023]
- [164] «Bessel filter», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_filter), 2020. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_filter. [Дата звернення: 10, Серпень 2023]
- [165] «Bessel polynomials», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_polynomials), 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_polynomials. [Дата звернення: 10, Серпень 2023]
- [166] E. Grosswald, *Bessel Polynomials. Lecture Notes in Mathematics*. Heidelberg: SpringerLink, 1978. Доступний у: <https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0063135>. [Дата звернення: 10, Серпень 2023]
- [167] «Active Low-Pass Filter Design», *TI.com*, 2023. Доступний у: <https://www.ti.com/lit/an/sloa049d/sloa049d.pdf?ts=1722788096184>. [Дата звернення: 11, Серпень 2023]
- [168] G. A Kaiser, *Friendly Guide to Wavelets*. Boston : Birkhäuser Boston, 2011. URL: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8111-1>
- [169] «Local regression», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Local_regression), 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Local_regression. [Дата звернення: 20, Серпень 2023]
- [170] Maplesoft, «Table», *Maple Help*, [maplesoft.com](https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=DocumentTools%2FLayout%2FTable), 2015. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=DocumentTools%2FLayout%2FTable>. [Дата звернення: 21, Серпень 2023]
- [171] «Convolution», *Maple Help*, [maplesoft.com](https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution). Доступний у: <https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>. [Дата звернення: 26, Серпень 2023]
- [172] Convolution. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. URL: <https://www.dspguide.com/ch6.htm>. [Дата звернення: 26, Серпень 2023]
- [173] GIMP, «Convolution Matrix. GNU Image Manipulation Program (GIMP)», [docs.gimp.org](https://docs.gimp.org/2.8/en/plugin-convmatrix.html), 2015. Доступний у: <https://docs.gimp.org/2.8/en/plugin-convmatrix.html>. [Дата звернення: 26, Серпень 2023]
- [174] «Wavelet transforms on images (Chapter 2)», [learp.ee.iisc.ac.in](http://www.learp.ee.iisc.ac.in/sriram/teaching/MLSP_16/refs/wavelet-2d-images.pdf), 2016. Доступний у: http://www.learp.ee.iisc.ac.in/sriram/teaching/MLSP_16/refs/wavelet-2d-images.pdf. [Дата звернення: 26, Серпень 2023]
- [175] «The Rest of the Lenna Story», [lenna.org](http://www.lenna.org/), 1996. Доступний у: <http://www.lenna.org/>. [Дата звернення: 26, Серпень 2023]
- [176] J. Hutchinson, «Culture, communication, and an information age Madonna», *IEEE Professional communication society officers*, вип. 45, вип. 3, с. 28, 2001, Доступний у: http://www.lenna.org/pics_mirror/may_june01.pdf. [Дата звернення: 26, Серпень 2023]
- [177] I. Daubechies, «Ten lectures on wavelets». Philadelphia, Pa : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 357 p.
- [178] Maplesoft, «Wavelets and Applications», *Maple Help*, [maplesoft.com](https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=examples%2FWavelets), 2023. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=examples%2FWavelets>. [Дата звернення: 16, Серпень 2023]
- [179] D. Jana і K. Sinha, «Wavelet Thresholding for Image Noise Removal», *International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication*, вип. 2, вип. 6, с. 1400–1405, Чер 2014, doi: 10.17762/IJRITCC.V2I6.3179. Доступний у: <https://ijritcc.org/index.php/ijritcc/article/view/3179>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [180] «Цифровий звукозапис», *Bikinedia*, [uk.wikipedia.org](https://uk.wikipedia.org/wiki/Цифровий_звукозапис), 2022. Доступний у: https://uk.wikipedia.org/wiki/Цифровий_звукозапис. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [181] «Digital recording», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_recording), 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_recording. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [182] «Microphone», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Microphone), 2023. Доступний у: <https://en.wikipedia.org/wiki/Microphone>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [183] «Electret microphones», *Open Music Labs*, [openmusiclabs.com](http://www.openmusiclabs.com/learning/sensors/electret-microphones/), 2016. Доступний у: <http://www.openmusiclabs.com/learning/sensors/electret-microphones/>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [184] «Electret microphone», *Wikipedia*, [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Electret_microphone), 2023. Доступний у: https://en.wikipedia.org/wiki/Electret_microphone. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [185] Fox Media Tech, «The Complete Guide To Electret Condenser Microphones», *My New Microphone*, [mynewmicrophone.com](https://mynewmicrophone.com/the-complete-guide-to-electret-condenser-microphones/), 2023. Доступний у: <https://mynewmicrophone.com/the-complete-guide-to-electret-condenser-microphones/>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]

- [186] J. Benesty, M. M. Sondhi, i Y. Huang, *Springer Handbook of Speech Processing*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. Доступний у: <https://link.springer.com/content/pdf/bfm:978-3-540-49127-9/1.pdf>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [187] Л. Р. Рабинер і Р. В. Шаффер, *Цифровая обработка сигналов*. М.: Радио и связь, 1981. Доступний у: <http://optic.cs.nstu.ru/files/Lit/Math/Rabiner.pdf>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [188] Maplesoft, «Record», *Maple Help*, [maplesoft.com](https://www.maplesoft.com), 2015. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=AudioTools%2FRecord>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [189] Maplesoft, «Microphone Component», *Maple Help*, [maplesoft.com](https://www.maplesoft.com), 2015. Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=MicrophoneComponent>. [Дата звернення: 27, Серпень 2023]
- [190] Maplesoft, «Units of Information», *Maple Help*, [maplesoft.com](https://www.maplesoft.com). Доступний у: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=Units/information>. [Дата звернення: 28, Серпень 2023]

ДОДАТКИ

Додаток А. MAPLE-КОД ГРАФІКІВ ДО ТЕОРІЇ 1 РИС. 1.5, РИС. 1.6 ТА РИС. 1.8

```
> restart:
> with(CurveFitting): with(plots): with(DynamicSystems):
  with(SignalProcessing[Engine]):
> plotopt:=size=[400,300], labeldirections=[horizontal, vertical]:
> Fs:=500: # Signal frequency
  N:=500: # Number of samples
> # Generate the signal:
  t1:=Vector(N, i->(i-1)*(1/Fs)):
  sig:=Vector(N, i->(2*sin(2*Pi*t1[i]))):
  t_dis:=Vector(N/20, i->(i-1)*(20*1/Fs)):
  sig_dis:=Vector(N/20, i->(2*sin(20*2*Pi*t1[i]))):
> u:=1: # Half range of signal
  b:=3: # Number of bits
> # Quantization interval:
  Delta:=2*u/(2^b):
> Q_midtread:=x->Delta*floor(x/Delta+1/2):
  Q_midrise:=x->Delta*(floor(x/Delta)+1/2):
> # Quantize the signal:
  sig_midtread:=Q_midtread~(sig):
  sig_midrise:=Q_midrise~(sig):
> # Теорія 1, Рис. 1.5 - Неквантований сигнал с дискретним часом:
> plot(t1, sig, color="DarkGrey", thickness=3, view=[0..1.05, -
  1.1..1.1], size=[400,400], gridlines, plotopt): sig_2:=%:
> DiscretePlot(t_dis, sig_dis, style=stem, symbol=circle,
  symbolsize=20, labels=[typeset("Time, ", 't'), typeset("Signal
  value, ", 'S(t)')], color=red, thickness=2, view=[0..1.05, -
  2.1..2.1], size=[400,280], gridlines, plotopt): dis_sig_2:=%:
> tx2:=textplot([0.65, 2., 'typeset'('f[s]', " = 500 Hz, \n Sample
  rate = 25 Hz, \n", 'S(t) = sin(2*Pi*f[s]*t)')], 'align'={ 'below',
  'right'}, view=[0..1.05, -2.1..2.1], size=[440,280], gridlines,
  plotopt):
> display(sig_2, dis_sig_2, tx2, gridlines,
  axis[1]=[gridlines=[subticks=4]],
  axis[2]=[gridlines=[subticks=3]], size=[440,280]);
> # Теорія 1, Рис. 1.6 - Квантований сигнал
> plot(t1, sig_midtread, color="Red", thickness=2, view=[0..1.05, -
  1.1..1.1], size=[400,400], gridlines, plotopt): quant_sig_2:=%:
> tx1:=textplot([0.65, 2., 'typeset'('f[s]', " = 500 Hz, \n bit = 4,
  \n", 'S(t) = sin(2*Pi*f[s]*t)')], 'align'={ 'below', 'right'},
  view=[0..1.05, -2.1..2.1], size=[440,280], gridlines, plotopt):
> display(sig_2, quant_sig_2, tx1, labels=[typeset("Time, ", 't'),
  typeset("Signal value, ", 'S(t)')], gridlines,
  axis[1]=[gridlines=[subticks=4]],
  axis[2]=[gridlines=[subticks=3]], view=[0..1.05, -2.1..2.1],
  size=[440,280]);
> # Теорія 1, Рис. 1.8 - Дискретизований сигнал:
> d:=0.04:
```

```

> pointplot([0,0], [d,0], [d,.5], [2*d,.5], [2*d,1], [3*d,1],
[3*d,1.5], [4*d,1.5], [4*d,1.75], [5*d,1.75], [5*d,2], [7*d,2],
[7*d,1.75], [9*d,1.75], [9*d,1.5], [10*d,1.5], [10*d,1], [11*d,1],
[11*d,0.5], [12*d,.5], [12*d,0], [13*d,0], [13*d,-.5], [14*d,-.5],
[14*d,-.75], [15*d,-.75], [15*d,-1.25], [16*d,-1.25], [16*d,-
1.75], [17*d,-1.75], [17*d,-2], [19*d,-2], [19*d,-1.75], [21*d,-
1.75], [21*d,-1.5], [22*d,-1.5], [22*d,-1.25], [23*d,-1.25],
[23*d,-.75], [24*d,-0.75], [24*d,-.25], [25*d,-.25], [25*d,.25],
[26*d,.25]], style=line, color=red, thickness=3, view=[0..1.05, -
2.1..2.1], size=[400,400], plotopt, gridlines,
axis[1]=[gridlines=[subticks=4]]): dig_sig_2:=%:
> tx3:=textplot([0.65, 2., 'typeset'('f[s]', " = 500 Hz, \n bit = 4,
\n Sample rate = 25 Hz, \n", 'S(t) = sin(2*Pi*f[s]*t)')],
'align'={ 'below', 'right' }, view=[0..1.05, -2.1..2.1],
size=[440,280], gridlines, plotopt):
> display(sig_2, dig_sig_2, tx3, labels=[typeset("Time, ", 't'),
typeset("Signal value, ", 'S(t)')], gridlines,
axis[1]=[gridlines=[subticks=4]],
axis[2]=[gridlines=[subticks=3]], size=[440,280]);

```

Рис. 1.9

```

> restart:
> with(ImageTools):
  with(SignalProcessing):
  with(DiscreteTransforms):
> plotopt:=font=[TIMES, ROMAN, 12], size=[320, 260],
  labeldirections=[horizontal, vertical]:
  plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], 'font'=[TIMES,
  ROMAN, 12], 'axesfont'=[TIMES, ROMAN, 12], 'labelfont'=[TIMES,
  ROMAN, 12]:
> # Згасаюча хвиля, яка буде модулювати несучу:
  fm:=30: # Частота модулюючої згасаючої хвилі (Гц)
  Um:=1: # Амплітуда модулюючої хвилі (мВ)
  d_damp:=6: # Коефіцієнт згасання
  taul:=0.: # Момент відліку часу (с)
  phi_c:=0: # Початкова фаза модулюючої хвилі
> s_exp:=unapply(exp(-d_damp*(t-taul)),t);
> Sig_m:=unapply(Um*s_exp(t)*sin(2*Pi*fm*t+phi_c),t);
  # Рівняння модулюючої згасаючої хвилі
> plot(Sig_m, 0..1.2, caption="\n Рис. 1 - Сигнал.", color="Blue",
  thickness=2, tickmarks=[6,6], labels=["Time, t", typeset("Damped
  Signal, ", 'U[m](t)')], view=[0..1, -2..2], plotopt, size=[500,
  280]);
> # Несуча хвиля (Carrier wave) з вищою частотою за частоту (3.3):
  fc:=300: # Частота несучої хвилі (Гц)
  Uc:=2.: # Амплітуда несучої хвилі (мВ)
> Sig_c:=unapply(Uc*sin(2*Pi*fc*t),t);
  # Рівняння несучої хвилі
> plot(Sig_c, 0..1.2, caption="\n Рис. 2 - Сигнал.",
  color="DimGrey", thickness=1, tickmarks=[6,6], labels=["Time, t",
  "Uc(t)"], view=[0..1, -2.5..2.5], plotopt, size=[1000, 280]);
> # Амплітудно-модульований сигнал:
  Sig:=unapply((Uc+Sig_m(t))*(Sig_c(t)/Uc),t);

```

```

# Рівняння АМ-сигналу - неперервної згасаючої амплітудно-модульованої
хвилі
` (Uc+Sig_m(t))*(Sig_c(t)/Uc`;
> plot(Sig, 0..0.1, color="Blue", thickness=1, tickmarks=[6,6],
labels=["Time, t", typeset("AM-Signal, ", 'U[AM](t)')],
caption="\n Рис. 2 - Модульований сигнал.", view=[0..0.1, -
3.2..3.2], plotopt, size=[400, 240]);
plot(Sig, 0..0.1, style=point, symbol=circle, symbolsize=22,
color="Blue", thickness=2, tickmarks=[6,6], view=[0..0.001,
0..2.2], plotopt, size=[260, 160]);
> Sig(0.00012); Sig(0.000125);
> tx_AM:=plots[textplot]([0.65, 2., 'typeset'('f[c]', " = 300
Hz,\n", 'f[m]', " = 30 Hz,\n", 'U[max_c]', " = 2 a.u.\n",
'U[max_m]', " = 1 a.u.\n", 'delta', " = 6")], 'align'={ 'below',
'right'}, view=[0..1.05, -2.1..2.1], size=[440,240], gridlines,
plotopt):
> # Здійснимо дискретизацію сигналу (3.5):
[2^3, 2^8];
> samp_rate:=8e3: 1/%;
# Частота дискретизації
> time_d:=Vector([seq](0..1, 1.0/samp_rate), datatype=float[8]):
# Дискретний ряд значень часу
time_d[8000];
> Signal_d:=Vector(Sig~(time_d), datatype=float[8]):
# Співставлення значень часу значенням сигналу, тобто вектор-стовець ко-
ординат точок
Signal_d[8000];
> # Дискретизований сигнал (3.5):
plot(time_d, Signal_d, color="Black", thickness=1, labels=["Time,
t", typeset(" Digital Signal, ", 'S[dig](t)')], view=[0..0.08, -
2.9..3.6], plotopt, size=[400, 240]);
DynamicSystems[DiscretePlot](time_d, Signal_d, style=stem,
symbol=circle, symbolsize=22, thickness=2, color=black,
view=[0..0.001, 0..2.2], size=[260, 160]);
> Periodogram(Signal_d, samplerate=samp_rate, color=red,
thickness=2, view=[0..400, -80..45], plotopt2, size=[400,240]);
> # Фур'є-спектр масиву даних сигналу:
[nops(Signal_d), numelems(Signal_d), log[2](8000.), 2^12];
> fSignal_d:=FFT(Signal_d[1 .. 2^12]):
# ШПФ для підмасиву з перших 4096 значень з масиву даних
> mSignal_d:=Magnitude(fSignal_d):
# Коефіцієнти (амплітуди) Фур'є
> samplingRate:=8000:
Signal_FD:=[seq([i*samplingRate/(2^12), mSignal_d[i]],
i=1..(1/2)*numelems(Signal_d))]:
whattype(SS_FD);
> plots[listplot](Signal_FD, labels=["Frequency (Hz)", "Fourier
Magnitude"], thickness=2, color=red, gridlines,
axis=[gridlines=[color="DimGrey"]], axes=boxed,
view=[0..400,0..50], plotopt, size=[400, 240]);

```

Додаток Б. MAPLE-КОД ГРАФІКІВ ДО ТЕОРІЇ 2

Рис. 2.1, Рис. 2.2

```

> restart:
> # Підключення пакетів статистики та роботи з графіками:
with(Statistics):
with(plots):
> interface(displayprecision=5, rtablesize=7):
plotopt:=font=[TIMES, ROMAN, 12], labeldirections=[horizontal,
vertical], gridlines:
plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], 'font'=[TIMES,
ROMAN, 12], 'axesfont'=[TIMES, ROMAN, 12], 'labelfont'=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines:
> hor:=380: ver:=280:
> # Ряд з 10-ти значень кількості білих кружків, що випала, на грані кубика
в експерименті з його підкидання:
dice_10:=[2,3,1,2,5,6,2,2,2,6]:
numelems(%);
> # Ймовірність випадіння грані кубика з будь-якою (з 6-ти можливих) кіль-
кістю кружків:
10+2*5/10+3/10+5/10+6*2/10;
1./6;
> # Графік прямої, що позначає ймовірність "1/6", і підпис до неї:
pl_1d6:=plot(1/6, color="DarkOrange", thickness=2):
tx_pl1d6_10:=textplot([5.3, 0.24, typeset('1/6'), 'font'=["times",
"bold", 14], color="DarkOrange"]):
tx_pl1d6:=textplot([5.5, 0.205, typeset('1/6'), 'font'=["times",
"bold", 14], color="DarkOrange"]):
> # Гістограма в абсолютних значеннях для 10-підкидань
(Рис. 2.1 (а)):
d_his_10:=Histogram(dice_10, color="BlueViolet", transparency=0.3,
frequencyscale=absolute, binwidth=0.5, labels=["Event",
typeset("Number of\nappearance, ", 'N[i]', "\n")], axes=boxed,
view=[0..6.5, 0..5.5], plotopt2, size=[200, ver-60]);
> # Гістограма у відносних (від 0 до 1) значеннях для 10-підкидань (Рис.
2.2 (а)):
d_his_10n:=Histogram(dice_10, discrete=true, thickness=4,
color="BlueViolet", labels=["Event", typeset("Probapility, ",
'P(d[i])')], axes=boxed, view=[0..6.5, 0..0.55], plotopt2,
size=[180, ver-60]):
display(pl_1d6, tx_pl1d6_10, d_his_10n, labels=["Event",
typeset("Probapility, ", 'P(d[i])')], axes=boxed, view=[0..6.5,
0..0.525], plotopt, size=[180, ver-60]);
> DataSummary(dice_10);
> # Згенеруємо ряд 100 випадкових величин від 1 до 6, тобто кількості білих
кружків на грані кубика, що випала:
# RandomTools[Generate](list(posint(range=6), 100));
> # Скопіюємо згенерований ряд значень:
dice_100:=[4, 3, 6, 2, 5, 2, 3, 3, 6, 6, 4, 3, 1, 4, 2, 3, 2, 1,
1, 1, 5, 2, 4, 5, 4, 6, 1, 6, 3, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 2, 3, 2, 4, 6,
6, 6, 1, 6, 1, 2, 1, 5, 3, 2, 5, 5, 3, 1, 5, 4, 6, 6, 4, 5, 3, 3,
1, 5, 3, 1, 2, 1, 4, 5, 1, 1, 6, 1, 3, 1, 1, 3, 3, 1, 4, 6, 6, 5,
4, 1, 2, 5, 5, 1, 2, 1, 5, 4, 4, 5, 4, 2, 1, 4]:
> # Гістограма в абсолютних значеннях для 100-підкидань
Рис. 2.1 (б)):
d_his_100:=Histogram(dice_100, color="DarkOrchid",

```

```

    transparency=0.3, frequencyscale=absolute, binwidth=0.5,
    labels=["Event", typeset("Number of\n appearance, ", 'N[i]')],
    axes=boxed, view=[0..6.5, 0..25], plotopt2, size=[200, ver-60]);
> # Гістограма у відносних (від 0 до 1) значеннях для 100-підкидань (Рис.
    2.2 (б)):
    d_his_100n:=Histogram(dice_100, discrete=true, thickness=4,
    color="DarkOrchid", labels=["Event", typeset("Probapility, ",
    'P(d[i])')], axes=boxed, view=[0..6.5, 0..0.25], plotopt2,
    size=[180, ver-60]):
    display(pl_ld6, tx_plld6, d_his_100n, labels=["Event",
    typeset("Probapility, ", 'P(d[i])')], axes=boxed, view=[0..6.5,
    0..0.25], plotopt, size=[180, ver-60]);
> DataSummary(dice_100);
> # Збільшимо кількість випробувань (дослідів) до 1000:
    dice_1000:=RandomTools[Generate](list(posint(range=6), 1000)):
> # Гістограма в абсолютних значеннях для 1000-підкидань
    (Рис. 2.1 (в)):
    d_his_1000:=Histogram(dice_1000, color="DarkViolet",
    transparency=0.3, frequencyscale=absolute, binwidth=0.5,
    tickmarks=[default, [seq(5e1*i=5*i, i=1..5)]], labels=["Event",
    typeset("Number of\n appearance, ", 'N[i]', "*100")], axes=boxed,
    view=[0..6.5, 0..250], plotopt2, size=[200, ver-60]);
> # Гістограма у відносних (від 0 до 1) значеннях для 1000-підкидань (Рис.
    2.2 (в)):
    d_his_1000n:=Histogram(dice_1000, discrete=true, thickness=4,
    color="DarkViolet", labels=["Event", typeset("Probapility, ",
    'P(d[i])')], axes=boxed, view=[0..6.5, 0..0.25], plotopt2,
    size=[180, ver-60]):
    display(pl_ld6, tx_plld6, d_his_1000n, labels=["Event",
    typeset("Probapility, ", 'P(d[i])')], axes=boxed, view=[0..6.5,
    0..0.25], plotopt, size=[180, ver-60]);
> DataSummary(dice_1000);
> # Згенеруємо ряд з 10000 значень:
    dice_1e5:=RandomTools[Generate](list(posint(range=6), 100000)):
> # Гістограма в абсолютних значеннях для 100000-підкидань
    (Рис. 2.1 (г)):
    d_his_1e5:=Histogram(dice_1e5, color="Indigo", transparency=0.3,
    frequencyscale=absolute, binwidth=0.5, tickmarks=[default,
    [seq(5e3*i=5*i, i=1..5)]], labels=["Event", typeset("Number
    of\n appearance, ", 'N[i]', "*1000")], axes=boxed, view=[0..6.5,
    0..25000], plotopt2, size=[200, ver-60]);
> # Гістограма у відносних (від 0 до 1) значеннях для 10000-підкидань (Рис.
    2.2 (г)):
    d_his_1e5n:=Histogram(dice_1e5, discrete=true, thickness=4,
    color="Indigo", labels=["Event", typeset("Probapility, ",
    'P(d[i])')], axes=boxed, view=[0..6.5, 0..0.25], plotopt2,
    size=[180, ver-60]):
    display(pl_ld6, tx_plld6, d_his_1e5n, labels=["Event",
    typeset("Probapility, ", 'P(d[i])')], axes=boxed, view=[0..6.5,
    0..0.25], plotopt, size=[180, ver-60]);
> DataSummary(dice_1e5);

```

Рис. 2.5

```

> restart:
> with(Statistics):
> interface(displayprecision=5, rtablesize=5):
  plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
  ROMAN, 12], gridlines=true:
  plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], gridlines=true,
  labelfont=[TIMES, ROMAN, 12], axesfont=[TIMES, ROMAN, 12]:
> # Кількість точок:
  N:=12:
> # Ряд періодичних значень за функцією cos():
  A:=<seq(cos(i), i=1..N)>:
> SignalProcessing[SignalPlot](A, style=pointline, symbol=circle,
  symbolsize=18, thickness=2, color=blue, plotopt2, axes=normal,
  size=[400, 200]); A_pl:=%:
> # Застосування методу «ковзного середнього» до ряду A:
  B_SP:=SignalProcessing[MovingAverage](A, 4);
  # команда з пакету SignalProcessing.
  B_St:=Statistics[MovingAverage](A, 4);
  # команда з пакету Statistics.
> # Завдання двох наборів значень первинного сигналу:
  f_A:=hor1->hor1:
  # для координат по осі абсцис;
  hor_A:=Vector(N, f_A):
  # для координат по осі ординат.
> pl_A:=plot(hor_A, A, style=pointline, symbol=circle,
  symbolsize=18, thickness=2, color=blue, view=[0..12.5, -1.2..1.2],
  plotopt, size=[400, 200]);
> # Завдання двох наборів значень після MovingAverage:
  f_B:=hor1->hor1+1:
  # для координат по осі абсцис із зсувом +1;
  hor_B:=Vector(N, f_B):
  # для координат по осі ординат.
> pl_B:=plot(hor_B, B_St, style=pointline, symbol=circle,
  symbolsize=18, thickness=2, color=red, view=[0..12.5, -1.2..1.2],
  plotopt, size=[400, 200]);
> # Побудова відрізків, що позначають трійки точок.
  # Початок відліку координат точок за віссю ординат (вертикальною віссю):
  st:=-1.1:
> # Процедура для завдання координат точок початку відрізка:
  Pol:=array(1..N):
  for i from 1 to N do
    Pol[i]:=[i, st-i/10]
  end do:
  Pol[2]:
> # Процедура для завдання координат точок кінця відрізка:
  Pel:=array(1..N):
  for i from 1 to N do
    Pel[i]:=[i+2, st-i/10]
  end do:
  Pel[1]:
> # Процедура побудови відрізків на графіку:
  for i from 1 to N do
    pl_1[i]:=plot([Pol[i], Pel[i]], color=black, style=pointline,
    symbol=solidbox, symbolsize=12, view=[0..20.5, -2.5..1.5],

```

```
    plotopt, size=[400, 300])
  end do:
  pl_1[1]:
  plotsSeq1:=seq(pl_1[i], i=1..N-2):
> # Остаточний графік для Рис. 2.5:
plots[display](pl_A, pl_B, plotsSeq1, style=pointline,
labels=[typeset("Time, ", 'tau'), typeset("Value, ", 'f(tau)')],
view=[0..13, -2.2..1.1], plotopt, size=[460, 280]);
```

Додаток В. MAPLE-КОД ГРАФІКІВ ДО ТЕОРІЇ 3

Рис. 3.2, Рис. 3.3

```

> restart;
> with(SignalProcessing):
> plotopt:=font=[TIMES, ROMAN, 12], labeldirections=[horizontal,
vertical]:
plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], 'font'=[TIMES,
ROMAN, 12], 'axesfont'=[TIMES, ROMAN, 12], 'labelfont'=[TIMES,
ROMAN, 12]:
> # Згенеруємо сигнал, який представляє собою суму 2-х синусоїд з частотами
12 Гц та 24 Гц:
N:= 2^10;
sampRate:=1000:
# Амплітуди складових:
Sm1:=1.0: Sm2:=1.5: Sm3:=3.: Sm4:=6.:
signal:= Vector(N, i -> Sm1*sin(32.*2*Pi*i/sampRate) +
Sm2*sin(24.*2*Pi*i/sampRate) + Sm3*sin(18.*2*Pi*i/sampRate) +
Sm4*sin(5.*2*Pi*i/sampRate), datatype=float[8]):
> # Графік згенерованого сигналу (Рис. 3.1):
SignalPlot(signal, color=blue, thickness=1, labels=["Time, t (s)",
"Signal, S(t)"], view=[0..1020, -12..12], plotopt2, size=[440,
180]);
> PS_1:=PowerSpectrum(signal):
> MaxPS:=Maximum(PS_1,'index'):
'index'=MaxPS[1]; 'value'=MaxPS[2];
> sort(PS_1, '>');
> PS_2:=PowerSpectrum(signal, 'samplerate'=sampRate,
'variety'='signal', 'powerscale'='dB/Hz', 'output'='record'):
> # Періодограма сигналу (Рис. 3.2):
Periodogram(signal, samplerate=sampRate, color=red, thickness=1,
frequencyscale="kHz",
axis[1]=[gridlines=12, majorlines=2, color="DarkGrey"]],
axis[2]=[gridlines=8, majorlines=2, color="DarkGrey"]],
view=[0..0.035, 15..45], plotopt2, size=[440,180]);

```

Рис. 3.6 [79]

```

> restart;
> with(SignalProcessing):
> plotopt:=font=[TIMES, ROMAN, 12], labeldirections=[horizontal,
vertical]:
plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], 'font'=[TIMES,
ROMAN, 12], 'axesfont'=[TIMES, ROMAN, 12], 'labelfont'=[TIMES,
ROMAN, 12]:
> filename:=FileTools:-JoinPath([kernelopts(datadir), "audio",
"maplesim.wav"]);
f3:=AudioTools:-Read(filename);
AudioTools[Preview](f3, output=embed, color=["DimGrey", grey]);
> Spectrogram(f3, colorscheme=["zgradient", [white, ColorTools:-
Color([240./255, 231./255, 220./255]), black], markers=[0, 0.7,
1]],
fftsize=256, plotopt2, size=[500, 240],
includesignal=[color="DimGrey", plotopt2],
includepowerspectrum=[color="MediumBlue", view=[0..3, -38..8],
plotopt2, size=[500, 240]]);

```

Додаток Г. MAPLE-КОД ГРАФІКІВ ДО ТЕОРІЇ 4

Рис. 4.1

```
> restart:
> with(inttrans):
  with(plots):
> interface(displayprecision=5, rtablesize=7):
  plotopt:=font=[TIMES, ROMAN, 12], labeldirections=[horizontal,
  vertical], gridlines:
  plotopt2:=labeldirections=[horizontal,vertical], 'font'=[TIMES,
  ROMAN, 12], 'axesfont'=[TIMES, ROMAN, 12], 'labelfont'=[TIMES,
  ROMAN, 12], gridlines:
  plotopt3:=font=[TIMES, ROMAN, 12], labeldirections=[horizontal,
  horizontal, vertical]:
> # Завдання сигналу одиничної висоти та частоти:
  a:=1:
  square_sig_H:=(-Heaviside(t-a)+Heaviside(t+a));
> # Вигляд заданого сигналу (Рис. 4.1 (а)):
  plot(square_sig_H, t=-3..3, axes=normal, labels=[typeset("Time, ",
  't'), ""], axis[1]=[gridlines=[5, subticks, color="DarkGrey"]],
  axis[2]=[gridlines=[4, subticks, color="DarkGrey"]], color=blue,
  filled=[color="Blue", transparency=0.75], thickness=3, view=[-
  3.5..3.5, -0.2..1.2], plotopt, size=[260, 180]);
> # Перетворення Фур'є:
  sig_Four:=fourier(square_sig_H, t, f);
> # 2D-графік ПФ для функції sig_Four Рис. 4.1 (б)):
  sig_F_pl:=plot(sig_Four, f=-100..100, axes=normal,
  labels=[typeset("Frequency, ", 'f'), "Amplitude"],
  axis[1]=[gridlines=[5, subticks, color="DarkGrey"]],
  axis[2]=[gridlines=[4, subticks, color="DarkGrey"]],
  color="DarkViolet", filled=[color="DarkViolet", transparency=0.4],
  thickness=2, view=[-30..30, -0.6..2.2], plotopt, size=[360, 180]):
  text_Ft:=textplot([15, 1.5, typeset("Ft = ", sig_Four)]):
  display(sig_F_pl, text_Ft);
> # Мультиплікативна (добуток) комбінація результатів перетворень Лапласа
та Фур'є:
  S_LF:=sig_L_Hev*sig_Four;
> # 3D-графік добутку перетворення Фур'є та Лапласа для функції S_LF (Рис.
4.1 (в)):
  sig_LF_pl:=plot3d(S_LF, s=0..5, f=-100..100,
  colorscheme=["zgradient", ["MediumBlue", "DarkViolet", "Red"]],
  zrange=-0.6..2.2, transparency=0.2, light=[60, -90, 1,1,1],
  axes=frame, labels=[typeset("\n Complex variable, \n      ",
  's=sigma+i*omega'), typeset("Frequency, ", 'f'), "Amplitude,
  a.u."], orientation=[-165, 70, 0], view=[0..5, -60..60, -0.2..2],
  plotopt3, size=[640, 440]):
  text_LF_3d:=textplot3d([3, -5, 1.2, typeset("LFt = ", S_LF),
  'font'=["times", "roman", 14]], 'align'='right', axes=boxed):
  display(sig_LF_pl, text_LF_3d);
```

Рис. 4.5 (б), ДИВ. ПРИКЛАД В [91]

```
> restart:
> with(DynamicSystems):
> plotopt:=font=[TIMES, ROMAN, 12], legendstyle=[font=[TIMES, ROMAN,
10]], labeldirections=[horizontal, vertical], gridlines:
  plotopt2:='font'=[TIMES, ROMAN, 12], 'legendstyle'=[font=[TIMES,
```

```

    ROMAN, 10]], labeldirections=[horizontal,vertical],
    'axesfont'=[TIMES, ROMAN, 12], 'labelfont'=[TIMES, ROMAN, 12],
    gridlines:
> # Параметри системи:
    params:=[J=0.01, b=0.1, K=0.01, R=1., L=0.5]:
    params;
> # Електрична частина мотору:
    sysElectrical:=DiffEquation([L*D(i)(t)+R*i(t)=V(t)-K*D(theta)(t),
    [V(t)], [theta(t)]]:
    Pr:=PrintSystem(sysElectrical);
> # Механічна частина мотору:
    sysMechanical:=DiffEquation([J*(D@@2)(theta)(t) +
    b*D(theta)(t)=K*i(t)], [i(t)], [theta(t)]]:
    PrintSystem(sysMechanical);
> # Диференційне рівняння моделі як функція напруги та кута повороту:
    sysOverall:=DiffEquation([L*D(i)(t)+R*i(t)=V(t)-K*D(theta)(t),
    J*(D@@2)(theta)(t)+b*D(theta)(t)=K*i(t)], [V(t)], [theta(t)]]:
    PrintSystem(sysOverall);
> # Передавальна функція:
    TFopen:=TransferFunction(sysOverall):
    PrintSystem(TFopen);
> # Просторова модель системи:
    SSopen:=StateSpace(sysOverall):
    PrintSystem(SSopen);
> # Графік відгуку системи:
    ic:=[theta(0)=-1.5, D(theta)(0)=0, i(0)=0]:
    ResponsePlot(TFopen, Heaviside(t), output=theta(t),
    initialconditions=ic, parameters=params, duration=3, thickness=2,
    title="Change of shaft position: theta(t)", labels=["time [sec]",
    "theta(t) [rad]"], view=[0..3, -0.25..1.25], plotopt2, size=[400,
    260]);
> # Далі у прикладі [91] наведена процедура LQR (Linear quadratic regula-
    tor, тобто лінійно-квадратичного регулятора):

```

LQR procedure

```

> # Матриці проектування LQR:
    A:=eval(SSopen:-a, params):
    B:=eval(SSopen:-b, params):
    Qlqr:
    Kss:=LQR(A, B, Qlqr, Rlqr);
> # З процедури "Define Open loop and Closed loop responses" візьмемо
    тільки необхідні функції:
    # Define Open loop and Closed loop responses
    # Input Functions
    HeavisideFn2:=Heaviside(t-1)-1.5*Heaviside(t-6)+0.5*Heaviside(t-
    11):

    # Define Differential Equation Model
    DEopen:=DynamicSystems[DiffEquation](SSopen):
    #Define the Open Loop Response
    sysOpenLoop:=DEopen:

    # Define Closed Loop Response
    controller:=V(t)=-(Kss.Vector(3, {1=x1(t), 2=x2(t)-trim(t),
    3=x3(t)}))[1]:

```

```
DEequations:=[DEopen:-de[], controller]:
sysClosedLoop:=DynamicSystems[DiffEquation](DEequations,
[trim(t)], [x1(t), x2(t), x3(t), V(t)]):
> # Вхідний контрольований сигнал:
in_contr:=plot(HeavisideFn2, t=0..50, color=red, linestyle=solid,
thickness=2, legend="Heaviside Function 2", title="Heaviside(t-1)-
0.5 Heaviside(t-30)", axes=boxed, view=[0..18, -1.25..1.25],
plotopt, size=[400, 240]):
> # Вихідний контрольований сигнал:
out_contr:=DynamicSystems[ResponsePlot](sysClosedLoop,
[HeavisideFn2], output=[x2(t)], duration=50, parameters=params,
numpoints=1000, thickness=2, color=blue, legend=["Controlled
output"], axes=boxed, view=[0..18, -1.25..1.25], plotopt2,
size=[340, 340]):
plots[dualaxisplot](
plot(HeavisideFn2, t=0..50, color=red, linestyle=solid,
thickness=2, labels=["Time, [sec]", "Voltage, [V]"],
legend="Heaviside Function", view=[0..18, -0.75..1.75], plotopt),
DynamicSystems[ResponsePlot](sysOpenLoop, [HeavisideFn2],
output=[x2(t)], duration=50, parameters=params, numpoints=1000,
thickness=2, color=blue, labels=["Time, [sec]", "theta(t),
[rad]"], legend=["Controlled output"], view=[0..18, 0..0.5],
plotopt2
), tickmarks=[5, 8], axes=boxed, size=[400, 280]);
```

Додаток Д. MAPLE-КОД ГРАФІКІВ ДО ТЕОРІЇ 5

Рис. 5.7, ДИВ. ПРИКЛАД В [104]

```
> restart;
> interface(displayprecision=3, rtablesize=7):
  plotopt:=labeldirections=[horizontal, horizontal], font=[TIMES,
  ROMAN, 12]:
> c:=k -> if k<>0 then 2/k*sin(k*Pi/5) else 2*Pi/5 fi:
  plotdelta:=(w, h, clr) -> plot([[[w,0],[w,h]],[[w,h]]],
  style=[line, point], thickness=3, symbol=circle, color=clr):
  p1:=plot([0, 2*Pi/5*sin(w)/w], w=-10..10, -0.4..1.3,
  color=["Blue","Blue"], thickness=2):
  plots[display](p1, view=[-10..10, -0.4..1.5], size=[500, 260]):
> phi:=16/5*Pi: # Величина зсуву графіка по горизонтальній осі.
  c2:=k -> if k<>0 then 2/k*sin(k*Pi/5)+phi else 2*Pi/5 fi:
  plotdelta2:=(w,h,clr) -> plot([[[w,0],[w,h]],[[w,h]]],
  style=[line,point], thickness=2, symbol=circle, color=clr):
  deltas2:=seq(plotdelta2(k*Pi/5+phi, c(k), "Lime"), k=[seq(i, i=-
  16..16)]):
  p1_2:=plot([0, 2*Pi/5*sin(w-phi)/(w-phi)], w=0..20, -0.4..1.4,
  color=["Lime","Blue"], linestyle=[solid, dot], thickness=2):
  plots[display]([p1, deltas2, p1_2], view=[-10..20, -0.4..1.6],
  labels=[typeset("Freq. ", " (" , '\omega', ") [rad/s]"),
  typeset("Frequency\nresponse, ", 'F(\omega)')], plotopt, size=[500,
  260]);
```

Додаток Е. MAPLE-КОД ГРАФІКІВ ДО ТЕОРІЇ 9

Рис. 9.2, Рис. 9.4

```
> restart;
> interface(displayprecision=3, rtablesize=7):
  plotopt:=labeldirections=[horizontal, horizontal], font=[TIMES,
  ROMAN, 12]:
> # Рис. 9.2:
  line_pl:=0.09:
  plot(line_pl, i=-30.1..30.1, numpoints=10000, thickness=102,
  colorscheme=["Black", "Gray", "White"], axis[2]=[gridlines=[1,
  color="LightGray"]], view=[-32..32, 0..0.2], labels=[" ", ""],
  tickmarks=[[-30='-2^(depth-1)', 0="0", 30='2^(depth-1)-1'],
  [0.2="Gray"]], plotopt, size=[960, 180], background="LightGray");
  grad_pl:=%:
> # Рис. 9.4:
  color_2:=ColorTools[Gradient]("Indigo".."BlueViolet", number=4,
  best):
> ColorTools[Swatches]([color_1[], color_2[]], rows=4, gap=0.,
  borders=["White", "White"]):
> plots[display](%, size=[400, 400]); color_matr:=%:
> plot([[0,0], [0, 0]], plotopt, view=[0..4, 0..4], size=[300,
  305]);
```

Додаток Ж. MAPLE-КОД ГРАФІКІВ ДО ПРАКТИКИ 6

Рис. 15.1 А, Б

```

> restart:
with(SignalProcessing[Engine]):
with(DocumentTools):
with(DiscreteTransforms):

> interface(displayprecision=3, rtablesize=9):
plotopt:=labeldirections=[horizontal,vertical], font=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines=true, axes=boxed:
plotopt_s:=labeldirections=[horizontal,horizontal], font=[TIMES,
ROMAN, 12], gridlines=true:

> hor:=460: ver:=260:

> wH:=(k,t,tau)->piecewise(k*t-tau<0, 0, k*t-tau<1/2, 1, k*t-tau<1,
-1, 0):
# Рис. 15.1 а - Haar wavelet 1,0
wH_pl:=plot(wH(1,t,0), t=-0.5..1.5, thickness=3, color="Blue",
labels=[typeset("Time, ", 't'), 'psi(t)'], tickmarks=[4, 6],
view=[-0.5..1.5, -1.5..1.5], plotopt_s, size=[ver, 0.8*ver]);

> wH_pl1:=plot(wH(1,t,0), t=-0.2..1.2, thickness=3, color="Blue",
labels=[typeset("", 't'), 'psi(t)'], tickmarks=[4, 3], view=[-
0.2..1.2, -1.6..1.6], plotopt_s, gridlines=false):
tx_phi1:=plots[textplot]([0.25, 1.6, 'phi[1,0]'], view=[-0.2..1.2,
-1.3..1.3], plotopt_s, gridlines=false):
wH_pl1:=plots[display](wH_pl1, tx_phi1, size=[1.2*ver, 0.4*ver]);
# Рис. 15.1 б - Haar wavelet 1,0

> wH_pl2:=plot(wH(2,t,0)+wH(2,t,1), t=-0.2..1.2, thickness=3,
color="Blue", labels=[typeset("", 't'), 'psi(t)'], tickmarks=[4,
3], view=[-0.2..1.2, -1.6..1.6], plotopt_s, gridlines=false):
# Рис. 15.1 в - Haar wavelet 2,0 & 2,1
tx_phi2:=plots[textplot]([0.13, 1.6, 'phi[2,0]'], [0.63, 1.6,
'phi[2,1]'], view=[-0.2..1.2, -1.3..1.3], plotopt_s,
gridlines=false):
wH_pl2:=plots[display](wH_pl2, tx_phi2, size=[1.2*ver, 0.4*ver]);

> wH_pl3:=plot(wH(3,t,0)+wH(3,t,1)+wH(3,t,2), t=-0.2..1.2,
thickness=3, color="Blue", labels=[typeset("", 't'), 'psi(t)'],
tickmarks=[4, 3], view=[-0.2..1.2, -1.6..1.6], plotopt_s,
gridlines=false):
# Рис. 15.1 г - Haar wavelet 3,0 & 3,1 & 3,3
tx_phi3:=plots[textplot]([0.09, 1.6, 'phi[3,0]'], [0.42, 1.6,
'phi[3,1]'], [0.75, 1.6, 'phi[3,2]'], view=[-0.2..1.2, -
1.3..1.3], plotopt_s, gridlines=false):
wH_pl3:=plots[display](wH_pl3, tx_phi3, size=[1.2*ver, 0.4*ver]);

```

ПЕРЕЛІК РИСУНКІВ

Рис. 1.1 – Приклад ієрархічної схеми у письмовому тексті.	12
Рис. 1.2 – Основні типи сигналів.	13
Рис. 1.3 – Приклад схеми застосування або впливу БІ та БМІ.	14
Рис. 1.4 – Загальна схема біоелектричних сигналів [37].	14
Рис. 1.5 – Дискретизований (але неквантований) сигнал.	18
Рис. 1.6 – Квантований (але не дискретизований) сигнал.	18
Рис. 1.7 – Деякі додаткові характеристики оцифрування сигналів.	18
Рис. 1.8 – Цифровий (оцифрований) сигнал.	19
Рис. 1.9 – Цифровий АМ-модульований сигнал та його спектр частот: а), б) неперервний сигнал (хвиля); в), г) дискретизований сигнал.	20
Рис. 1.10 – Застосування методу підвищення контрасту зображення.	21
Рис. 2.1 – Гістограми (частотні розподіли) для чотирьох різних вибірок: а) 10 дослідів; б) 100 дослідів; в) 1000 дослідів; г) 100 000 дослідів.	24
Рис. 2.2 – Нормовані гістограми для чотирьох вибірок: а) 10 дослідів; б) 100 дослідів; в) 1000 дослідів; г) 100 000 дослідів.	26
Рис. 2.3 – Нормований нормальний розподіл зросту чоловіків з параметрами: $\mu = 0, \sigma = 1$ [55].	27
Рис. 2.4 – Електроміограма практично здорового пацієнта.	28
Рис. 2.5 – Розподіли величин біопотенціалів ЕМГ здорового пацієнта: реальний та нормальний розподіли Гауса.	29
Рис. 2.6 – Нормальний та реальний розподіли потенціалів ЕМГ хворого на нейропатію.	29
Рис. 2.7 – Розподіли потенціалів ЕМГ здорового пацієнта та хворого на нейропатію.	29
Рис. 2.8 – Застосування до сигналу методу ковзного середнього.	30
Рис. 2.9 – Дані вимірювань ДТ та пульсу (точки) та пряма лінійної інтерполяції (штрих-пунктирна лінія)	30
Рис. 2.10 – Автокореляційна функція міограми здорового пацієнта.	32
Рис. 2.11 – АФ міограми пацієнта хворого на нейропатію.	32
Рис. 2.12 – Варіабельність серцевого ритму [71].	32
Рис. 2.13 – Кардіоінтервалограма (внизу) та відповідність її піків часовим інтервалам серцевого ритму [72], [73].	33
Рис. 2.14 – Гістограма [70].	34
Рис. 2.15 – Скаттерограма [70].	34
Рис. 3.1 – Класифікація деяких відомих методів СА [85].	36
Рис. 3.2 – Деякий сигнал як функція часу.	37
Рис. 3.3 – Частотний спектр сигналу з Рис. 3.2.	37
Рис. 3.4 – Вейвлет DOG як функція часу.	37
Рис. 3.5 – Вейвлет DOG у частотному представленні.	37
Рис. 3.6 – Звуковий сигнал (а), його спектрограма (б) та Фур'є-спектр (в).	38
Рис. 3.7 – Дискретний спектр Фур'є для річних коливань кількості плям на Сонці.	39
Рис. 3.8 – Спектральний аналіз серцевого ритму [81].	40
Рис. 3.9 – Фур'є-спектр ЕМГ здорового пацієнта (Практика 2).	40
Рис. 4.1 – Перетворення прямокутного сигналу: а) одиничний імпульс; б) результат перетворення Фур'є; в) результат перетворення Лапласа.	42
Рис. 4.2 – Імпульсна перехідна функція НЧ-фільтру Баттерворта 3-го порядку.	44
Рис. 4.3 – АФЧХ (діаграма Найквіста) фільтру Баттерворта 3-го порядку нижніх частот (див. Рис. 4.2).	44
Рис. 4.4 – Графіки Боде для фільтру Бесселя 3-го порядку нижніх частот: а) ЛАФЧХ; б) ФЧХ.	45
Рис. 4.5 – Кроковий електричний двигун: а) загальний вигляд [90]; б) вхідний та вихідний сигнали з передавальною функцією (4.11).	46
Рис. 4.6 – Імпульсна перехідна характеристика крокового двигуна на Рис. 4.5	46
Рис. 5.1 – Приклад частотного спектру сигналу до та після фільтрації [94].	48
Рис. 5.2 – Принципові електричні схеми аналогових фільтрів [99].	49
Рис. 5.3 – Ідеальна прямокутна АЧХ та нульова ФЧХ.	50
Рис. 5.4 – Апроксимація ідеальною прямокутною АЧХ аналогових фільтрів.	50
Рис. 5.5 – Блок-схема цифрової фільтрації аналогового сигналу.	51
Рис. 5.6 – Імпульсна характеристика цифрового фільтру.	51
Рис. 5.7 – Зміщення імпульсної характеристики КІХ-фільтру [104].	52
Рис. 6.1 – Вейвлет Хаара.	54
Рис. 6.2 – Фур'є-образ вейвлета Хаара в частотному представленні.	54
Рис. 6.3 – Схема дискретного вейвлет-перетворення.	55
Рис. 6.4 – Дискретне ДВП з трьома рівнями масштабування сигналу ($m_{\max} = 3$).	56

Рис. 6.5 – Результати реальних вимірів систолічного тиску крові.	56
Рис. 6.6 – W-коефіцієнти апроксимації I-го рівня.	56
Рис. 6.7 – W-коефіцієнти деталізації I-го рівня.	57
Рис. 6.8 – Очищений від шумів сигнал систолічного АТ на фоні реального (Рис. 6.5).	57
Рис. 6.9 – Криві розподілів густини ймовірності реального та очищеного сигналів СТ.	58
Рис. 6.10 – Спектральний склад сигналу.	58
Рис. 6.11 – Корелограма очищеного сигналу.	59
Рис. 6.12 – Корелограма первинного (нефільтрованого) сигналу.	59
Рис. 7.1 – Один з перших рентгенівських апаратів.	60
Рис. 7.2 – Підключення ЕЕГ-апарату для дослідження біопотенціалів головного мозку [113].	62
Рис. 7.3 – Схема картування [119].	62
Рис. 7.4 – Фільтровані сигнали ЕЕГ, ЕОГ (електроокулограма) [119].	62
Рис. 7.5 – Результати екстракції з очищеної ЕЕГ характерних ритмів мозкової діяльності [119].	63
Рис. 7.6 – Кольорові карти активності мозку під час відпочинку [119].	64
Рис. 7.7 – Розподіл активності мозку по скальпу: топографічні карти альфа-ритму мозку під час відпочинку [119].	64
Рис. 7.8 – 2D-кольорові карти електричної активності мозку [120], [121].	65
Рис. 8.1 – Умовна архітектура PACS високого рівня (див. [124], стор. 10).	66
Рис. 8.2 – Зображення та гістограма розподілу пікселів по яскравості [126].	69
Рис. 8.3 – Рівні експозиції фотографії та відповідні гістограми [127].	69
Рис. 8.4 – Гістограма яскравості двовимірного зображення [127].	70
Рис. 8.5 – Ієрархія околів деякого пікселя.	70
Рис. 8.6 – Визначення контурів зображень: а) за методом Собеля [132]; б) сегментація КТ головного мозку [131].	71
Рис. 9.1 – Оцифрування суцільного зображення [134].	73
Рис. 9.2 – Шкала яскравості від чорного до білого кольору.	73
Рис. 9.3 – 8-бітна шкала сірого [136].	74
Рис. 9.4 – Довільне розташування кольорових пікселів.	74
Рис. 9.5 – Позначення для блоків результуючої матриці: а) для одного рівня; б) для 3-ох рівнів.	75
Рис. 9.6 – Приклад очищення від шумів фотографії за допомогою ВП [138].	76
Рис. 9.7 – Оригінальне та розархівоване після стискання томографічне зображення грудної клітини.	77
Рис. 9.8 – Дигітальна субтракційна та КТ ангіограми.	77
Рис. 9.9 – Маммограма з побудованою та збільшеною за допомогою CAD проблемною зоною інтересу.	78
Рис. 10.1 – Сигнал фізичного імпульсу зіткнення від сенсору – модель.	81
Рис. 10.2 – Резонансний сигнал сенсору (модель).	82
Рис. 10.3 – Фізичний імпульс зіткнення на фоні загального сигналу сенсору (модель).	82
Рис. 10.4 – Дискретизований сигнал: частота дискретизації 32 кГц.	84
Рис. 10.5 – Дискретизований сигнал: частота дискретизації 256 кГц.	84
Рис. 10.6 – Частотний спектр сигналу сенсора: частота дискретизації 256 кГц, інтервал 0.10 кГц.	86
Рис. 10.7 – Частотний спектр сигналу сенсора з Рис. 10.6 в діапазоні від 0 до 2 кГц.	86
Рис. 10.8 – Частотний спектр сигналу сенсора: частота дискретизації 32 кГц, інтервал 0.10 кГц.	88
Рис. 10.9 – Частотний спектр сигналу сенсора з Рис. 10.8 в діапазоні від 0 до 6 кГц.	88
Рис. 10.10 – Спектр аналогового сигналу (неперервного).	89
Рис. 10.11 – Спектр аналогового сигналу з Рис. 10.10 в діапазоні від 0 до 2.5 кГц.	89
Рис. 11.1 – Підготовка імпортування даних в Excel.	91
Рис. 11.2 – Діалогове вікно налагоджень для імпортування даних з txt-файлу в Excel.	92
Рис. 11.3 – Встановлення параметрів Excel для завантаження даних з txt-файлу.	92
Рис. 11.4 – Підготовка до імпортування даних з Excel у Maple 2021.	93
Рис. 11.5 – Діалогове вікно у Maple 2021 з обранням імені листа Excel-таблиці та діапазону комірок, що відповідають часу за індивідуальним завданням.	93
Рис. 11.6 – Вигляд таблиць із завантаженими даними та їх властивостями у Maple 2021 для: а), б) здорового пацієнта; в), г) хворого на нейропатію.	94
Рис. 11.7 – Часовий ряд спостережень: міограма здорової людини.	95
Рис. 11.8 – Розподіл густини ймовірності для ЕМГ здорової людини.	95
Рис. 11.9 – Графіки реального (Рис. 11.8) та нормального розподілів густини ймовірності даних міограми здорової людини.	96
Рис. 11.10 – Часовий ряд спостережень: міограма хворого на нейропатію.	96
Рис. 11.11 – Розподіл густини ймовірності для даних хворого на нейропатію.	96
Рис. 11.12 – Графіки реального (Рис. 11.11) та нормального розподілів густини ймовірності ЕМГ хворого на нейропатію.	97
Рис. 11.13 – Автокореляційна функція міограми здорової людини.	98
Рис. 11.14 – Фур'є-спектр міограми здорового пацієнта.	99
Рис. 11.15 – Фур'є-спектр (blue) та фільтрований спектр (orange) міограми здорового пацієнта.	100

Рис. 11.16 – Первинний сигнал з Рис. 11.7, попередньо зафарбований у сірий колір, та фільтрований сигнал (blue).	101
Рис. 11.17 – АФ фільтрованої міограми здорового пацієнта.	101
Рис. 11.18 – Густина ймовірності фільтрованого сигналу.	101
Рис. 11.19 – Розподіли густини ймовірностей даних ЕМГ здорової людини.	102
Рис. 11.20 – Автокореляційна функція міограми пацієнта хворого на нейропатію.	103
Рис. 11.21 – Фур'є-спектр міограми пацієнта з нейропатією.	104
Рис. 11.22 – Фур'є-спектр первинного сигналу (coral) та фільтрований спектр (azure) міограми пацієнта з нейропатією.	105
Рис. 11.23 – Первинний сигнал з Рис. 11.10, попередньо зафарбований у сірий колір, та фільтрований сигнал (RoyalBlue).	105
Рис. 11.24 – АФ фільтрованої міограми хворого на нейропатію.	106
Рис. 11.25 – Розподіл густини ймовірності фільтрованої ЕМГ хворого на нейропатію.	106
Рис. 11.26 – Розподіл ймовірності первинного сигналу, нормальний розподіл до нього, та фільтрованого сигналу за даними ЕМГ хворого на нейропатію.	107
Рис. 12.1 – Група плям на Сонці (у центрі). Світлина зроблена у видимому світлі космічним апаратом Hinode 13 грудня 2006 року [148].	109
Рис. 12.2 – Лінії магнітного поля сонячної плями, які пронизують поверхню Сонця [146].	109
Рис. 12.3 – Вигляд у Maple 2021 таблиці даних спостережень за кількістю сонячних плям (1700 р. – 2013 р.).	110
Рис. 12.4 – Дані сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р.	111
Рис. 12.5 – Дані сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р. Команда DynamicSystems[DiscretePlot]	111
Рис. 12.6 – Густина ймовірності розподілу чисел Вольфа.	112
Рис. 12.7 – Автокореляційна функція даних кількості сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р.	112
Рис. 12.8 – Частина автокореляційної функції даних спостережень з Рис. 12.7.	113
Рис. 12.9 – Трекер значень, підключений у контекстному меню графіка.	113
Рис. 12.10 – Дані сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р. Команда SignalProcessing[FindPeakPoints]	114
Рис. 12.11 – Дані сонячних плям за час спостережень з 1700 р. по 2013 р. Найменша припустима помітність <i>minimumprominence</i> = 25.	115
Рис. 12.12 – Фур'є-спектр масиву даних сонячних плям.	116
Рис. 12.13 – Фур'є-спектр початкового (Рис. 12.12) та фільтрованого масивів даних кількості сонячних плям (blue).	117
Рис. 12.14 – Фільтрований Фур'є-спектр даних спостережень сонячних плям з позначенням піків.	118
Рис. 13.1 – Схема електрична принципова пасивного НЧ-фільтру 1-го порядку (інтегруюче коло).	120
Рис. 13.2 – Схема електрична принципова простого RC-фільтру нижніх частот.	120
Рис. 13.3 – Графіки Бode для ФНЧ 1-го порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.	122
Рис. 13.4 – Діаграма Найквіста ФНЧ 1-го порядку.	122
Рис. 13.5 – Імпульсна перехідна функція (IRF) ФНЧ 1-го порядку.	123
Рис. 13.6 – Відгук ФНЧ 1-го порядку на імпульс δt	123
Рис. 13.7 – Відгук ФНЧ 1-го порядку на синусоїду з частотою в смузі пропускання: $\Omega_1 = 16\pi$	123
Рис. 13.8 – Відгук ФНЧ 1-го порядку на синусоїду з частотою поза смугою пропускання: $\Omega_2 = 32\pi$	123
Рис. 13.9 – Схема електрична принципова пасивного ВЧ-фільтру 1-го порядку.	124
Рис. 13.10 – Схема електрична принципова простого RC-фільтру верхніх частот.	124
Рис. 13.11 – Графіки Бode для ФВЧ 1-го порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.	125
Рис. 13.12 – Схема електрична принципова фільтру нижніх частот 2-го порядку.	125
Рис. 13.13 – Схема електрична принципова простого пасивного RLC-фільтру НЧ 2-го порядку.	125
Рис. 13.14 – Схема електрична принципова активного ФНЧ 2-го порядку на операційних підсилювачах.	126
Рис. 13.15 – Графіки Бode для ФНЧ 2-го порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.	127
Рис. 13.16 – Діаграма Найквіста фільтру нижніх частот 2-го порядку.	128
Рис. 13.17 – Імпульсна перехідна функція (IRF) ФНЧ 2-го порядку.	128
Рис. 13.18 – Відгук ФНЧ 2-го порядку на імпульс δt	128
Рис. 13.19 – Відгук ФНЧ 2-го порядку на синусоїду з частотою в смузі пропускання: $\Omega_1 = 16\pi$	129
Рис. 13.20 – Відгук ФНЧ 2-го порядку на синусоїду з частотою поза смугою пропускання: $\Omega_2 = 32\pi$	129
Рис. 13.21 – Лінії рівного підсилення та полюси передавальної функції ФНЧ 3-го порядку: а) 2D; б) 3D.	131
Рис. 13.22 – Полюси фільтра Баттерворта 3-го порядку.	133
Рис. 13.23 – Графіки Бode для ФНЧ Баттерворта 3-ого порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.	134
Рис. 13.24 – Імпульсна перехідна функція НЧ-фільтра Баттерворта 3-го порядку.	134
Рис. 13.25 – Відгук фільтра Баттерворта 3-го порядку на функцію Хевісайда.	134
Рис. 13.26 – Діаграма Найквіста фільтра НЧ Баттерворта 3-го порядку.	135

Рис. 13.27 – Полюси та лінії рівного підсилення передавальної функції ФНЧ Бесселя 3-го порядку: а) локалізація полюсів на комплексній площині; полюси та лінії рівного підсилення: б) у 2D-площині; в) у 3D.....	137
Рис. 13.28 – Графіки Боде для ФНЧ Бесселя 3-ого порядку: а) ЛАЧХ; б) ФЧХ.	138
Рис. 13.29 – Імпульсна перехідна функція (IRF) фільтра НЧ Бесселя 3-го порядку.	138
Рис. 13.30 – Відгук фільтра Бесселя 3-го порядку на функцію Хевісайда.	138
Рис. 13.31 – Діаграма Найквіста фільтра Бесселя 3-го порядку.	139
Рис. 14.1 – Ступенева функція Хевісайда.	142
Рис. 14.2 – Характеристика смугового фільтра.	142
Рис. 14.3 – FIR-коефіцієнти цифрового смугового фільтра.	143
Рис. 14.4 – Перехідна характеристика смугового фільтра, відгук на сходику Хевісайда.	143
Рис. 14.5 – АЧХ цифрового смугового фільтра.	144
Рис. 14.6 – ФЧХ цифрового смугового фільтра.	144
Рис. 14.7 – Синтезований вхідний сигнал $x(t)$ з шумом.	145
Рис. 14.8 – Фільтрований вихідний сигнал $y(t)$	145
Рис. 14.9 – Частотний спектр вхідного сигналу.	146
Рис. 14.10 – Частотний спектр вихідного сигналу.	146
Рис. 15.1 – Вейвлет Хаара: а) материнський; б) дочірні для різних масштабів.	148
Рис. 15.2 – Тонometr марки «Micrillife BP 3AG1».	149
Рис. 15.3 – Вигляд таблиць з даними вимірювань у Maple: а) СТ; б) ДТ; в) ЧП.	149
Рис. 15.4 – Часовий ряд первинних спостережень систолічного тиску.	150
Рис. 15.5 – Розподіл густини ймовірності СТ.	150
Рис. 15.6 – Фур'є-спектр набору даних СТ з позначенням піків.	152
Рис. 15.7 – Корелограма даних вимірювань систолічного АТ.	152
Рис. 15.8 – Абсолютні частоти даних систолічного АТ.	153
Рис. 15.9 – Часовий ряд первинних спостережень діастолічного тиску.	154
Рис. 15.10 – Розподіл густини ймовірності ДТ.	154
Рис. 15.11 – Абсолютні частоти даних діастолічного АТ.	155
Рис. 15.12 – Часовий ряд первинних спостережень частоти пульсу.	155
Рис. 15.13 – Розподіл густини ймовірності частоти пульсу.	155
Рис. 15.14 – Абсолютні частоти даних пульсу.	156
Рис. 15.15 – ВК Хаара: 1-й рівень апроксимації (СТ).	157
Рис. 15.16 – ВК Хаара: 1-й рівень деталізації (СТ).	157
Рис. 15.17 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу (систол. АТ).	158
Рис. 15.18 – ВК Хаара: 2-й рівень апроксимації (СТ).	159
Рис. 15.19 – ВК Хаара: 2-й рівень деталізації (СТ).	159
Рис. 15.20 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу (систол. АТ).	160
Рис. 15.21 – Первинний (з Рис. 15.4) та синтезований (очищений від шумів) сигнал систолічного АТ.	161
Рис. 15.22 – Розподіли ймовірності первинного та очищеного сигналів СТ.	161
Рис. 15.23 – Корелограма даних вимірювань СТ.	162
Рис. 15.24 – Фур'є-спектри первинного та очищеного від шумів даних СТ.	163
Рис. 15.25 – ВК Хаара: 1-й рівень деталізації (ДТ).	164
Рис. 15.26 – ВК Хаара: 1-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу (ДТ).	164
Рис. 15.27 – Первинний та синтезований сигнали для ДТ.	165
Рис. 15.28 – Розподіли густини ймовірності первинного та очищеного сигналів (ДТ).	166
Рис. 15.29 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації (ЧП).	166
Рис. 15.30 – Первинний та синтезований сигнали ЧП.	168
Рис. 15.31 – Розподіли густини ймовірності первинного та очищеного сигналів ЧП.	168
Рис. 15.32 – Позитивна кореляція між ДТ та ЧП (первинні дані).	170
Рис. 15.33 – Позитивна кореляція між ДТ та ЧП (очищені дані).	170
Рис. 16.1 – Оригінальне зображення з файлу Med_images.BMP із рентгенограмою голови.	174
Рис. 16.2 – Перегляд зображення за допомогою команди Preview.	174
Рис. 16.3 – Оригінальне (а) зображення та перетворене за допомогою ДВП (б).	175
Рис. 16.4 – Результати процесу згортки під час ДВП.	176
Рис. 16.5 – Результат виконання команди Scale зі збільшення зображення за методом: а) найближчого сусіда (nearest); б) Б-сплайнів (bspline).	177
Рис. 16.6 – Гістограма розподілу інтенсивності рентгенограми голови.	177
Рис. 16.7 – Застосування команди Complement до матриці зображення.	180
Рис. 16.8 – Застосування команди GetSubImage до матриці (16.1).	180
Рис. 16.9 – Результат застосування команди Threshold до img_H : а) оригінальне зображення img_H (16.1); б) метод below; в) метод above; г) метод both.	180
Рис. 16.10 – Трешолдінг (очищення від завад) за методом below зображення у матриці (16.1): а) оригінал; б) $\text{low} = 0.2$; в) $\text{low} = 1.2$; г) оригінал; д) $\text{high} = 0.2$; е) $\text{high} = 1.2$	181

Рис. 16.11 – Гістограма матриці <code>img_hg</code> (16.4) із рентгенограмою руки.....	182
Рис. 16.12 – Результат застосування команди FitIntensity до матриці зображення <code>img_hg</code> (16.4) із рентгенограмою руки: а) оригінальне зображення; б) після sqrt інтенсивностей всіх пікселів.	182
Рис. 16.13 – Гістограми оригінального та нормалізованого (sqrt) зображень з Рис. 16.12.	183
Рис. 16.14 – Гістограми оригінального та нормалізованого (exp) зображень з Рис. 16.12.....	183
Рис. 16.15 – Результат застосування команди FitIntensity до матриці <code>img_hg</code> (16.4): а) оригінал; б) після оператору exp	183
Рис. 16.16 – Схема конволюції одновимірного сигналу [172].	184
Рис. 16.17 – Схема конволюції двовимірного сигналу [173].	184
Рис. 16.18 – Конволюційна маска контрастування та збільшення чіткості зображення: а) оригінальне зображення <code>img_H</code> ; б) результат застосування.	184
Рис. 16.19 – Конволюційна маска розмиття (<code>blur</code>) зображення: а) оригінальне зображення <code>img_H</code> ; б) результат застосування.....	185
Рис. 16.20 – Конволюційна маска виокремлення контурів зображення: а) оригінальне зображення <code>img_H</code> ; б) результат застосування.	185
Рис. 16.21 – Конволюційна маска рельєфу зображення: а) оригінальне зображення <code>img_H</code> ; б) результат застосування.	186
Рис. 17.1 – Одновимірне вейвлет-перетворення CDF(2,2), застосоване до рядків і стовпців еталонного зображення <i>lena</i> з відображенням на межах [174]: а) <i>lena</i> , $N = 512$, $depth = 8$; б) зображення, перетворене одновимірними вейвлетами CDF(2, 2) по рядках; в) низькочастотний L , ar , l та високочастотний H , dr , k блоки вейвлет-коефіцієнтів.	187
Рис. 17.2 – Одновимірне вейвлет-перетворення CDF(2,2), застосоване до рядків еталонного зображення <i>lena</i> з відображенням на межах [174]: а) результат декомпозиції по рядках та стовпцях; б) частотні блоки ВК; в) скоректований набір всіх ВК.	187
Рис. 17.3 – Мультирівнева схема ВП [174]: а) дворівнева вейвлет-декомпозиція; б) триврівнева декомпозиція; в) чотири рівні розкладання та відповідні блоки коефіцієнтів.	188
Рис. 17.4 – Скорочене до 224 пікселів і трансформоване у градації сірого зображення рентгенограми голови.....	191
Рис. 17.5 – Батьківські вейвлети Добеші-16, використані в аналізі.....	192
Рис. 17.6 – Дворівневе очищення (декомпозиція 2-го рівня) зображення.	193
Рис. 17.7 – Оригінальне зображення з Рис. 17.4 (а) та очищене і відновлене (б).....	193
Рис. 17.8 – Візуальний образ «помилкових пікселів» відновленого зображення.....	194
Рис. 18.1 – Загальний вигляд найбільш популярних електретних конденсаторних мікрофонів [185].....	196
Рис. 18.2 – Спрощена схема функціонування вбудованого електретного мікрофону [185].....	196
Рис. 18.3 – Додання мікрофону в документ Maple: а) кнопка мікрофону на панелі «Components»; б) вікно налагодження параметрів мікрофону.....	198
Рис. 18.4 – Аудіограма запису.....	199
Рис. 18.5 – Частина запису із промовлянням фрази.	200
Рис. 18.6 – Форма аудіограми, зручна для визначення інтервалів звучання літер.	200
Рис. 18.7 – Інтервал з 0.98 по 1.35 с на початку промовляння фрази.	200
Рис. 18.8 – Інтервал з Рис. 18.7 у вигляді аудіограми.	200
Рис. 18.9 – Суб'єктивні границі інтервалів літер у записі 8 кГц.....	203
Рис. 18.10 – Аудіосигнал 16 кГц у вигляді аудіограми.....	204
Рис. 18.11 – Спектрограма (а) та графік первинного сигналу (б).	205
Рис. 18.12 – Періодограма первинного аудіо-сигналу 8 кГц.....	205
Рис. 18.13 – Спектр потужності первинного аудіо-сигналу, побудований за допомогою: а) ШПФ; б) вбудованої команди Periodogram з опцією <i>powerscale="absolute"</i>	206
Рис. 18.14 – Спектрограма (а) та графік (б) очищеного аудіосигналу 8 кГц після застосування фільтру Баттерворта нижніх частот.	207
Рис. 18.15 – Періодограма (а) первинного та (б) очищеного lowpass-фільтром Баттерворта аудіо-сигналу 8 кГц.....	208
Рис. 18.16 – Аудіограма аудіо-сигналу обробленого lowpass-фільтром Баттерворта.....	209
Рис. 18.17 – Аудіограма сигналу, обробленого highpass-фільтром Баттерворта.....	209
Рис. 18.18 – Первинні дані: а) часове представлення; б) за номерами семплів.	209
Рис. 18.19 – Ряд первинних спостережень на початку промовляння фрази.	210
Рис. 18.20 – Ряд первинних спостережень наприкінці промовляння фрази.	210
Рис. 18.21 – Інтервал даних об'ємом $2^{13}=8192$ починаючи з 107005.....	211
Рис. 18.22 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: а) 1-й рівень апроксимації; б) 1-й рівень деталізації.	212
Рис. 18.23 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 1-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу.....	213
Рис. 18.24 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: а) 2-й рівень апроксимації; б) 2-й рівень деталізації.	214
Рис. 18.25 – Вейвлет-коефіцієнти Хаара: 2-й рівень деталізації після м'якого трешолдінгу.....	215

Рис. 18.26 – Первинний (сірий) та синтезований (помаранчевий) сигнали.	215
Рис. 18.27 – Аудіограма синтезованого після очищення аудіо-сигналу.	216

ПЕРЕЛІК ТАБЛИЦЬ

Табл. 1.1 – Параметри моделі АМ-хвилі.....	20
Табл. 2.1 – Події та їхні результати у грі в кістки.....	23
Табл. 2.2 – Результати 10-ти дослідів з підкидання кубика.....	24
Табл. 2.3 – Статистичні характеристики чотирьох різних вибірок.....	25
Табл. 2.4 – Статистичні характеристики електроміограми Рис. 2.4.....	29
Табл. 4.1 – Деякі функції-оригінали та їх Лаплас-зображення.....	43
Табл. 7.1 – Частотні діапазони основних мозкових ритмів.....	63
Табл. 9.1 – Характерні параметри матричних зображень.....	74
Табл. 9.2 – Глибина пікселів (біт) для різних медичних зображень.....	76
Табл. 10.1 – Вхідні значення краш-тесту.....	80
Табл. 10.2 – Вхідні значення змодельованого сигналу.....	81
Табл. 10.3 – Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 1.....	90
Табл. 11.1 – Частоти коливань АФ (Рис. 11.13) та відповідні їм максимуми Фур'є-спектру міограми здорового пацієнта (Рис. 11.14).....	100
Табл. 11.2 – Основні статистичні показники сигналів міограм.....	106
Табл. 11.3 – Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 2.....	108
Табл. 12.1 – Результати визначення періоду Швабе за 4-ма методами.....	118
Табл. 12.2 – Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 3.....	119
Табл. 13.1 – Загальні властивості аналогових фільтрів 2-го порядку.....	129
Табл. 13.2 – Графіки основних характеристик ФНЧ 3-го порядку.....	139
Табл. 13.3 – Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 4.....	140
Табл. 14.1 – Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 5.....	147
Табл. 15.1 – Технічні характеристики тонометру «Micrilife BP 3AG1».....	149
Табл. 15.2 – Кореляції пар наборів даних СД, ДТ та ЧП.....	169
Табл. 15.3 – Індивідуальні завдання за варіантами до Практики 6.....	172
Табл. 16.1 – Деякі команди пакету ImageTools	173
Табл. 16.2 – Деякі команди управління кольорами пакету ImageTools	178
Табл. 17.1 – Максимальний відсоток нулів для трешолдінгу матриці ВК.....	191
Табл. 18.1 – Часові інтервали звучання літер.....	200
Табл. 18.2 – Номера значень відповідних країв інтервалів звучання літер.....	202

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

C

CAD–технологія, 78
Семпл (зразок), 196

D

DICOM, 66, 67, 77
робоча діагностична станція, 67

F

FIR-filter. *див.* Фільтри:KIX-фільтр
FIR-коефіцієнти. *див.* Фільтри:KIX-фільтр

I

IIR-filter. *див.* Фільтри:БІХ-фільтр

J

JPEG, 77
JPEG2000, 77

M

Maple (команди)
%, 150
[], 94
`if`, 158
<<...>|<...>, 99
abs, 85, 131
argument, 144
array, 142, 143
Array, 111, 158, 161, 175
attributes, 199
AudioTools, 197

- Create, 208
- Duration, 201
- Extract, 199
- Preview, 198
- Record, 197, 198
- Write, 198

AutoCorrelation. *див.* Statistics
ColorTools

- Color, 175, 202, 209
- ToRGB24, 209

convert, 85, 99

- datatype, 94
 - float[8], 94

count0, 192
DiscreteTransforms, 84

- FourierTransform, 85
- WaveletCoefficients, 191
- WaveletPlot, 191
 - Daubechies, 191

DocumentTools, 148, 173, 197

- GetProperty, 198
- InsertContent, 175

- SetProperty, 198

DocumentTools[Layout], 173

- Cell, 175
- Row, 175
- Table, 175
 - exterior, 175
 - interior, 175
 - width, 175
- Worksheet, 175

DocumentTools[Tabulate], 174
DynamicSystems

- BodePlot, 121, 124, 127
 - colorscheme, 134, 137
- DiscretePlot, 111
- ImpulseResponsePlot, 122, 128
- NyquistPlot, 122, 128
 - 'colorscheme', 135
 - scaling, 135
- PrintSystem, 121, 124, 127, 132
- ResponsePlot, 122, 123, 128
 - duration, 122
- Step, 138
- TransferFunction, 121, 124, 127, 132
- ZeroPoleGain, 133

evalc, 131
evalf, 83, 103, 116, 141
factor, 130
FileTools

- Size, 199

float[8], 94, 149
floor, 191, 205
for, 142, 143, 144, 145
Heaviside, 100, 104, 142
if, 144
ImageTools, 173

- Clip, 179
- Complement, 179
- Convolution, 184
- Draw, 173
- DWT2D, 174
- Embed, 174
 - 'exterior', 174
 - titleposition, 174
- Entropy, 178, 194
- FitIntensity, 181
- Flip, 180
- GetSubImage, 180, 190
- Image, 173
- Intensity, 178
- PlotHistogram, 177
- Preview, 174, 177
- Quality, 178, 193
- Read, 173
- Scale, 180
- Threshold, 180
- ToGrayscale, 180, 190
- View, 174

interface, 80, 91

- displayprecision, 80
- rtablesize, 80
- KernelDensityPlot, 95
- lhs, 95, 99
- limit, 142
- LinearAlgebra
 - Dimensions, 194
 - SubVector, 94
- Linearsample, 83
- LineChart. *див.* Statistics
- log[](), 98
- log10, 86, 131
- map, 100, 104, 158
- Matrix, 184
- max, 85
- MicrophoneComponent, 197
- min, 158
- \n, 86
- nops, 83
- numelems, 94, 98, 150
- plot, 81, 87, 94
 - 'axesfont', 91
 - 'font', 91
 - 'labelfont', 91
 - axes, 80
 - caption, 81
 - typeset, 83, 95
 - color, 81
 - colorscheme, 134, 137, 152
 - filled, 142
 - gridlines, 80
 - labeldirections, 80
 - labels, 81
 - typeset, 99
 - legend, 96
 - typeset, 96
 - legendstyle, 96
 - linestyle, 94, 99
 - numpoints, 82
 - scaling, 135
 - size, 81
 - style, 86
 - symbol, 94
 - symbolsize, 94
 - thickness, 81
 - tickmarks, 81, 94
 - view, 81, 83, 142
- plots, 91
 - arrow, 135
 - complexplot, 133
 - contourplot, 131, 137
 - coloring, 131, 137
 - contours, 131, 137
 - filledregions, 131, 137
 - transparency, 131, 137
 - contourplot3d, 131, 137
 - coloring, 131, 137
 - light, 131, 137
 - orientation, 131, 137
 - display, 83, 94
 - transparency, 135
 - listplot, 83, 99, 112, 149
 - pointplot, 101, 206
 - connect, 101
 - textplot, 135, 152, 202
 - #mover(mo(...)), 135
 - 'infinity', 135
- plottools
 - sector, 135
- POLYGONS, 202
- proc, 82, 189, 192
 - description, 82
 - end proc, 82
- product, 132
- rand(), 144
- restart, 80
- rhs, 95, 97, 103
- round, 144
- seq, 83, 85, 98, 111, 116, 143, 145
- Settings, 80
 - typesetdot, 80
 - typesetprime, 80
- sign, 158
- SignalProcessing, 197
 - AutoCorrelation, 101
 - ColumnGraph, 101
 - DFT, 204
 - DWT, 157, 158, 204
 - DWT2D, 175
 - FFT, 98, 115, 143, 145, 150, 162, 204
 - FindPeakPoints, 114, 115, 118, 151
 - [peaks], 114, 118
 - connect, 114
 - curveplotoptions, 114
 - includeendpoints, 114, 151
 - output, 114, 151
 - peakpointplotoptions, 114
 - plotincludepoints, 114
 - valleypointplotoptions, 114
 - FIR, 204
 - GenerateButterworthTaps, 206, 207
 - IIR, 204
 - InfiniteImpulseResponseFilter, 207
 - InverseDWT, 160
 - InverseFFT, 100, 105
 - KernelDensityPlot, 102
 - LineChart, 105
 - Magnitude, 100, 116
 - Mean, 115
 - Periodogram, 205, 206
 - PowerSpectrum, 205
 - Spectrogram, 204, 207
 - colorscheme, 204
 - includesignal, 204
- SignalProcessing[Engine], 91, 109, 148, 197
- simplify, 127
- solve, 127
- sort, 151
- Spread, 91
- Statistics, 91
 - AutoCorrelation, 97, 102, 112
 - ColumnGraph, 97, 102, 157
 - distance, 157
 - style, 157

- width, 157
- Correlation, 162, 166, 169, 194
- Correlogram, 152, 162
- colorscheme, 152
- DataSummary, 94, 96, 98, 111, 150
- Fit, 170
- Histogram, 153
- KernelDensityPlot, 95, 111, 150, 165
- LineChart, 94, 96, 100
- Mean, 113, 115
- Mode, 153
- MovingAverage, 169
- MovingMedian, 169
- Percentile, 192
- Sample, 95, 97
- ScatterPlot, 169, 170
- Tally, 152, 153
- Variance, 113, 115
- subs, 131
- sum, 144
- textplot, 99, 102
 - ‘align’, 99
- time(), 85, 95
- trunc, 201, 210
- typeset. *див. опціональне використання*
- Typesetting, 80
 - Settings, 80
- unapply, 80, 82, 121, 136
- Units
 - Unit, 118
 - ‘Hz’, 144
 - ‘s’, 118, 144
 - ‘yr’, 118
- value, 136
- Vector, 85, 111, 151
- Vector[row], 94
- whattype, 94, 143
- with(), 80, 91

P

PACS, 66, 67
архітектура, 66

S

SNR, 194

A

Автокореляційна функція (АФ), 31, 69, 98, 99, 112, 113
корелограма, 31, 58, 98, 101, 103, 105, 112, 152, 162
нормована, 97, 102
стаціонарних процесів, 31

- абсолютне значення, 31

Автокореляція, 31

Амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ), 44
в полярних координатах, 44
комплексна функція, 44

- аргумент, 45

- модуль, 45

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ), 45, 99, 120, 143

Аналіз
автокореляційний, 23
кореляційний, 30
процесів

- автоматичний, 23

Аналого-цифровий перетворювач (АЦП), 17, 50, 51, 60, 82, 196

Артефакти, 61, 88, 89

Архівування, 76

Асиметрія. *див. Коефіцієнт асиметрії*

Аудіограма, 198, 199

Б

Бел, 45

Біологічна інженерія, 13

Біомедицина, 13

Біомедична інженерія, 13

Біомедичне зображення, 60
аналогове, 60
цифрове, 60

Біт, 12, 19, 196

В

Варіабельність, 33

Вейвлет, 17, 37, 54, 100
аналіз, 54, 57, 157, 204
базис, 55
батьківський, 55
дочірній, 54
коефіцієнти, 55
коефіцієнти апроксимації, 55, 56, 74, 148, 158, 189, 211
коефіцієнти деталізації, 55, 56, 75, 148, 157, 163, 212, 213
масштабований, 37
материнський, 37, 54, 55, 74
перенесений, 37
перетворення, 37, 54

- двовимірне, 73, 187
- дискретне, 55, 174, 189
- зворотне, 54, 56, 75, 160, 189, 193
- зображень, 73
- неперервне, 55
- одновимірне, 73
- пряме, 158, 189, 211

скейлінг-функція, 55

Хаара, 54, 74, 148, 211

Вейвлети
коефіцієнти апроксимації, 187
коефіцієнти деталізації, 187

Вибірка, 23

Випадкова величина
дискретна, 23
значення, 23

Випадкова подія, 23

Відгук (реакція), 122, 128, 129, 134

КІХ-фільтр, 144

НЧ-фільтру, 123

Відновлення (синтез). *див.* Сигнал: відновлення (синтез)

Г

Гармоніка, 38, 39, 145, 197
Гістограма, 34, 153, 155, 156
нормована, 25
розподілу інтенсивності, 177
Годограф. *див.* Діаграма Найквіста
Графіки Боді, 45, 122, 124
фільтру Баттерворта, 134
фільтру Бесселя
▪ 3-го порядку, 137
Густина ймовірності, 26, 102

Д

Дані, 11
Декомпозиція, 98, 187
Децимація, 55, 158
Динамічна система, 43
з зосередженими параметрами, 43
оператор, 43
Дискретизація, 17
крок, 18, 19
семпсування, 19
частота, 16, 18, 19, 39, 80, 82, 84, 196, 207
Дискретне вейвлет-перетворення. *див.* Вейвлет:
перетворення: дискретне
Дисперсія, 26, 69, 96, 97, 106, 161
Діагностика
лабораторна, 15
структурна, 15
функціональна, 15
Діаграма Найквіста, 44, 45, 122, 128
фільтру Баттерворта, 135
фільтру Бесселя, 138
Діаграма розсіювання. *див.* Методи: точкова
діаграма
Діраківський імпульс. *див.* Функція Дірака
Добротність, 125, 127, 128
Дослід, 23

Е

Екстрагування, 76
Експес. *див.* Коефіцієнт експесу
Електроенцефалографія, 62
Електроміографія, 15, 91
електроміограма, 23, 28

З

Завада. *див.* Шум
Звук
цифровий запис, 196
Згортка, 21, 31, 42, 176, 183
Зображення, 11
аналіз, 77
архівування, 76
біомедичне. *див.* Біомедичне зображення
відновлення (синтез), 189
гістограма розподілу інтенсивності, 177

екстрагування, 76
енергія, 68, 188
ентропія, 188, 194
корекція, 77
кореляція, 194
спектр, 68
спектральна інтенсивність, 68
стискання, 76, 190

І

Імпеданс, 121
Імпульс, 122
Імпульсна перехідна функція, 43, 122
безкінечна, 51, 206
кінцева, 51, 141
НЧ-фільтру, 128
фільтр Бесселя, 138
цифрового фільтру, 51
Імпульсна перехідна характеристика. *див.*
Імпульсна перехідна функція
Імпульсна характеристика. *див.* Імпульсна
перехідна функція
Інформація, 11
дискретному вигляді, 11, 15
неперервному вигляді, 11, 15
об'єктивна, 15
суб'єктивна, 16

Й

Ймовірність, 24

К

Картування, 62
Каскад фільтрів. *див.* Фільтри: каскад
Квантиль, 191
Квантування
рівень, 19
розрядність, 19
Квартиль, 191
КІХ-фільтр. *див.* Фільтри: КІХ-фільтр
Ковзна маска, 71
Коефіцієнт
SNR, 61
автокореляції, 97
асиметрії, 27, 95, 96, 111, 154, 156, 166, 168
▪ нормального розподілу, 28
експесу, 28, 29, 95, 96, 111, 154, 156, 212
Коефіцієнт підсилення. *див.* Амплітудно-частотна
характеристика (АЧХ)
Коефіцієнти апроксимації. *див.* Вейвлет:
коефіцієнти апроксимації
Коефіцієнти деталізації. *див.* Вейвлет: коефіцієнти
деталізації
Коефіцієнти фільтру, 51
Комплексна змінна, 42, 44, 121, 126, 130, 132, 137
Конволюційна маска, 184
виокремлення контурів, 185
контрастування, 184
рельєфу, 185
розмиття, 184
Конволюція, 183

Корелограма. *див.* Автокореляційна функція (АФ)
 Кореляція, 30, 166, 168, 169, 170, 171
 взаємна, 71
 зображень, 194
 коефіцієнт, 30, 31, 162, 168
 лінійна, 30
 Короткий імпульс. *див.* Функція Дірака
 Котельников В. О., 20
 Крос-кореляція, 32

Л

Лаг, 31, 32, 68
 Лаплас-
 зображення, 42, 43
 образ, 121
 Лінійна регресія, 170
 Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ), 45, 122
 Логарифмічний коефіцієнт підсилення. *див.*
 Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)

М

Математичне сподівання, 25, 29, 68, 95, 97, 150
 неперервної величини, 27
 Меандр, 141, 144
 Медіана, 150, 191
 Методи
 Б-сплайн, 177
 геометричний, 34
 гістограм розподілу спектральних коефіцієнтів, 69
 ковзного (рухливого) медіанного, 169
 ковзного (рухливого) середнього, 29, 169
 кодування інформації, 17
 медичних досліджень, 15
 ▪ інструментальні, 15
 ▪ лабораторні, 15
 найближчого сусіда, 177
 обробки інформації, 15
 обробки сигналів
 ▪ у часовій області, 16
 ▪ у частотній області, 36
 розпізнавання медичних зображень, 71
 точкова діаграма, 169
 фільтрації
 ▪ зображення, 71
 Мода, 28, 33, 58, 150, 153, 155

Н

Найквіст Гаррі, 20
 Нейро-комп'ютерний інтерфейс, 62

О

Обробка сигналів
 адаптивна фільтрація, 17
 біомедичних, 16
 високошвидкісна, 17
 лінійна фільтрація, 17
 нелінійна, 17

спектральний аналіз. *див.* Спектральний аналіз
 цифрова, 16, 21
 ▪ переваги, 48
 ▪ проблема, 48
 ▪ способи, 21
 частотно-часовий аналіз, 17
 Одиначна сходинка. *див.* Функція Хевісайда
 Оператор Лапласа, 42
 Операційний підсилювач, 49, 126
 Основне рівняння аналізу систем, 43

П

Передавальна функція, 43, 49, 50
 властивості, 44
 комплексна, 121
 ▪ RLC-фільтру, 126
 ▪ ВЧ-фільтру, 124
 ▪ нормована, 121, 124
 ▪ НЧ-фільтру, 122
 нулі, 44
 полюси, 44, 126, 129, 131
 стаціонарна, 44
 фільтру Баттерворта, 132
 характеристичні поліноми, 46
 Перетворення
 Лапласа, 42, 43, 44
 Фур'є, 16, 36, 38, 42, 44, 54, 150
 ▪ двовимірне, 68
 ▪ дискретне, 39, 85, 87
 – двовимірне, 69
 – обернене, 39
 – пряме, 39
 ▪ зворотне, 100, 105
 ▪ неперервне, 38
 ▪ обернене, 38
 ▪ пряме, 143
 ▪ розкладання, 38
 ▪ спектр, 38
 ▪ швидке, 39, 145, 205
 – алгоритм, 40
 – дискретне, 98, 103, 115, 116
 Перехідна характеристика. *див.* Фільтри: перехідна характеристика
 Перешкода. *див.* Шум
 Періодограма, 205, 206, 207
 Перцентиль, 191
 Піксель, 73
 глибина, 76
 яскравість, 74
 Поліноми
 Баттерворта, 132
 Бесселя, 136
 Порядок фільтру. *див.* Фільтр: порядок
 Процентиль, 191

Р

Резонансна частота, 126
 Ритми мозкової діяльності, 63
 Розкладання Фур'є, 38
 Розпізнавання, 37
 Розподіл

густини ймовірності, 29, 95, 102, 106, 150, 154, 161
 ймовірності, 26
 нормальний (Гауса), 27, 95, 96, 102, 107, 150
 частотний, 24
 ▪ відносний, 25

С

Сегментація, 71
 Семпл, 210
 Середнє, 25
 Середнє квадратичне відхилення, 25, 26, 95
 Сигнал, 12
 Сигнали
 аналоговий, 17, 82, 84, 89
 багатовимірні, 13
 біологічні, 14
 біомедичні, 14, 15
 відновлення (синтез), 20, 160, 161, 165, 196, 214
 дискретизація, 16, 17, 82, 83, 89
 дискретний, 16, 17, 19, 20, 39, 49, 56, 74, 82, 143, 148, 183
 зображення, 11
 квантування, 16, 17
 модульований, 81
 неперервний, 11, 16, 17, 19, 39, 49, 55, 81, 82, 88
 одновимірні, 13
 типи сигналів, 12
 цифровий, 16, 19, 84
 Символ Кронекера, 55
 Скаттерограма, 34
 Скейлінг-функція. *див.* Вейвлет: батьківський
 Смоуга
 затримки, 49
 прозорості, 146
 пропускання, 37, 45, 49, 122, 123, 126, 129, 145
 Сонячні
 активність, 109
 плями, 109
 цикли, 109
 Спектр, 36, 98
 дискретний, 39, 71
 зображення, 68
 ▪ амплітуда, 68
 ▪ фаза, 68
 потужності, 206
 сигналу
 ▪ частотний, 86
 Фур'є. *див.* Фур'є-спектр
 Спектральна інтенсивність. *див.* Зображення
 Спектральна складова, 38
 Спектральний аналіз, 17, 21, 36, 63, 71, 84, 88, 118, 150, 162, 205
 класифікація методів, 36
 Спектрограма, 204, 207
 Стандартне відхилення, 25, 26, 29, 95, 150, 212
 дискретної величини, 26
 неперервної величини, 27
 Статистичний аналіз, 71
 Стискання, 38
 зображень, 76
 Сходінка Хевісайда. *див.* Функція Хевісайда

Т

Теорема Котельникова, 19
 Тиск
 артеріальний (АТ), 56
 діастолічний (ДТ), 30, 163
 сistolічний (СТ), 56
 Тон, 197
 Точкова діаграма. *див.* Методи: точкова діаграма
 Тренд, 30
 Трешолдінг, 57, 98, 100, 104, 117, 158, 164, 167, 190, 192, 212

У

Універсальний шумовий поріг, 57, 98, 103, 117, 158, 159, 164, 166, 167, 212

Ф

Фазово-частотна характеристика (ФЧХ), 45, 122, 143
 Факторизація, 130, 131
 Фільтрація, 16, 21
 зображень, 70
 ▪ в просторовій області, 70
 ▪ в частотній області, 71
 методи, 71
 цифрова, 48
 ▪ програмна, 49
 частотна, 48
 Фільтри, 50, 120
 high-pass, 49
 LC, 50
 low-pass, 49
 RC, 50, 127
 RLC, 126
 активний, 49, 120
 ▪ нижніх частот, 126
 аналоговий, 49, 50, 141
 ▪ 2-го порядку, 129
 ▪ другого порядку, 120
 ▪ ідеальний, 50
 ▪ інтегруюче RC-коло, 120
 ▪ першого порядку, 120
 типи, 50
 антикаузальний, 52
 Баттерворта, 50, 130, 132, 139, 206, 207, 208
 Бесселя, 45, 136, 139
 БІХ-фільтр, 51, 52
 ▪ реальний, 52
 верхніх частот, 49, 86, 120, 123, 148
 види, 49
 вищого порядку, 130
 дуальність, 120
 еліптичний, 50
 загороджуючий. *див.* режекторний
 каскад, 130, 141
 КІХ-фільтр, 51, 52, 141
 ▪ коефіцієнти перетворення, 142
 ▪ рівняння фільтрації, 52
 нижніх частот, 49, 52, 120, 148
 ▪ 1-го порядку, 129
 ▪ 2-го порядку, 129

- 3-го порядку, 130
- нормований, 121
- пасивний, 49, 120
 - 2-го порядку, 125
- перехідна характеристика, 143
- режекторний, 49, 131
- рекурсивний, 52
 - рівняння фільтрації, 52
- смуговий, 49, 54, 141
- топологія
 - Кауера, 120
 - Саллена-Кі, 120
- цифровий, 51
 - довжина, 55
 - **порядок**, 52, 141
 - проектування, 52, 131
- частотний, 49
- Чебишева
 - 1-го роду, 50
 - 2-го роду, 50
- Функція
 - Дірака, 43, 138, 140
 - Хевісайда, 43, 128, 134, 141, 143
- Функція імпульсного відгуку. *див.* Імпульсна
- перехідна функція
- Функція розподілу, 26
 - дискретної величини, 26
 - неперервної величини, 27
- Функція-образ, 42
- Фур'є-
 - аналіз, 36, 54
 - образ, 37, 39, 54, 103, 116, 150, 151, 162, 163

спектр, 38, 39, 85, 87, 100, 104
 Фур'є *Жан Батист Жозеф*, 38

Х

Хаар *Альфред*, 54, 148
 Характеристична частота. *див.* Частота обрізання

Ц

Цикл Швабе, 39, 116

Ч

Частота дискретизації. *див.* Дискретизація: частота
 Частота Найквіста. *див.* Теорема Котельникова
 Частота обрізання, 121, 122, 124, 126
 КІХ-фільтр, 144
 Частота пульсу (ЧП), 30
 Частотний спектр, 37

Ш

Шкала Хаунсфілда, 73
 Шум, 48, 49, 70, 144, 146, 196
 Шуми квантування, 52

Я

Яскравість, 68, 73
 глибина, 73
 розподіл, 68

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Геннадій Петрович ЧУЙКО
Ольга Василівна ДВОРНИК
Євген Сергійович ДАРНАПУК
Ангела Петрівна БОЙКО

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ З ПРАКТИКУМОМ В MAPLE 2021

Навчальний посібник

Редактор *О. Михайлова*
Комп'ютерна верстка, дизайн обкладинки *К. Гросу-Грабарчук*
Друк *С. Волинець*. Фальцювально-палітурні роботи *О. Мішалкіна*.

Підп. до друку 01.10.2024
Формат 60х84^{1/8}. Папір офсет.
Гарнітура «Times New Roman». Друк ризограф.
Ум. друк. арк. 29,2. Обл.-вид. арк. 14.
Тираж 100 пр. Зам. № 6859.

Видавець і виготовлювач: ЧНУ ім. Петра Могили.
54003, м. Миколаїв, вул. 68 Десантників, 10.
Тел.: 8 (0512) 50–03–32, 8 (0512) 76–55–81, e-mail: rector@chmnu.edu.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6124 від 05.04.2020.