

Міністерство освіти і науки України
Чорноморський національний університет імені Петра Могили

*О. В. Щесюк, О. Ф. Прищепов,
Д. А. Лісков, В.М. Шенкевич*

**Прикладна механіка та основи
конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)**

Методичні вказівки

Випуск 408



Миколаїв – 2023

УДК 531.8
Щ 69

*Рекомендовано до друку вченою радою
Чорноморського національного університету імені
Петра Могили (протокол № 15 від 24.12.2020 р.)*

Рецензенти:

Ткач М. Р., доктор технічних наук, професор;

Щ 69

Щесюк О. В. Прикладна механіка та основи конструювання (розділ «Опір матеріалів») : методичні вказівки / О. В. Щесюк, О. Ф. Прищепов, Д. А. Лісков., В. М. Шенкевич. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2023. – 68 с. (Методична серія ; вип. 408).

Методичні вказівки розроблено відповідно до робочої програми дисципліни «Прикладна механіка та основи конструювання» спеціальності 151 «Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології» і призначено для практичних занять та самостійної роботи студентів. Наведено типові задачі з розділу «Опір матеріалів», викладені методика і приклади їх розв'язання. Матеріали можуть бути корисними студентам інших технічних спеціальностей.

УДК 531.8

© Щесюк О. В., Прищепов О. Ф.,
Лісков Д. А., Шенкевич В. М. 2023

ISSN 1811-492X

© ЧНУ ім. Петра Могили, 2023

Зміст

Вступ.....	
1. Загальні вказівки щодо виконання самостійних завдань	
1.1. Вказівки до вибору завдання	
1.2. Вказівки до виконання звіту	
2. Задача № 1. Розтягання-стискання металевих стержнів постійного перерізу	
2.1. Завдання до задачі № 1	
2.2. Приклад виконання завдання.....	
3. Задача № 2. Розтягання-стискання металевих стержнів змінного перерізу.....	
3.1. Завдання до задачі № 2.....	
3.2. Приклад виконання завдання.....	
4. Задача № 3. Кручення стержнів постійного перерізу.....	
4.1. Завдання до задачі № 3.....	
4.2. Приклад виконання завдання.....	
5. задача № 4. Кручення стержнів змінного перерізу.....	
5.1. Завдання до задачі № 4.....	
5.2. Приклад виконання завдання.....	
6. Задача № 5. Поперечне згинання металевих балок	
6.1. Завдання до задачі № 5.....	
6.2. Приклад виконання завдання – консольна балка.....	
6.3. Приклад виконання завдання – шарнірно-оперта балка	
7. ЗАДАЧА № 6. СУМІСНА ДІЯ ЗГИНУ З КРУЧЕННЯМ.....	
7.1. Завдання до задачі № 6.....	
7.2. Приклад виконання завдання.....	
8. Задача № 7. Стійкість центральностиснених стержнів	
8.1 Завдання до задачі № 7.....	
8.2 Приклад виконання завдання	
Список використаної літератури.....	
Додаток А. Коефіцієнти зменшення основного допустимого значення	

Вступ

Розробляючи конструкції та машини, інженер повинен вибрати матеріал та виконати поперечні вимірювання для кожного елемента конструкції, щоб він надійно протистояв зусиллям, не ризикуючи зламати або деформувати його форму, щоб забезпечити нормальну роботу цього елемента. Правильним рішенням цієї проблеми є надання інженеру знань про опір.

Матеріальний опір – це наука про міцність, твердість та довговічність окремих конструктивних елементів (конструкцій та машин). Фахівці різних галузей технічної підготовки повинні володіти простими техніками розрахунків і мати чітке уявлення про положення стопки. Методи опору матеріалу дозволяють складним системним системам розрахунку вирішувати проблеми потужності простих елементів.

Опір матеріалів – це також наука про інженерні методи обчислення, особливість яких полягає у тому, що вирішення задач передбачає рівень абстракції та простоти, щоб інженери-практики могли вирішувати задачі, використовуючи математичні засоби.

Таким чином, опір матеріалу є загальною наукою про міцність і надійність конструкцій та їх елементів. Під час вирішення основної задачі опору матеріалу – вибору матеріалу та поперечних розмірів для елементів будівель та машин, крім уміння обчислювати, потрібні знання механічних властивостей реальних матеріалів. Важливо, щоб студенти самостійно отримували практичні навички у вирішенні задач, що посилять їх теоретичні знання курсу.

Методичні вказівки розроблено відповідно до робочої програми дисципліни «Прикладна механіка та основи конструювання» спеціальності 151 «Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології» і призначено для практичних занять та самостійної роботи студентів. Наведено типові задачі з розділу «Опір матеріалів», викладені методика і приклади їх розв'язання.

1. Загальні вказівки ЩОДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНИХ ЗАВДАНЬ

1.1. Вказівки до вибору завдання

Під час виконання завдання важливо мати таблицю кожного робочого дня відповідно до цифрового коду, наданого викладачем, та трьох букв (А, В, Г). Цей код зберігається для всіх функцій і повинен відображатися в супровідному листі. З кожного вертикального стовпця таблиці вихідних даних відповідно до букви внизу, до значення потрібно додати значення, яке відповідає номеру літерного шифру. Наприклад, якщо код А, В, D = 235, то А = 2, В = 3, D = 5, вихідні дані з таблиці обираються таким чином:

Номер	Вихідні дані (1)	Вихідні дані (2)	Вихідні дані (3)
1			
2	10		
3		15	
4			
5			20
6			
7			
8			
9			
0			
	А	Б	Г

1.2. Вказівки до виконання звіту

За кожною задачею студент оформляє індивідуальний звіт. Звіт повинен містити:

- загальну схему елемента конструкції;
- вихідні числові дані;
- розв'язання задачі;
- необхідні епюри сил, моментів, подовжень (переміщень, кутів закручення).

Звіт знаходиться на аркуші формату А4. Титульний аркуш видається відповідно до ГОСТ 2.04, форма 2, наступний аркуш звіту – у формі 2а. Звіт має бути розділеним на абзаци, а за необхідності – на підпункти. Шрифт – Times New Roman, розмір – 14, міжрядковий інтервал – 1.5. Додавайте малюнки, графіки, таблиці та позначте технічну документацію відповідно до правил.

Формули у тексті повинні мати нумерацію і записуватися з нового рядка у загальному вигляді, а під формулою наводиться пояснення кожного символу із зазначенням величини й розмірності. Обчислення формул проводиться у такій послідовності: записування шуканої величини в буквеному виразі, підстановка відповідних цифрових значень і записування кінцевого результату з проставлянням розмірностей. Усі схеми та ескізи під час виконання завдання оформлюються з дотриманням послідовності, передбаченої ходом розв'язування. Рисунки нумеруються відповідно до номера задачі й супроводжуються підписами.

Результати розрахунків оформлюються у фізичних одиницях системи СІ. У деяких випадках ця умова не є необхідною, але кожного такого разу на цьому робиться окремий наголос.

Звіт, оформлений відповідно до вимог ЄСКД (Єдина система конструкторської документації) і ДСТУ 3008-2015, є основою до захисту індивідуального завдання.

2. Задача № 1.

Розтягання-стискання металевих стержнів постійного перерізу

Теоретичні відомості

Коли балка розтягується або стискається на її ділянках, виникає тільки один внутрішній силовий фактор – поздовжня сила, яка буде виражена N_z або N .

Поздовжні сили вважаються позитивними (розтягання) та негативними (стискання). Під час розтягування поздовжня сила спрямовується від перетину u , а у разі стискання – до нього.

Модуль і напрямок поздовжньої сили визначаються з рівняння рівноваги, складеного для усіченої частини балки:

$$N + \sum_i F_{iz} = 0, \quad (2.1)$$

тобто поздовжня сила в довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на його поздовжню вісь Z всіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини. Напрямок сили N протилежний напрямку проєкції (на вісь Z) рівнодіючої зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини.

У тих випадках, коли поздовжня сила не є рівномірною в різних перерізах променя, закон її зміни легше представити у вигляді графіка з довжиною променя, який називається графіком (епюрою) поздовжньої сили. Аргумент цього графіка – це координата поперечного перерізу балки (z), а функція – сила довжини (N). Таким чином, функція поздовжніх сил є графіком $N = f(z)$. Не завжди можна виразити дану функцію однією залежністю для всієї балки, тому нам доводиться ділити її на частини, кожна з яких має власний вираз функції $N = f(z)$.

Ділянка амплітудних сил в основному побудована так, що вона використовується для примусу пучка в теоретичному розрахунку, що дає можливість мати більші значення поздовжніх сил та положення частин, у яких вони виникають.

У цілому радіальні сили зосереджені на силах F_i , що діють на певні промені в цих точках, і на силу, що діє на певні частини певної довжини. Важливо застосовувати загальні правила під час аналізу діаграм N та Y та їх точності.

1. Величини поздовжніх сил відкладають у вибраному масштабі від осі епюри; при цьому додатні значення N (розтягання) відкладають догори, а від'ємні – вниз від осі.

2. Якщо на ділянці відсутня інтенсивність ($q = 0$), а діють тільки зосереджені сили, епюра паралельна осі абсцис, тобто $N = \text{const}$.

3. Якщо на ділянці інтенсивність $q \neq 0$, то епюра є нахиленою прямою, нахил якої залежить від знака (напряму дії) інтенсивності.

4. У місцях прикладення зосереджених сил на епюрі відбуваються стрибки у зміні ординат.

У процесі розтягання (стискання) бруса в його поперечних перерізах виникають тільки нормальні напруження σ . Загалом це виглядає так:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.2)$$

де A – площа поперечного перерізу балки. Для нормальних напружень прийміть те ж правило знаків, що і для поздовжніх сил, які знаходяться під напругою, вважайте напруги позитивними. Стан міцності представлений у вигляді:

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (2.3)$$

де $[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження.

Для визначення зміни довжини Δl всього бруса (або його окремої ділянки) необхідно взяти інтеграл

$$\Delta l = \int_l \frac{N dz}{EA}, \quad (2.4)$$

де E – модуль пружності 1-го виду для певного матеріалу. У найзагальнішому випадку, коли закони зміни N і A (або одне з цих значень) різні для кожної частини пучка, визначення Δl виконують у кожному з цих ділянок, а потім додають результати.

$$\Delta l = \sum_{i=1}^k \int_l \frac{N dz}{EA}. \quad (2.5)$$

В окремому випадку, коли поперечний переріз бруса або окремої її ділянки постійне та поздовжня сила в усіх перерізах постійна, то формула має вигляд:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.6)$$

Оскільки поздовжня сила може мати знак «-» або «+», зміни довжини Δl також мають відповідний знак. Якщо $\Delta l > 0$ – це подовження променя, якщо $\Delta l < 0$ – вкорочення. Зміна довжини пучка дорівнює алгебраїчній сумі (тобто з урахуванням знаків) розширень (скорочень) окремих ділянок

$$\Delta l = \sum_{i=1}^k \Delta l_i = \sum_{i=1}^k \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (2.7)$$

Під час складання діаграми Δl та аналізу її регулярності необхідно дотримуватись певних правил. Цей аналіз слід проводити, рухаючись зліва направо.

1. Ділянка, в якій кріпиться кронштейн, прикріплена, тому ви повинні відкласти зміщення Δl від нуля.

2. На межі цього перерізу значення алгебраїчної суми змін довжини всіх попередніх ділянок необхідно скасувати, наприклад, на межі першого відрізка – Δl_1 , другого – $\Delta l_1 + \Delta l_2$ тощо.

3. Якщо контур поздовжніх сил паралельний абсцисі, тобто $N = \text{const}$, ескіз Δl є косою рисою.

4. Якщо контур поздовжніх сил є похилою лінією, то контур Δl є параболою.

У разі, коли, незважаючи на знак N , він підніметься, парабола буде опуклою вниз, коли N зменшується, незважаючи на знак, парабола випинається вгору.

2.1. Завдання до задачі № 1

Сталевий стержень, що складається з трьох ділянок постійного поперечного перерізу площею A і довжиною l_1, l_2, l_3 , навантажений зосередженими силами F_1, F_2, F_3 та рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q_1, q_2, q_3 , які спрямовані вздовж його осі.

Треба побудувати епюру поздовжніх сил N та визначити площу перерізу A , яка забезпечує міцність стержня (матеріал – це сталь Ст3, допустимі нормальні напруження $[\sigma] = 100$ МПа, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па). Побудувати епюру переміщень та визначити зміну довжини стержня.

Загальна схема навантаження стержня (рис. 2.1) має бути адаптована з урахуванням вихідних даних, які відповідають певному варіанту завдання та які необхідно взяти з табл. 2.1.

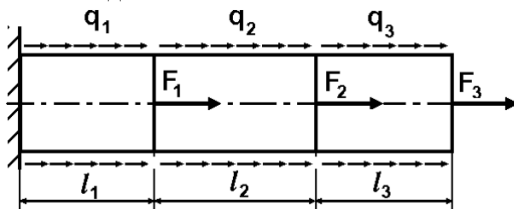


Рисунок 2.1 – Схема навантаження стержня

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до задачі № 1

№	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	q_3 , кН/м
1	1,00	1,90	0,50	-10,0	105,0	-41,0	0	-10,0	0
2	2,00	2,80	2,00	20,0	-25,0	32,0	0	20,0	0
3	1,00	1,70	1,00	-30,0	35,0	-23,0	0	-30,0	-30,0
4	2,00	1,60	1,00	40,0	-45,0	56,0	-10,0	40,0	40,0
5	0,60	0,50	0,70	-50,0	55,0	-28,0	20,0	-25,0	-50,0
6	0,70	1,00	0,90	90,0	-65,0	93,0	-30,0	0	10,0
7	0,80	1,00	0,40	-80,0	75,0	-54,0	25,0	0	-20,0
8	2,40	0,60	0,50	70,0	-85,0	37,0	-15,0	0	30,0
9	1,20	0,70	0,80	-60,0	95,0	-61,0	0	10,0	-40,0
0	1,10	0,80	0,90	100,0	-15,0	19,0	0	-20,0	50,0

2.2. Приклад виконання завдання

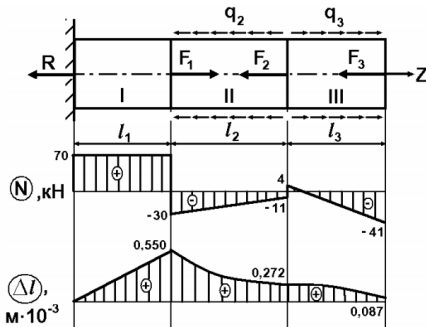


Рисунок 2.2 – Схема навантаження стержня та епюри сил і переміщень

Вихідні числові дані:

$l_1 = 1,1$ м; $l_2 = 1,9$ м; $l_3 = 0,9$ м; $F_1 = 100$ кН; $F_2 = -15$ кН; $F_3 = -41$ кН;
 $q_1 = 0$ кН/м; $q_2 = -10$ кН/м; $q_3 = 50$ кН/м.

Числові дані з урахуванням знаків:

$F_1 = 100$ кН; $F_2 = 15$ кН; $F_3 = 41$ кН; $q_1 = 0$ кН/м; $q_2 = 10$ кН/м;
 $q_3 = 50$ кН/м.

Розв'язання

Наведіть вісь Z у додатний бік праворуч (рис. 2.2). Визначте еталонну реакцію R на лівій твердій основі, вказуючи вліво (контрольна реакція має знак «-»). З урахуванням рівноваги рівняння має вигляд:

$$-R + F_1 - F_2 - F_3 - q_2 \cdot l_2 + q_3 \cdot l_3 = 0,$$

або

$$R = F_1 - F_2 - F_3 - q_2 \cdot l_2 + q_3 \cdot l_3.$$

Остаточно

$$R = 100 - 15 - 41 - 10 \cdot 1,9 + 50 \cdot 1,1 = 70 \text{ кН.}$$

Знак «+» вказує, що напрямок вибраного напрямку правильний для еталонної відповіді. Якщо послання йде після визначення знака «-», то важливо змінити напрямок його значення.

Визначимо амплітудні сили на кожному з трьох складових з урахуванням умов рівноваги. У кожному розділі ми рухаємо поздовжню силу N у додатному напрямку, ставимо умову до будь-якого вказаного перерізу в будь-якій точці перетину і записуємо умови рівноваги. Якщо після обчислень довгота N є знаком «+», то в цій частині відбувається розтяг, якщо «-» – стиснення.

Слід зазначити, що після врахування ознак зовнішніх сил шляхом зміни напрямків їх дії всі зовнішні сили мають знак «+» і ці значення слід замінити у рівнянні для визначення величини поздовжньої сили.

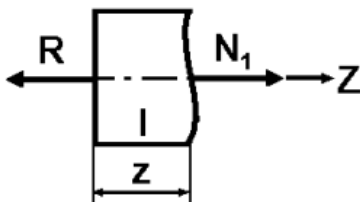


Рисунок 2.3 – Схема сил на ділянці I

Ділянка I. $0 \leq z \leq l_1$. (рис. 2.3).

За умов рівноваги $-R + N_1 = 0$. Тому $N_1 = R = 70$ кН. На цій ділянці поздовжня сила є постійною.

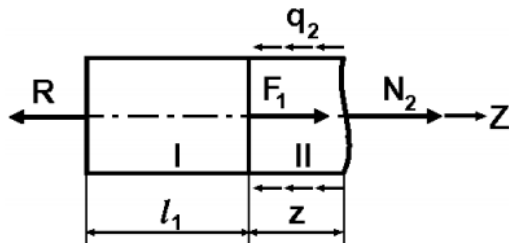


Рисунок 2.4 – Схема сил на ділянці 2

Ділянка II. $0 \leq z \leq l_2$.

За умов рівноваги $-R + F_1 - q_2 \cdot z + N_2 = 0$. Звідки отримуємо $N_2 = R - F_1 + q_2 \cdot z = -30 + 10 \cdot z$, на цій ділянці поздовжня сила змінюється за лінійними законом, тому для побудови епюри необхідно визначити значення у двох довільних перерізах на цій ділянці, у ролі яких, зазвичай, беруть границі ділянки.

При $z = 0$ $N_2 = R - F_1 = -30$ кН;
 при $z = l_2$ $N_2 = R - F_1 + q_2 \cdot l_2 = -11$ кН.

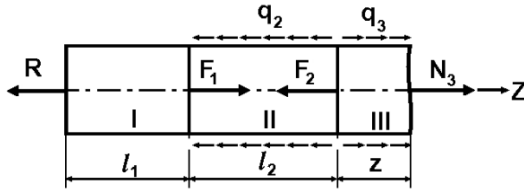


Рисунок 2.5 – Схема сил на ділянці 3

Ділянка III. $0 \leq z \leq l_3$ (рис. 2.5).

За умов рівноваги $-R + F_1 - q_2 \cdot l_2 - F_2 + q_3 \cdot z + N_3 = 0$.

Звідки отримуємо $N_3 = R - F_1 + q_2 \cdot l_2 + F_2 - q_3 \cdot z = 4 - 50 \cdot z$ (знову лінійна залежність).

При $z = 0$ $N_3 = R - F_1 + q_2 \cdot l_2 + F_2 = 4$ кН;
 при $z = l_3$ $N_3 = R - F_1 + q_2 \cdot l_2 + F_2 - q_3 \cdot l_3 = -41$ кН.

Останнє значення має відповідати значенню сили F_{-3} , враховуючи його характер дії. Аналізуючи побудовану діаграму поздовжніх сил N , ми визначаємо найнебезпечнішу зону, де значення N буде найбільшим. Тому $N_{\max} = 70$ кН.

Щоб визначити площу поперечного перерізу A , що забезпечує міцність прутка, необхідно записати умову міцності:

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \text{ звідки } A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{70 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Зміна довжини будь-якої i -ої ділянки постійного поперечного перерізу та однорідності матеріалу визначається формулою $\Delta l_i = \int_0^{l_i} \frac{N_i(z)}{E \cdot A} dz = \frac{1}{E \cdot A_0} \int_0^{l_i} N_i(z) dz$. Якщо на ділянці поздовжня сила

$N_i = \text{const}$, наведена формула спрощується $\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A}$. Отже:

1) ділянка I –

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7 \cdot 10^{-4}} = 0,550 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

2) ділянка II –

$$\Delta l_2 = \int_0^{l_2} \frac{N_2(z)}{E \cdot A} dz = \frac{1}{E \cdot A_0} \int_0^{l_2} (-30 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3 \cdot z) dz.$$

Остаточоно:

$$\Delta l_2 = \frac{10^3}{1,4 \cdot 10^8} \left(-30z + 10 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1,9} = -0,278 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Як бачимо, зміна довжини другого перерізу змінюється за квадратичним законом, так що форма опуклості параболи визначається знаком доданка z^2 . У цьому випадку опуклість спрямовані вниз.

3) ділянка III –

$$\Delta l_3 = \int_0^{l_3} \frac{N_3(z)}{E \cdot A} dz = \frac{1}{E \cdot A_0} \int_0^{l_3} (4 \cdot 10^3 - 50 \cdot 10^3 \cdot z) dz.$$

Остаточоно:

$$\Delta l_3 = \frac{10^3}{1,4 \cdot 10^8} \left(-4x - 50 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1,1} = -0,185 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

У цьому випадку випуклість спрямована догори.

Загальна зміна довжини стержня $\Delta l_{\text{зар}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$. $\Delta l_{\text{зар}} = 0,550 \cdot 10^{-3} - 0,278 \cdot 10^{-3} - 0,185 \cdot 10^{-3} = 0,087 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Аналізуючи побудовані графіки, можна визначити розширення у першому розділі, стиснення у другому та переважне стиснення у третьому. Повна зміна довжини балки досягається знаком «+», тому проблема визначає розширення стержня.

3. Задача №2.

Розтягання-стискання металевих стержнів змінного перерізу

Теоретичні відомості

Розглядаючи деформацію металевого стрижня змінних в окремих розділах перерізу, слід зазначити, що теоретична частина, яка наводиться для вирішення проблеми першої задачі, є незмінною для другої, але з деякими доповненнями. Поздовжня сила також використовує метод перерізу для побудови ескізу N , коли він визначається залежністю для сталого перетину. Для брусків зі змінним поперечним перерізом для кожного окремого перерізу перевірка умови цінності або визначення площини виконується за такими формулами:

$$\sigma_i = \frac{N_{max_i}}{A_i} \leq [\sigma], i = 1, \dots, k, \quad (3.1)$$

де для i -го перерізу ($i = 1, \dots, k$, всього k перерізів), N_{max_i} ($[\max]_{i}$) – максимальна поздовжня сила, σ_i – максимальна напруга, A_i – площа поперечного перерізу, $[\sigma]$ – допустима напруження для певного матеріалу. Слід зазначити, що у випадку різної роботи частини матеріалу, що зазнає стиснення та напруження, випробування за формулою (3.1) проводять з урахуванням знаку поздовжньої сили, що визначає тип деформації та потребує знань величин напруження.

Зміна довжини балки визначається за формулою (2.7). Правила побудови ділянок N та Δl залишаються незмінними порівняно з попередньою задачею (див. р. 2).

3.1. Завдання до задачі № 2

Сталевий ступінчастий стрижень, що складається з трьох секцій циліндричного перерізу діаметром d_1, d_2, d_3 і довжиною l_1, l_2, l_3 , навантаженими концентрованими силами F_1, F_2, F_3 , спрямованими вздовж своєї осі (рис. 3.1, табл. 3.1).

Потрібно побудувати діаграму поздовжніх сил N і нормальних напружень σ . Перевірте, чи міцність стрижня гарантована (матеріал – сталь St3, $[\sigma] = 100$ МПа, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па). Якщо умова міцності не виконується, визначте діаметри, які забезпечать міцність відповідних секцій, і складіть відповідні креслення. Побудуйте діаграму переміщення та визначте зміну довжини стрижня.

Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)

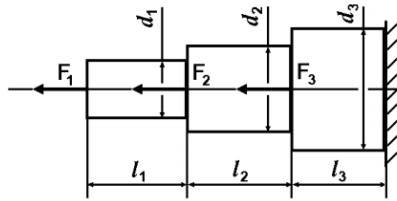


Рисунок 3.1 – Схема навантаження стержня

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі № 2

№	$l_1, \text{м}$	$l_2, \text{м}$	$l_3, \text{м}$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$d_1, \text{м}$	$d_2, \text{м}$	$d_3, \text{м}$
1	1,00	1,90	0,50	-10,0	105,0	-41,0	0,100	0,050	0,080
2	2,00	2,80	2,00	20,0	-25,0	32,0	0,200	0,070	0,140
3	1,00	1,70	1,00	-30,0	35,0	-23,0	0,300	0,090	0,320
4	2,00	1,60	1,00	40,0	-45,0	56,0	0,150	0,110	0,120
5	0,60	0,50	0,70	-50,0	55,0	-28,0	0,250	0,030	0,080
6	0,70	1,00	0,90	90,0	-65,0	93,0	0,300	0,060	0,210
7	0,80	1,00	0,40	-80,0	75,0	-54,0	0,120	0,090	0,270
8	2,40	0,60	0,50	70,0	-85,0	37,0	0,140	0,120	0,250
9	1,20	0,70	0,80	-60,0	95,0	-61,0	0,150	0,240	0,160
0	1,10	0,80	0,90	100,0	-15,0	19,0	0,110	0,140	0,220

3.2. Приклад виконання завдання

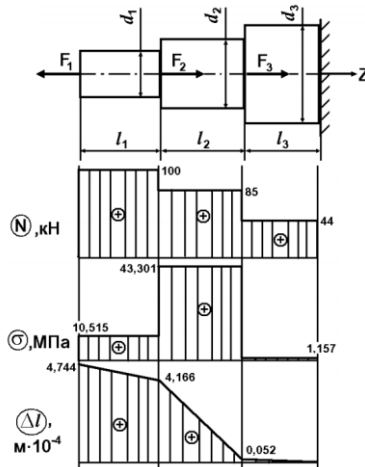


Рисунок 3.2 – Схема навантаження стержня та епюри сил напруження і переміщення

Вихідні числові дані: $l_1 = 1,1$ м; $l_2 = 1,9$ м; $l_3 = 0,9$ м; $F_1 = 100$ кН;
 $F_2 = -15$ кН; $F_3 = -41$ кН; $d_1 = 0,11$ м; $d_2 = 0,05$ м; $d_3 = 0,22$ м.

Числові дані з урахуванням знаків (враховано зміною напрямів сил): $F_1 = 100$ кН; $F_2 = 15$ кН; $F_3 = 41$ кН;

Розв'язання

Визначення еталонної реакції R у правій жорсткій вставці не є необхідним для цієї задачі, тому ми починаємо вирішення задачі з вільного краю першого перетину (еталонний відгук визначається автоматично за умов правильного витягування поздовжніх сил N) і рухаємось до жорсткого закладення.

Визначте поздовжні сили на кожному з трьох перерізів і запишіть умови рівноваги. Наведіть вісь Z у додатному напрямку праворуч. На кожній ділянці направляйте поздовжню силу N у додатний бік праворуч, у будь-якому місці перетину робіть умовний розріз і записуйте умови рівноваги. Якщо, згідно з розрахунками, поздовжня сила N матиме знак «+», то вона знаходиться в цій зоні подовження, якщо «-» – стиснення. Якщо на окремі ділянки немає розподіленого навантаження, поздовжня сила буде постійною.

Слід зазначити, що всі зовнішні сили мають знак «+» після врахування знаків зовнішніх сил шляхом зміни напрямку їх дії, і ці значення слід замінити у рівнянні для визначення величини поздовжньої сили.

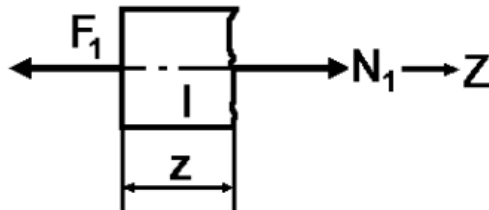


Рисунок 3.3 – Схема сил на ділянці 1

Ділянка I. $0 \leq z \leq l_1$ (рис. 3.3).

За умов рівноваги $-F_1 + N_1 = 0$. Тому $N_1 = F_1 = 100$ кН.

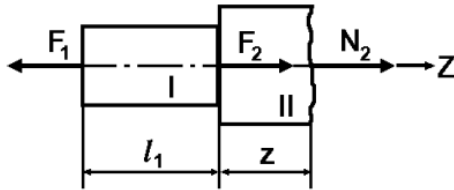


Рисунок 3.4 – Схема сил на ділянці 2

Ділянка II. $0 \leq z \leq l_2$ (рис 3.4).

За умов рівноваги $-F_1 + F_2 + N_2 = 0$, звідки $N_2 = F_1 - F_2 = 85$ кН.

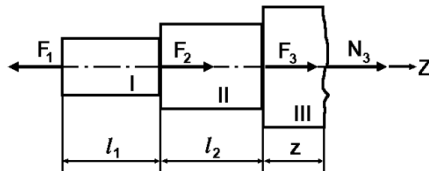


Рисунок 3.5 – Схема сил на ділянці 3

Ділянка III. $0 \leq z \leq l_3$ (рис. 3.5).

За умов рівноваги $-F_1 + F_2 + F_3 + N_2 = 0$, звідки $N_2 = F_1 - F_2 = 85$ кН.

Для аналізу напруженого стану розглянемо кожну ділянку окремо.

Ділянка I: поперечний переріз з діаметром $d_1 = 0,11$ м, його площа дорівнює $A_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 = 9,503 \cdot 10^{-3}$ м².

Напруження $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{9,503 \cdot 10^{-3}} = 10,515$ МПа $\leq [\sigma]$, тобто умова міцності виконується.

Зміна довжини ділянки постійного поперечного перерізу:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9,503 \cdot 10^{-3}} = 0,578 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Ділянка II: поперечний переріз з діаметром $d_2 = 0,05$ м, його площа дорівнює $A_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 = 1,963 \cdot 10^{-3}$ м².

Напруження $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{85 \cdot 10^3}{1,963 \cdot 10^{-3}} = 43,301$ МПа $\leq [\sigma]$, тобто умова міцності виконується.

Зміна довжини ділянки постійного поперечного перерізу:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{185 \cdot 10^3 \cdot 1,9}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,963 \cdot 10^{-3}} = 4,114 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Ділянка III: поперечний переріз з діаметром $d_3 = 0,22$ м, його площа дорівнює $A_3 = \frac{\pi}{4} d_3^2 = 38,013 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

Напруження $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{44 \cdot 10^3}{38,013 \cdot 10^{-3}} = 1,157 \text{ МПа} \leq [\sigma]$, тобто умова міцності виконується.

Зміна довжини ділянки постійного поперечного перерізу:

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{44 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{2 \cdot 10^{11} \cdot 38,013 \cdot 10^{-3}} = 0,052 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Загальна зміна довжини стержня $\Delta l_{\text{заг}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$. $\Delta l_{\text{заг}} = 0,578 \cdot 10^{-4} + 4,114 \cdot 10^{-4} + 0,052 \cdot 10^{-4} = 4,744 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

При побудові епюри Δl необхідно враховувати, що при $N_i = \text{const}$ на цій ділянці Δl змінюється за лінійним законом – на епюрі пряма нахилена лінія (див. 3.2).

4. Задача № 3.

Кручення стержнів постійного перерізу

Теоретичні відомості

Стержень працює на крученні, коли в його перерізах є круті моменти, тобто моменти, які знаходяться в площині поперечного перерізу. Стержні, які обертаються і працюють на крученні, називаються валами.

Використовуючи метод поперечного перерізу та враховуючи баланс усіченої частини, ми робимо висновок, що внутрішні сили, що створюються в поперечному перерізі балки, повинні давати момент (крутий момент), який врівноважує зовнішні моменти, що стосуються цієї частини. Це означає, що крутий момент у будь-якій ділянці балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів, що стосуються усіченої частини.

Для розрахунку міцності, а також під час розтягування (стискання) балки необхідно знайти її найбільш небезпечну ділянку. У разі, коли розміри поперечного перерізу по довжині балки постійні, найбільш небезпечними будуть ділянки, де крутий момент найбільший. Графік, що показує закон зміни крутного моменту по довжині балки, називається графіком крутного моменту. Побудова цих діаграм принципово не відрізняється від побудови діаграм поздовжньої сили і виконується на основі сформульованого правила обчислення крутного моменту.

Існує певне правило визначення знаків моментів. Крутий момент $M_{кр}$ на ділянці mn вважається позитивним, коли зовнішній крутий момент M повертає вирізану деталь проти годинникової стрілки, якщо дивитися на вирізану частину з поперечного перерізу (на рис. 4.1, і це показано з точки спостереження праворуч від зовнішнього моменту), відображається від точки спостерігача зліва від зовнішнього моменту).

Якщо зовнішній крутий момент M обертає усічену частину за годинниковою стрілкою (якщо дивитися збоку від розрізу), крутий момент у перерізі вважається негативним (на рис. 4.2, і це показано з точки спостереження праворуч від зовнішнього крутного моменту; спостерігач зліва від зовнішнього моменту).

Діаграма має форму прямокутників. У точках використання зовнішніх моментів ординати діаграми мають стрибок щодо величини зовнішнього моменту, який використовується в цій точці.

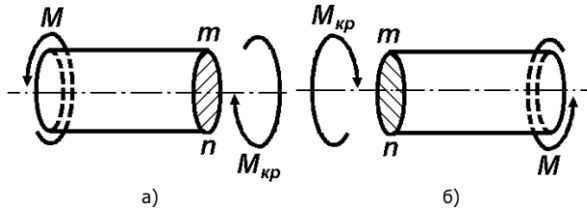


Рисунок 4.1 – Позитивний крутний момент

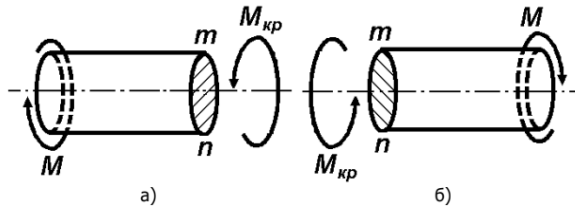


Рисунок 4.2 – Негативний крутний момент

Під час кручення в поперечних перерізах стержня діють тільки дотичні напруження τ , тобто напружений стан в точках стержня, який скручується, є чистим зсувом.

Умова статичної міцності валу у процесі кручення має вигляд:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (4.1.)$$

де $M_{кр max}$ – максимальний крутний момент, W_p – полярний крутний момент або крутний момент, $[\tau]$ – допустима напруга.

Полярний момент опору W_p пов'язаний з інерційним полярним моментом ділянки I_p та відстані від полюса перетину до найдалшої точки перерізу. Для круглого перетину половина – це його центр, а певна відстань – радіус.

Тому для цього перерізу з урахуванням $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ і $r = \frac{d}{2}$ маємо:

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (4.2)$$

Якщо крутний момент $M_{кр}$, матеріал валу з модулем пружності іншого типу (або модулем зсуву) G і перетином з полярним моментом інерції I_p постійний, то для валу довжиною l його деформація (взаємний кут повороту ϕ) дорівнює:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (4.3)$$

Кут φ може бути додатним, від'ємним і в деяких випадках рівним нулю. За наявності вбудованого крутного моменту та знання умов кріплення штока визначити кутові зсуви поперечних перерізів штока і зробити їх поверхню не складно.

Якщо для вала немає нерухомих секцій, то візьміть будь-яку умовно тиху ділянку для побудови діаграми кутових переміщень.

Існують певні правила під час аналізу правильності побудови цієї діаграми та її відповідності діаграмі крутного моменту.

1. Якщо площина $M_{кр}$ – горизонтальна лінія на площині, то площина a – похила.

2. Якщо $M_{кр} > 0$, φ зростає, якщо $M_{кр} < 0$, φ зменшиться.

3. На діаграмі $M_{кр}$ є стрибки в місцях використання зовнішніх моментів, а на діаграмі φ – розрив.

Кожен наступний кут φ_i для i -го перерізу зміщується щодо суми кутів згину попередніх ділянок.

4.1. Завдання до задачі № 3

На сталевому валі, що має безперервний перетин з постійним діаметром, встановлені чотири шківів, до яких відносяться моменти M_1, M_2, M_3, M_4 (рис. 4.3).

Побудуйте площину крутного моменту $M_{кр}$. За умовою міцності необхідно визначити діаметр вала d . Побудуйте діаграми кутів кручення φ . Допустимі дотичні напруження кручення для матеріалу вала $[\tau] = 60$ МПа, модуль пружності другого типу (зі зсувом) $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа. (табл. 4.1).

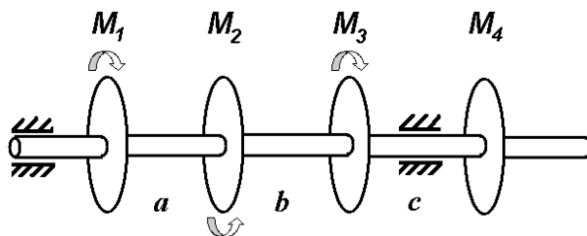


Рисунок 4.3 – Схеми навантаження вала

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до задачі № 3

№	$M_1, \text{кН} \cdot \text{м}$	$M_2, \text{кН} \cdot \text{м}$	$M_3, \text{кН} \cdot \text{м}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$
1	0,10	-0,60	1,50	0,450	0,550	0,310
2	0,20	0,70	-1,40	0,460	0,750	0,320
3	0,30	-0,80	1,30	0,470	0,650	0,330
4	0,40	0,90	-1,20	0,480	0,850	0,340
5	0,50	-1,00	1,10	0,490	1,000	0,350
6	-0,10	1,10	-0,50	0,500	0,950	0,360
7	-0,20	-1,20	0,60	0,410	1,100	0,370
8	-0,30	1,30	-0,70	0,420	0,700	0,380
9	-0,40	-1,40	0,80	0,430	0,600	0,390
0	-0,50	1,50	-0,90	0,440	0,500	0,400

4.2. Приклад виконання завдання

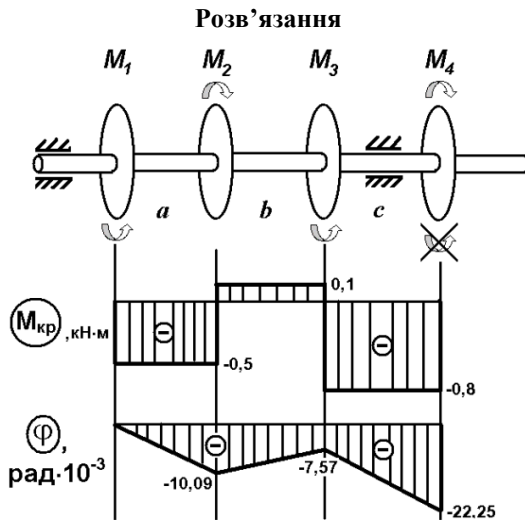


Рисунок 4.4 – Схема навантаження валу та епюри крутного моменту і кута закручення

Вихідні дані: $M_1 = -0,50 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = -0,60 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_3 = -0,90 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $a = 0,44 \text{ м}$, $b = 0,55 \text{ м}$, $c = 0,40 \text{ м}$.

Числові дані: $M_1 = 0,50 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = 0,60 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_3 = 0,90 \text{ кН} \cdot \text{м}$, (знаки враховано зміною напрямів дії відповідних крутильних моментів).

Схема показує напрямок дії моментів M_1 , M_2 , M_3 , що відповідає додатним значенням цих моментів, взятим з таблиці. Якщо табличні дані дають значення будь-якої з цих точок зі знаком «-», напрямок відповідного моменту необхідно замінити на протилежний, значення якого має бути за модулем. Під час побудови площини крутного моменту $M_{кр}$ (рух справа наліво, від 4-го шківця до 1-го) ми використовуємо правило знаків.

Щоб визначити напрямок і величину зовнішнього моменту M_4 , виберіть напрямок його дії у напрямку проти годинникової стрілки, якщо подивитися від розділу до розділу с і записати стан рівноваги конструкції:

$$M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = 0,$$

тому

$$M_4 = -M_3 + M_2 - M_1 = -0,9 + 0,6 - 0,5 = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знак «-» вказує на те, що вибраний напрямок зовнішнього моменту M_4 був неправильним, тому ви повинні змінити цей напрямок на протилежний, залишивши значення абсолютного моменту без змін (на малюнку показані обидва варіанти, попередній закреслений).

Для кожної ділянки ми визначаємо $M_{кр}$. Ми спрямовуємо внутрішній момент таким чином (згідно з рисунком 4.1, б), щоб його знак був одразу зрозумілим. Якщо за умов рівноваги у вибраному напрямку в розрізі $M_{кр}$ отримає певний знак «+» або «-», такий знак буде на схемі.

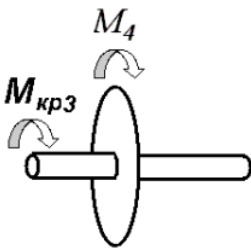


Рисунок 4.5 – Схема моментів на ділянці «с»

Ділянка с (рис. 4.5):

$$-M_{кр3} - M_4 = 0. \text{ Тому}$$

$$M_{кр3} = -M_4 = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

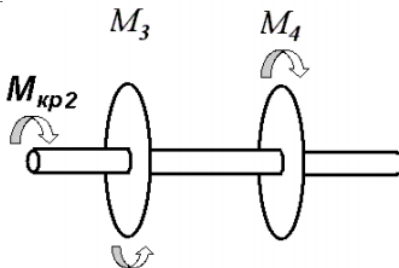


Рисунок 4.6 – Схема моментів на ділянці «б»

Ділянка б (рис. 4.6):

$$-M_{кр2} + M_3 - M_4 = 0. \text{ Тому}$$

$$M_{кр2} = -M_4 + M_3 = 0,8 + 0,9 = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У задачі рекомендується побудувати схему $M_{кр}$, починаючи з четвертого шківця, що рухається від нього до першого, оскільки з положення спостерігача на умовному перерізі (наприклад, у розділі с) напрямок зовнішнього крутного моменту набуває очевидного значення.

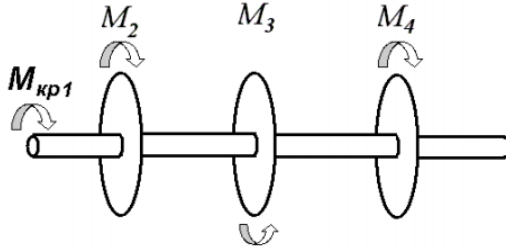


Рисунок 4.7 – Схема моментів на ділянці «а»

Ділянка *a* (рис. 4.7):

$$-M_{кр1} - M_2 + M_3 - M_4 = 0.$$

Тому

$$-M_{кр1} = -M_4 + M_3 - M_2 = 0,8 + 0,9 - 0,6 = -0,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Максимальний крутильний момент (за абсолютною величиною) визначається з побудованої епюри $M_{кр}$: $M_{max} = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

За умов міцності $\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_p} \leq [\tau] \rightarrow$, тому полярний момент опору перерізу $W_p = \frac{M_{кр max}}{[\tau]}$, з урахуванням $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ визначаємо діаметр сталевого валу:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} \approx 0,0408 \text{ м}.$$

Полярний момент опору перерізу визначається за формулою:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,0408^4}{32} \approx 2,72 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$$

У межах кожної секції вала ділянка є лінійною, тому достатньо розрахувати кути повороту лише для прикордонних ділянок. Кут скручування кожної з трьох секцій (нумерація зліва направо) визначається за формулою $\varphi_i = \frac{M_{кр i} \cdot l_i}{G \cdot I_{p i}}$, тому запишемо:

$$\varphi_1 = \frac{-0,5 \cdot 10^3 \cdot 0,44}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,72 \cdot 10^{-7}} \approx -10,09 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

(кут повороту перерізу другого шківця відносно першого);

Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)

$$\varphi_2 = \frac{0,1 \cdot 10^3 \cdot 0,55}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,72 \cdot 10^{-7}} \approx 2,52 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту перерізу третього шківa відносно другого, відносно першого кут дорівнює $\varphi_1 + \varphi_2$);

$$\varphi_3 = \frac{-0,8 \cdot 10^3 \cdot 0,40}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,72 \cdot 10^{-7}} \approx -14,68 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту перерізу четвертого шківa відносно третього, відносно першого кут дорівнює $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$).

Епюру φ будемо під певними кутами умовно відносно нерухомого першого шківa. Кут скручування 4-го шківa визначається за формулою

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -22,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

5. Задача № 4.

Кручення стержнів змінного перерізу

Теоретичні відомості

Теоретичних даних, наведених під час вирішення задачі № 3, достатньо для поданої задачі. Деякі відмінності, які слід враховувати, пов'язані з наявністю уздовж довжини бруса змінних ділянок поперечного перерізу, а саме кільця. Тим не менш, будується діаграма крутного моменту, і для кожного типу перерізу у брусі необхідно визначити найбільш небезпечні ділянки. Звичайно, цей факт також враховується у процесі складання діаграми кутів повороту перерізів через різні полярні моменти інерції.

Полярний момент опору W_p визначається для кожного j -го типу перерізу. Наприклад, для кола він визначається за формулою (4.2), для круглого перерізу за умов відомого співвідношення $n = \frac{D}{d}$ між зовнішнім діаметром D і внутрішнім d (в цьому випадку в точках на контурі перерізу, розташованих на відстані $\frac{D}{2} = \frac{nd}{2}$ від полюса перерізу, дотичні напруження будуть найбільші) полярний момент опору з урахуванням $I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ має вираз:

$$W_p = I_p \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi n^4}{32}(d^4 - 1) \cdot \frac{2}{nd} = \frac{\pi n^3}{16}\left(d^3 - \frac{1}{d}\right) \quad (5.1)$$

У потенційно небезпечних перерізах (для кожного j -го типу) за формулою, аналогічною формулі (4.1), мають визначитися максимальні напруження:

$$\tau_{\max j} = \frac{M_{\text{кр max } j}}{W_{p j}} \leq [\tau] \quad (5.2)$$

Відповідно до цього співвідношення, перевіряються або умови міцності балки, або вибирається відповідний перетин. Кут повороту визначається за формулою (4.3) з урахуванням відповідного полярного моменту інерції $I_{p j}$ для перерізу j -го типу.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані для задачі № 4

№	№ схеми	$M_1, \text{кН} \cdot \text{м}$	$M_2, \text{кН} \cdot \text{м}$	n
1	1	2,00	6,50	1,200
2	2	2,50	6,00	1,250
3	3	3,00	5,50	1,300
4	4	3,50	5,00	1,350
5	5	4,00	4,50	1,400
6	6	4,50	4,00	1,450
7	7	5,00	3,50	1,500
8	8	5,50	3,00	1,550
9	9	6,00	2,50	1,600
0	10	6,50	2,00	1,650

5.2. Приклад виконання завдання

Розв'язання

Під час побудови епюри крутного моменту $M_{кр}$, рухаючись справа наліво, ми використовуємо правила знаків. Рух уздовж стрижня починається від вільного кінця до твердого кінця. Для кожного розділу ми визначаємо $M_{кр}$. Внутрішній момент $M_{кр}$ настільки спрямований відповідно до рисунка (4.1.b), що його знак відразу стає зрозумілим. Якщо за умов рівноваги у вибраному напрямку на розрізі $M_{кр}$ отримає певний знак «+» або «-», такий знак буде на побудованій діаграмі.

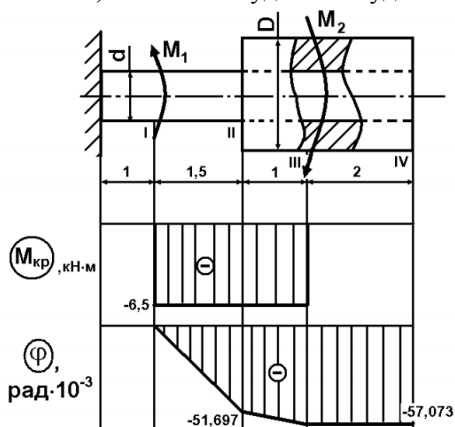
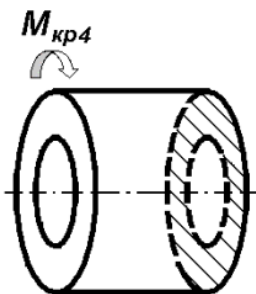


Рисунок 5.2 – Схема навантаження валу та епюри крутного моменту і кута закручення

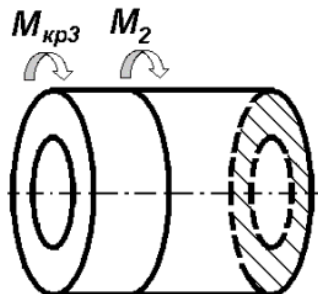
Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)

Числові дані: $M_1 = 6,50 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = 6,50 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,65$.



Ділянка IV

Рисунок 5.3 – Схема моментів на ділянці IV

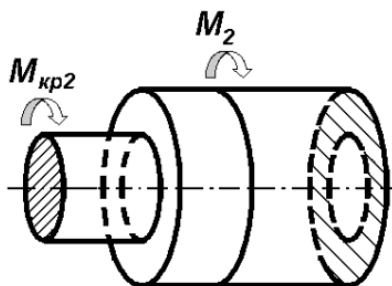


Ділянка III

Рисунок 5.4 – Схема моментів на ділянці III

Ділянка IV (рис. 5.3): $M_{кр4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (зовнішній момент відсутній).

Ділянка III (рис. 5.4): За умов рівноваги $-M_{кр3} - M_2 = 0$, тому $M_{кр3} = -M_2 = -6,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.



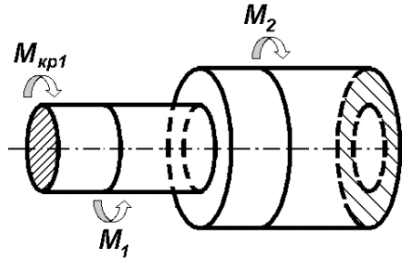
Ділянка II

Рисунок 5.5 – Схема моментів на ділянці II

Ділянка II (рис. 5.5): За умов рівноваги $-M_{кр2} - M_2 = 0$, $M_{кр2} = -M_2 = -6,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Ділянка I (рис. 5.6): За умов рівноваги $-M_{кр1} + M_1 - M_2 = 0$,

$$M_{кр1} = -M_2 + M_1 = -6,5 + 6,5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Ділянка I

Рисунок 5.6 – Схема моментів на ділянці I

Максимальний крутильний момент визначається з побудованої епюри $M_{кр}$ для кожного з видів перерізів (рис. 5.2):

- для суцільного вала $M_{кр1} = 6,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
- для вала кільцевого перерізу $M_{кр2} = 6,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

За умов міцності $\tau_{max} = \frac{M_{крmax}}{W_p} \leq [\tau] \rightarrow$, тому $W_p \geq \frac{M_{крmax}}{[\tau]}$, полярний момент опору суцільного перерізу $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, з урахуванням цього отримаємо діаметр сталевго валу:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{крmax1}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} \approx 0,0692 \text{ м.}$$

Полярний момент опору кільцевого перерізу: $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \left(n^3 - \frac{1}{n} \right)$, з урахуванням цього знаходимо діаметр сталевго валу:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{крmax2}}{\pi \cdot [\tau] \cdot \left(n^3 - \frac{1}{n} \right)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot \left(1,65^3 - \frac{1}{1,65} \right)}} \approx 0,044 \text{ м.}$$

Внаслідок того, що величина d є визначальною для обох типів перерізів, з двох отриманих значень діаметра d беремо найбільше. Отримане значення округляємо до 0,07 м.

Полярний момент опору суцільного перерізу (з індексом 1) визначається: $I_{p1} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,007^4}{32} \approx 2,357 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$. Полярний момент опору кільцевого перерізу (з індексом 2) визначається:

$$I_{p2} = \frac{\pi d^4}{32} (n^4 - 1) = \frac{3,14 \cdot 0,007^4}{32} (1,65^4 - 1) \approx 15,114 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Кути закручування кожної i -ої з чотирьох ділянок (нумерація зліва направо) визначаємо відповідно до формули $\varphi_i = \frac{M_{крi} \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}}$, ($j = 1$ або $j = 2$

Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)

залежно від типу перерізу), враховуючи вигляд перерізу, тому необхідно записати:

$$\varphi_1 = 0 \text{ рад,}$$
$$\varphi_2 = \frac{-6,5 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,357 \cdot 10^{-6}} \approx -51,697 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту перерізу, що відповідає лівій границі другої ділянки відповідно до першої, відносно нерухомого перерізу кут дорівнює $\varphi_1 + \varphi_2$);

$$\varphi_3 = \frac{-6,5 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 12,091 \cdot 10^{-6}} \approx -5,376 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту перерізу, що відповідає лівій межі третього перерізу відповідно до другого, щодо нерухомого перерізу, є кутом, рівним $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$);

$$\varphi_4 = 0 \text{ рад,}$$

(кут повороту ділянки, що відповідає лівій межі четвертої секції відповідно до третьої, щодо нерухомої секції, є кутом, рівним $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$);

За визначеними кутами ми будемо діаграму φ з нерухомим перетином у жорсткій основі. Кут скручування вільного кінця вала дорівнює алгебраїчній сумі кутів скручування кожного з наступних перерізів:

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -57,073 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

6. Задача № 5.

Поперечне згинання металевих балок

Теоретичні відомості

Поперечне згинання – один із видів деформацій, який вказує на один із видів деформації, за якої у перерізах стержня є згинальні моменти та поперечні сили. Навантаження на стержень, балку, брус зазвичай складається з моменту M , сили F та розподіленого навантаження q згідно з рис. 6.1. Останні два фактори зазвичай спрямовані на вісь стержня. Звичайно, поєднання, напрямок та кількість цих факторів є довільними.

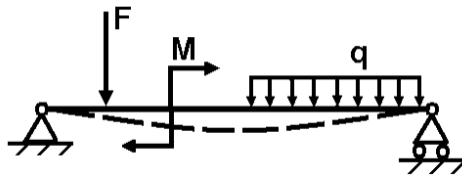


Рисунок 6.1 – Фактори, які впливають на навантаження стержня

Опори балок, які розглядаються у вигляді плоских систем, бувають трьох основних типів (рис. 6.2).

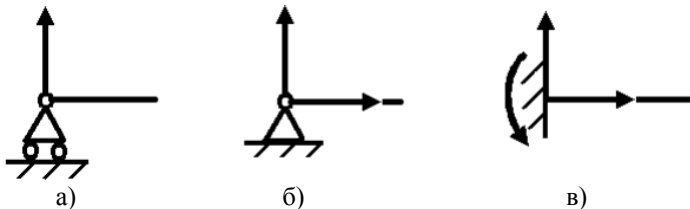


Рисунок 6.2 – Різновиди опір балок

1. Рухомий кронштейн шарніра, показаний на рис. 6.2, а. Ця опора не перешкоджає обертанню кінця вала та його руху вздовж площини кочення. Існує лише одна реакція, яка перпендикулярна до площини кочення і проходить через центр циліндра.

2. Фіксований шарнірний кронштейн показаний на рис. 6.2, б. Ця опора дозволяє обертати кінець балки, але виключає його поступове переміщення в будь-якому напрямку. Реакцію, що відбувається в ній, можна розділити на дві складові – горизонтальну та вертикальну.

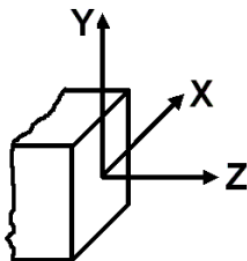


Рисунок 6.3 – Прив'язка системи координат до перерізу балки

3. Жорстке ущільнення або стиснення показано на рис. 6.2, в. При належному кріпленні не допускаються ні лінійні, ні кутові переміщення опорної частини. У цьому носії в загальному випадку може відбутися реакція, яка зазвичай розкладається на дві складові (вертикальну та горизонтальну) та момент стиснення (реактивний момент).

Декартова система координат, яка прив'язується до центра ваги поперечного перерізу балки, зображена на рис. 6.3.

Якщо всі силові фактори спрямовані відповідно до нормалі та поздовжньої осі балки (випадок прямого поперечного вигину), то горизонтальні складові опорних реакцій відсутні, а залишають тільки вертикальні. В поперечному перерізі балки виникає поперечна сила Q , яка спрямована вздовж осі Y , та згинальний момент M_x , який діє у декартовій системі координат у площині YZ .

Під час визначення опорних реакцій слід використовувати правила знаків для моментів і сил, засвоєних теоретичною механікою (для обраної системи координат проєкція сили в позитивному напрямку позитивна зі знаком «+», у негативній – це негативний зі знаком «-»). Дія моменту щодо вибраного перерізу за годинниковою стрілкою робить його від'ємним, проти годинникової стрілки – додатним).

Для прямого поперечного вигину існують такі правила для обчислення поперечних сил і згинальних моментів.

Поперечна сила Q_y в довільному поперечному перерізі заданої балки дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до її відсіченої частини (діючих по один бік від перерізу).

Згинальний момент M_x в довільному поперечному перерізі балки чисельно рівний алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до її відсіченої частини та знайдених відносно центра ваги переріза, який розглядається.

Графічне зображення внутрішніх факторів сили вздовж осі балки за розміром і знаком має форму відповідних схем. Для надійності під час будівництва епюр поперечних сил і згинальних моментів встановлено правила знаків.

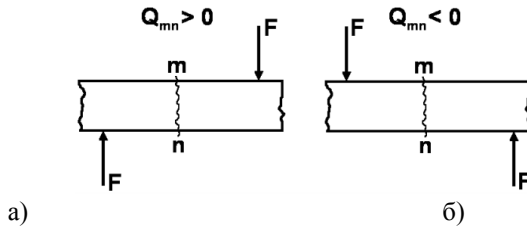


Рисунок 6.4 – Поперечна сила в перерізі балки $m - n$
(перший варіант трактування правила знаків)

Поперечна сила в поперечному перерізі балки $m - n$, зображеної на рисунку (6.4), вважається позитивною, якщо еквівалент зовнішніх сил ліворуч від перетину спрямований знизу вгору і праворуч – навпаки на рис. 6.4, а. В іншому випадку, згідно з рис. 6.4, б, поперечна сила вважається негативною. Існує інше тлумачення правила знака для поперечної сили: поперечна сила вважається позитивною, якщо вона намагається повернути усічену частину балки за годинниковою стрілкою відповідно до рис. 6.5, а, і негативною, якщо вона намагається повернути зрізану частину променя проти годинникової стрілки (рис. 6.5, б).

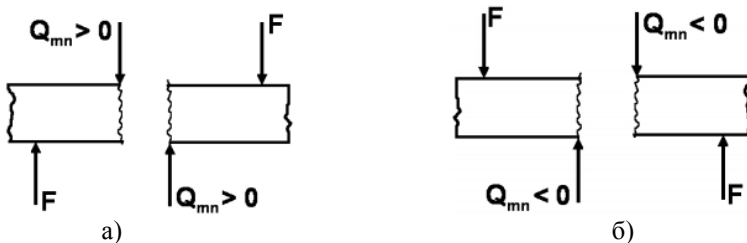


Рисунок 6.5 – Поперечна сила в перерізі балки $m - n$
(другий варіант трактування правила знаків)

Згинальний момент у поперечному перерізі балки $m - n$, зображеної на рис. 6.6, вважається позитивним, якщо той самий крутний момент зовнішніх сил спрямований за годинниковою стрілкою ліворуч від перерізу та праворуч проти годинникової стрілки, згідно з рис. 6.6, а. В іншому випадку згинальний момент вважається негативним (рис. 6.6, б). Моменти, зображені на рис. 6.6, а, згинають промінь опукло вниз, а моменти, зображені на рис. 6.6, б, вигинають промінь опукло вгору. Це створює більш зрозуміле правило знаків для врахування згинального моменту.

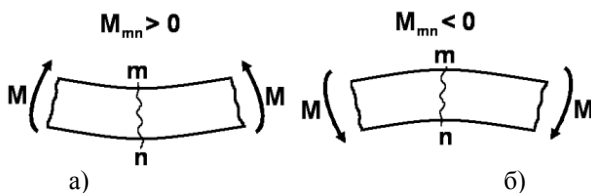


Рисунок 6.6 – Згинальний момент в перерізі балки $m - n$

Згинальний момент вважається додатним, якщо в перерізі, що розглядається, балка згинається випуклістю вниз. Волокна балки, які розташовані на увігнутій частині, є стиснутими, а на випуклій – розтягнені. Таким чином, за домовленості відкладати позитивні ординати епюри згинальних моментів догори від осі ми отримуємо побудову епюри з боку стиснутих волокон балки.

Ви можете легко встановити певні залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження, а саме: похідна поперечної сили по довжині балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження, похідний згинальний момент по довжині промінь дорівнює поперечній силі, запишіть так:

$$q = \frac{dQ_Y}{dz}, \quad Q_Y = \frac{dM_X}{dz}, \quad q = \frac{dQ_Y}{dz} = \frac{d^2M_X}{dz^2}.$$

Точність побудови епюр Y_q та M_x перевіряється умовним рухом уздовж осі балки лише зліва направо за допомогою набору правил, отриманих із вищезазначених залежностей, або безпосередньо методом розрізу. Пам'ятайте, що горизонтальна лінія – це лінія нульового порядку, скісна риска – це лінія першого порядку, а парабола – це крива другого порядку. Загалом, порядок функції, що описує закон зміни поперечної сили Y_q , на один менший від порядку функції, що позначає закон зміни згинального моменту M_x .

1. Якщо на ділянці балки немає розподілу навантаження ($q = 0$), діаграма Q_y є прямою, паралельною осі балки, тобто $Q_y = \text{const}$. У цьому випадку похідна дорівнює нулю, тому функція залишається сталою. З останнього випливає, що діаграма крутного моменту в цьому розділі є косою прямою, тому функція M_x є лінійною.

2. Якщо навантаження ($q \neq 0$) розподілено по перетину балки, то діаграма Q_y є похилою лінією, а діаграма M_x – параболою (крива другого порядку). У цьому випадку похідна (q) є постійною, тому функція (Q_y) є лінійною. З останнього випливає, що функція M_x є квадратичною.

3. Якщо згинальний момент збільшується на перетині $Q_y > 0$, якщо $Q_y < 0$, згинальний момент зменшується, якщо $Q_y = 0$, згинальний момент постійний (чистий вигин).

4. Якщо поперечна сила, яка постійно змінюється, проходить через нульове значення, згинальний момент у відповідному поперечному перерізі має край (максимальний чи мінімальний). У разі зміни знака сили Q_y з «-» на «+» згинальний момент досягає мінімуму, у разі зміни знака сили Q_y з «+» на «-» згинальний момент досягає максимального.

5. За наявності концентрованої сили на діаграмі Q_y відбувається стрибок у напрямку застосування цієї сили, однаковий за величиною. На площині M_x відбувається різка зміна кута нахилу (руйнування поверхні) суміжних ділянок поверхні.

6. Якщо розподілене навантаження спрямоване вниз, парабола, що представляє діаграму M_x , спрямована з опуклістю вгору, тобто у бік навантаження. Справедливе і протилежне правило, тобто напрямок дії розподіленого навантаження та опуклість параболи завжди протилежні.

7. У поперечному перерізі на вільному або шарнірному кінці балки згинальний момент M_x дорівнює нулю, якщо немає зовнішнього крутного моменту.

8. Поперечна сила Q_y на лівому промені дорівнює за розміром і знаком зовнішній силі (активна чи реактивна), праворуч – за розміром і протилежна за знаком зовнішній силі (активна чи реактивна).

9. Якщо застосувати зовнішній момент до променя, у діаграмі M_x відбувається стрибок, рівний за величиною цьому моменту.

6.1. Завдання до задачі № 5

Для бруса, зображеного на схемі та навантаженого зовнішніми факторами, необхідно побудувати епюру поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_x . (рис. 6.7, табл. 6.1).

Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)

Таблиця 6.1 – Вихідні дані до задачі № 5

№	№ схеми	l_1 , м	l_2 , м	α	β	M , кН·м	q , кН/м	F , кН
1	1	2,50	6,00	0,440	0,260	4,00	20,0	60,0
2	2	2,60	6,20	0,420	0,280	4,50	19,0	55,0
3	3	2,70	6,30	0,400	0,300	5,00	18,0	50,0
4	4	2,80	6,40	0,380	0,320	5,50	17,0	45,0
5	5	2,90	6,60	0,360	0,340	6,00	16,0	40,0
6	6	3,00	6,80	0,340	0,360	6,50	15,0	35,0
7	7	3,10	7,00	0,320	0,380	7,00	14,0	30,0
8	8	3,20	7,20	0,300	0,400	7,50	13,0	25,0
9	9	3,30	7,40	0,280	0,420	8,00	12,0	20,0
0	10	3,40	7,60	0,260	0,440	8,50	11,0	15,0

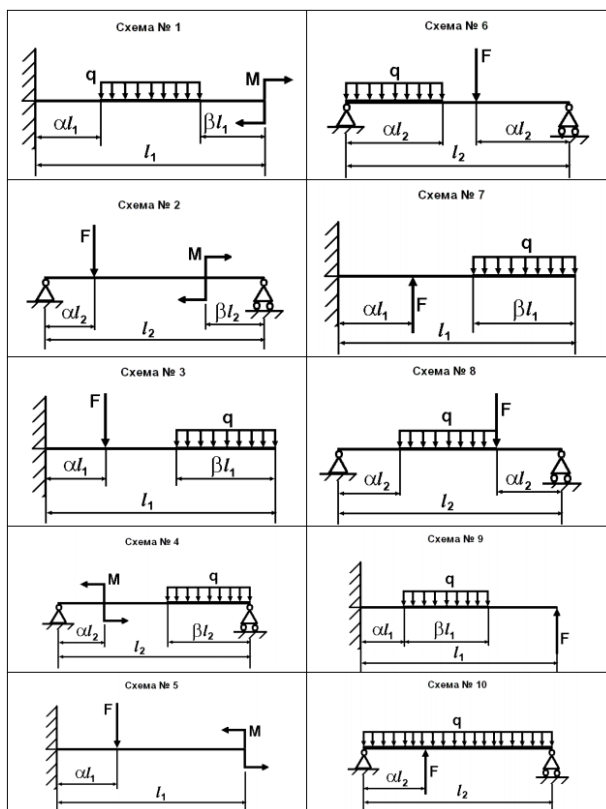


Рисунок 6.7 – Схеми навантаження брусу

6.2. Приклад виконання завдання – консольна балка

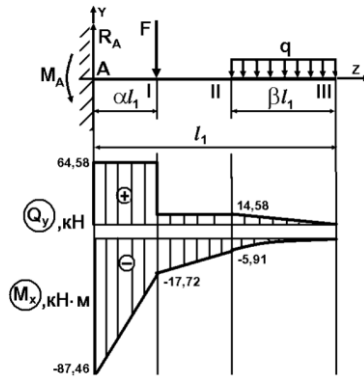


Рисунок 6.8 – Схема навантаження балки та епюри сили і моменту

Числові дані: $l_1 = 2,70$ м, $\alpha = 0,40$, $\beta = 0,30$, $F = 50,0$ кН, $q = 18,0$ кН/м.

Розв’язання

Позначимо опір А, у якого еталонними реакціями є R_A , а момент згинання – M_A . Ми спрямовуємо їх у позитивному напрямку осі Y , і значення визначатимуться відповідно до умови рівноваги: сума проєкцій сили на вісь Y дорівнює нулю, сума моментів сили та концентрованих моментів щодо точки А дорівнюють нулю (рис. 6.8):

$$\sum_i F_i = 0, \quad R_A - F - q \cdot \beta l_1 = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} R_A &= F + q \cdot \beta l_1 = 50 + 18 \cdot 2,7 \cdot 0,30 = 64,58 \text{ кН.} \\ \sum_i M_{iA} &= 0, \quad M_A - F \cdot \alpha l_1 - q \cdot \beta l_1 \left(l_1 - \frac{\beta l_1}{2} \right) = 0, \\ M_A &= F \cdot \alpha l_1 + q \cdot \beta l_1 \left(l_1 - \frac{\beta l_1}{2} \right) = F \cdot \alpha l_1 + q \cdot \beta l_1^2 \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= 50 \cdot 0,4 \cdot 2,7 + 18 \cdot 2,7^2 \cdot 0,30 \cdot (1 - 0,15) = 87,46 \text{ кН} \cdot \text{м.} \end{aligned}$$

Знак «+» вказує на те, що напрямок дії контрольних реакцій обрано правильно. У разі, якщо будь-яка контрольна реакція буде негативною після визначення, її напрямок слід змінити, залишивши лише числове значення на модуль. Аналіз напруженого стану балки проводиться на ділянках від вільного краю до твердого фундаменту – опори А.

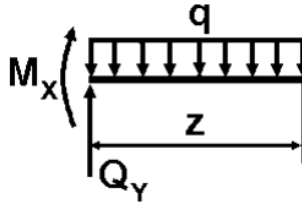


Рисунок 6.9 – Схеми сил і моменту на ділянці III

Напрямок дії поперечної сили і згинальний момент у будь-якому перерізі на будь-якому перетині вибирається з урахуванням правил знака. Якщо Q_y після розрахунку буде позитивним, це буде так на діаграмі. Те саме стосується згинального моменту M_x .

Ділянка III: $0 \leq z \leq \beta l_1$ (рис. 6.9).

У перерізі діють поперечна сила Q_y та згинальний момент M_x . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$Q_y - q \cdot z = 0,$$

звідки

$$Q_y = q \cdot z.$$

При $z = 0$ маємо $Q_y = 0$ кН,

при $z = \beta l_1$ маємо $Q_y = q \cdot \beta l_1 = 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 14,58$ кН.

Згинальний момент:

$$-M_x - q \cdot \frac{z^2}{2} = 0,$$

звідки

$$M_x = -q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

При $z = 0$ маємо $M_x = 0$ кН·м,

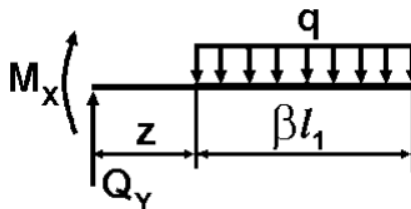


Рисунок 6.10 – Схема сил і моменту на ділянці II перерізу

при $z = \beta l_1$ маємо $M_X = -q \cdot \frac{(\beta l_1)^2}{2} = -18 \cdot \frac{0,30^2 \cdot 2,7^2}{2} = -5,91 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Ділянка II: $0 \leq z \leq l_1(1 - \alpha - \beta)$ (рис. 6.10)

У перерізі діють поперечна сила Q_Y та згинальний момент M_X . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки

Поперечна сила:

$$Q_Y - q \cdot \beta l_1 = 0,$$

звідки

$$Q_Y = q \cdot \beta l_1.$$

При $z = 0$ маємо $Q_Y = q \cdot \beta l_1 = 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 14,58 \text{ кН}$,

при $z = (1 - \alpha - \beta)$ маємо $Q_Y = q \cdot \beta l_1 = 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 14,58 \text{ кН}$.

Згинальний момент:

$$-M_X - q \cdot \beta l_1 \cdot \left(\frac{\beta l_1}{2} + z \right) = 0,$$

звідки

$$M_X = -q \cdot \beta l_1 \cdot \left(\frac{\beta l_1}{2} + z \right).$$

При $z = 0$ маємо $M_X = -q \cdot \frac{(\beta l_1)^2}{2} = -18 \cdot \frac{0,30^2 \cdot 2,7^2}{2} = -5,91 \text{ кН} \cdot \text{м}$,

при $z = (1 - \alpha - \beta)$ маємо $M_X = -q \cdot \beta l_1 \cdot \left(\frac{\beta l_1}{2} + l_1(1 - \alpha - \beta) \right) =$

$$-q \cdot \beta l_1^2 \cdot \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) = -18 \cdot 0,30^2 \cdot 2,7^2 \cdot (1 - 0,40 - 0,15) = -17,72 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

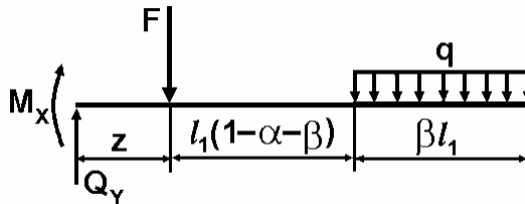


Рисунок 6.11 – Схема сил і моменту на ділянці I

Ділянка I: $0 \leq z \leq \alpha l_1$ (рис. 6.11).

У перерізі діють поперечна сила Q_Y та згинальний момент M_X . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$Q_Y - F - q \cdot \beta l_1 = 0,$$

звідки

$$Q_Y = F + q \cdot \beta l_1.$$

При $z = 0$ маємо $Q_Y = F + q \cdot \beta l_1 = 50 + 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 64,58 \text{ кН}$,

при $z = \alpha l_1$ маємо $Q_Y = F + q \cdot \beta l_1 = 50 + 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 64,58 \text{ кН}$.

Згинальний момент:

$$-M_X - F \cdot z - q \cdot \beta l_1 \cdot \left(l_1 \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) + z \right) = 0,$$

звідки

$$M_X = -F \cdot z - q \cdot \beta l_1 \cdot \left(l_1 \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) + z \right).$$

При $z = 0$ маємо $M_X = -q \cdot \beta l_1^2 \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) = -18 \cdot 0,30^2 \cdot 2,7^2 \cdot (1 - 0,40 - 0,15) = -17,72 \text{ кН} \cdot \text{м}$,

при $z = \alpha l_1$ маємо $M_X = -F \cdot \alpha l_1 - q \cdot \beta l_1^2 \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) = -50 \cdot 0,4 \cdot 2,7 - 18 \cdot 2,7^2 \cdot 0,30 \cdot (1 - 0,15) = -87,46 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Максимальний згинальний момент для цієї конструкції дорівнює $M_{max} = 87,46 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 6.8).

6.3. Приклад виконання завдання – шарнірно-оперта балка

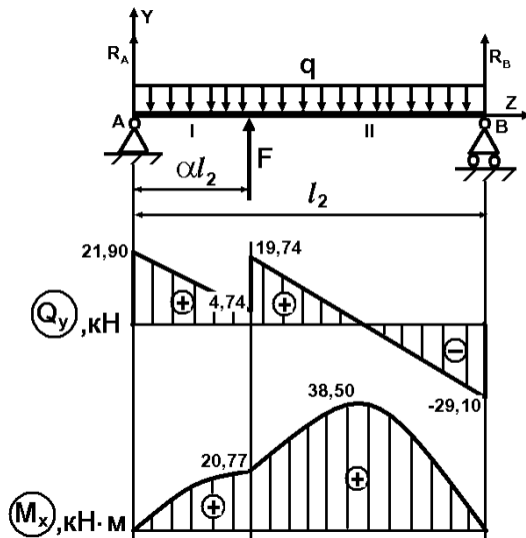


Рисунок 6.12 – схема навантаження балки та епюри сили і моменту

Числові дані: $l_2 = 6,00 \text{ м}$, $\alpha = 0,26$, $F = 15,0 \text{ кН}$, $q = 11,0 \text{ кН/м}$.

На рис. 6.12 позначаємо носії A і B, які мають відповідні реакції опори R_a та R_b . Ми спрямуємо їх у позитивному напрямку осі Y, а значення визначатимуться за умов рівноваги балки: сума проєкцій сил

на вісь Y дорівнює нулю та сума моментів сил, а концентровані моменти щодо точки A дорівнюють нулю:

$$\sum_i F_i = 0, \quad R_A + R_B + F - q \cdot l_2 = 0.$$

$$\sum_i M_{iA} = 0, \quad R_B \cdot l_2 - q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} + F \cdot \alpha l_2 = 0.$$

$$R_B = \frac{1}{l_2} \left(q \cdot \frac{l_2^2}{2} - F \cdot \alpha l_2 \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{11 \cdot 6^2}{2} - 15 \cdot 0,26 \cdot 6 \right) = 29,10 \text{ кН.}$$

$$R_A = q \cdot l_2 - R_B - F = 11 \cdot 6 - 29,10 - 15 = 21,90 \text{ кН.}$$

Знак «+» для певних опорних реакцій R_A і R_B вказує на те, що напрямки їх дії обрані правильно. Аналіз напруги балки проводиться на ділянках, що рухаються від опори A до опори B .

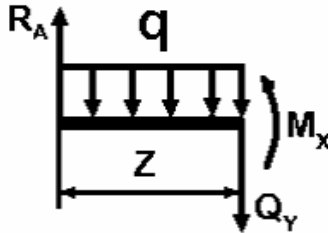


Рисунок 6.13 – Схема сил і моменту на ділянці I

Наголошуємо, що напрямки дії поперечної сили та згинальний момент у будь-якому перерізі на будь-якому перетині вибирається згідно з правилами знака. Якщо Q_y після розрахунку буде позитивним, це буде так на діаграмі. Те саме стосується згинального моменту M_x .

Ділянка I: $0 \leq z \leq \alpha l_2$ (рис. 6.13).

У перерізі діють поперечна сила Q_y та згинальний момент M_x . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$-Q_y + R_A - q \cdot z = 0,$$

звідки

$$Q_y = R_A - q \cdot z.$$

При $z = 0$ маємо $Q_y = R_A = 21,90$ кН,

при $z = \alpha l_2$ маємо $Q_y = R_A - q \cdot \alpha l_2 = 21,90 - 11 \cdot 0,26 \cdot 6 = 4,74$ кН.

Згинальний момент:

$$M_x - R_A \cdot z + q \cdot \frac{z^2}{2} = 0, \text{ звідки } M_x = R_A \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)

При $z = 0$ маємо $M_X = 0$ кН·м,
при $z = \alpha l_2$ маємо

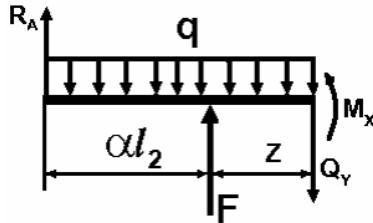


Рисунок 6.14 – Схема сил і моменту на ділянці II

$$M_X = R_A \cdot \alpha l_2 - q \cdot \frac{(\alpha l_2)^2}{2} = 21,90 \cdot 0,26 \cdot 6 - 11 \cdot \frac{(0,26 \cdot 6)^2}{2} = 20,77 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка II: $0 \leq z \leq l_2 - \alpha$ (рис. 6.14).

У перерізі діє поперечна сила Q_Y та згинальний момент M_X . Для їхнього визначення необхідно записати умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$-Q_Y + R_A + F - q \cdot (\alpha l_2 + z) = 0,$$

звідки

$$Q_Y = R_A + F - q \cdot (\alpha l_2 + z).$$

При $z = 0$ маємо

$$Q_Y = R_A + F - q \cdot \alpha l_2 = 21,90 + 15 - 11 \cdot 0,26 \cdot 6 = 19,74 \text{ кН},$$

при $z = l_2(1 - \alpha)$ маємо

$$Q_Y = R_A + F - q \cdot l_2 = 21,90 + 15 - 11 \cdot 6 = -29,10 \text{ кН}.$$

Згинальний момент:

$$M_X - R_A \cdot (\alpha l_2 + z) - F \cdot z + q \cdot \frac{(\alpha l_2 + z)^2}{2} = 0,$$

звідки

$$M_X = R_A \cdot (\alpha l_2 + z) + F \cdot z - q \cdot \frac{(\alpha l_2 + z)^2}{2}.$$

При $z = 0$ маємо

$$M_X = R_A \cdot \alpha l_2 - q \cdot \frac{(\alpha l_2)^2}{2} = 21,90 \cdot 0,26 \cdot 6 - 11 \cdot \frac{(0,26 \cdot 6)^2}{2} = 20,77 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

при

$$z = l_2(1 - \alpha)$$

маємо

$$M_X = R_A \cdot l_2 + F \cdot l_2(1 - \alpha) - q \cdot \frac{l_2^2}{2} = 21,90 \cdot 6 + 15 \cdot 6 \cdot 0,74 - 11 \cdot \frac{6^2}{2} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальний згинальний момент у конструкції діє в поперечному перерізі, де поперечна сила $Q_Y = 0$ (див. рис. 6.12). У розділі II

поперечна сила змінює знак з «+» на «-», тому в цій області потрібно вказати значення z^* , де $Q_Y = 0$.

$$Q_Y = R_A + F - q \cdot (\alpha l_2 + z_*) = 0,$$

звідки

$$z_* = \frac{R_A + F - q \cdot \alpha l_2}{q} = \frac{21 + 15 - 11 \cdot 0,26 \cdot 6}{11} = 1,79 \text{ м.}$$

Тому:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= R_A \cdot (\alpha l_2 + z_*) + F \cdot z_* - q \cdot \frac{(\alpha l_2 + z_*)^2}{2} = \\ &= 21,90 \cdot (0,26 \cdot 6 + 1,79) + 15 \cdot 1,79 - 11 \cdot \frac{(0,26 \cdot 6 + 1,79)^2}{2} = 38,50 \text{ кН} \cdot \text{м.} \end{aligned}$$

Ми використовуємо наведені вище правила для перевірки правильності поперечної площини сили Q_y та моменту M_x . Шарнірна балка балки за відсутності концентрованого крутного моменту в балках дає в лівій і правій ділянках $M_a = M_b = 0$ кН · м. Схема Q_y є похилою лінією через наявність на всій довжині балки розподіленого навантаження $q = \text{const}$. Його напрямок вниз визначає характер схеми M_x , яка є параболою, спрямованою вгору до дії q . У місці прикладання зосередженої сили на поверхню Q_y відбувається стрибок величини сили F у напрямку її дії. У цьому розділі на діаграмі M_x з'являється перелом. По краях дужки ліворуч переріз $Q_y = R_a$, а праворуч $Q_y = -R_b$. Частина структури, де $Q_y > 0$, момент M_x збільшується, на частині структури, де $Q_y < 0$, момент M_x зменшується. У разі зміни символу з «+» на «-» на площині M_x визначається його максимум.

7. Задача № 6.

Сумісна дія згину з крученням

Теоретичні відомості

Більшість валів, прямі балки круглого або кільцевого перерізу, відчувають як кривизну, так і кручення.

Комбіноване згинання на кручення – це тип комплексного опору, за якого зовнішні сили, що діють на балку, викликають такі внутрішні силові фактори: крутний момент, згинальні моменти та поперечні сили.

Під впливом згинання та скручування в поперечному перерізі балки нормальні напруження створюються від згинального моменту у двох площинах і дотичних напружень через крутильних та поперечних сил.

У процесі розрахунку вала враховуйте крутний момент і моменти згинання. Поперечні сили не враховуються, оскільки відповідні дотичні напруження відносно малі.

У поєднанні згинання та скручування матеріальний елемент у небезпечній секції знаходиться у прямому стані натягу (рис. 7.1).

Максимальні нормальні та дотичні напруження для круглих валів визначаються за формулами:

$$|\sigma_{\alpha}| = \frac{M_{зг}}{W_0} = \frac{32M_{зг}}{\pi \cdot d^3}; \quad (7.1)$$

$$|\tau_{\alpha}| = \frac{M_{кр}}{W_P} = \frac{16M_{кр}}{\pi \cdot d^3}, \quad (7.2)$$

де $W_P = \frac{W_0}{2}$; $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$, закон парності дотичних напружень.

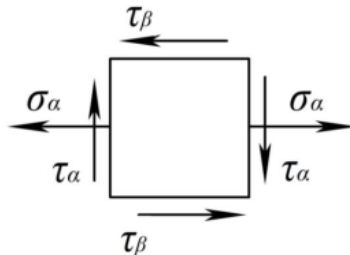


Рисунок 7.1 – Небезпечний перетин у плоскому напруженому стані

Нормальні та дотичні напруги досягають максимального значення на поверхні вала.

Щоб визначити момент згинання, розглянемо вигин вала у двох взаємно перпендикулярних площинах – у вертикальній та горизонтальній. Накресліть схеми згинальних моментів у двох площинах і разом. Значення згинальних моментів у типових перетинах зводяться до загальної (еквівалентної) за формулою:

$$M_{3Г} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}. \quad (7.3)$$

Небезпечні перетини вала визначають співставленням епюр сумарних згинальних моментів і крутного моменту. Небезпечними є перетини, де $M_{zг}$ і $M_{кр}$ одночасно досягають найбільших значень.

За одночасної дії нормальних і дотичних напружень міцність матеріалу оцінюють за однією з теорій міцності.

Теорії міцності використовуються за призначенням, тобто перша і друга теорії – для крихких матеріалів, третя і четверта – для пластмас; Теорії Мори та Писаренка – Лебедева – для матеріалів з різними межами текучості під час напруженні та стисненні.

Розрахунок міцності вала за комплексного опору проводиться на зведеному (еквівалентному, розрахунковому) моменті M_p (Meq). Його визначають відповідно до прийнятої теорії:

- за 3-ю теорією міцності (найбільших дотичних напружень):

$$M_p = \sqrt{M_{3Г}^2 + M_{кр}^2}; \quad (7.4)$$

- за 4-ю теорією міцності (енергетичною):

$$M_p = \sqrt{M_{3Г}^2 + 0,75M_{кр}^2}. \quad (7.5)$$

Умова міцності за сумісної дії згину з крученням

$$\sigma_{екв} = \frac{M_p}{W_0} = \frac{32M_p}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma], \quad (7.6)$$

де $\sigma_{екв}$ – еквівалентне (розрахункове) нормальне напруження;

W_0 – осьовий момент опору перетину бруса, для круглого поперечного перетину $W_0 = \pi \cdot d^3/32$.

У перевірних розрахунках вала на згин з крученням визначають коефіцієнт запасу міцності як відношення границі текучості σ_T до еквівалентного напруження, визначеного за відповідною теорією міцності:

$$S_M = \sigma_T / \sigma_{екв} \quad (7.7)$$

або

$$S_M = \frac{S_\sigma \cdot S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}} \quad (7.8)$$

де S_σ, S_τ – коефіцієнти запасу міцності відповідно під час згину та кручення, $S_\sigma = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}}, S_\tau = \frac{\tau_T}{\tau_{max}}$.

7.1. Завдання до задачі № 6

Розрахунок вала на згин з крученням

Сталевий вал передачі обертається з частотою n обертів за хвилину і передає через два ролики передачі з приводним ременем потужності, які зазначені в таблиці до задачі 6. Діаметр роликів $D_1 = 60$ см, $D_2 = 40$ см, $D_3 = 30$ см; відстань $a = 100$ см; матеріал – сталь 45; $[\sigma] = 100$ МПа. Визначте діаметр вала за умовою міцності (рис. 7.2; табл. 7.1).

План розв’язування задачі:

1. Визначте потужність на шківі (з умови балансу потужностей), де вона не задана.
2. Встановіть скручувальні моменти на кожному шківі, крутні моменти на ділянках вала й побудувати епюру крутних моментів.
3. Розрахуйте тиск, що передається кожним шківом на вал, вважаючи, що натяг тягової вітки паса у два рази більший, ніж натяг веденої.
4. Знайдіть величини складових сил тиску, що діють у горизонтальній і вертикальній площинах.
5. Побудуйте епюри згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
6. Встановіть сумарні згинальні моменти у характерних перетинах вала. Побудувати схему сумарних згинальних моментів.
7. Знайдіть розрахунковий момент, користуючись третьою теорією міцності.
8. Обчисліть діаметр вала з умови міцності.

Таблиця 7.1 – Вихідні дані до задачі № 6

№ з/п	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	$\alpha_3, ^\circ$	$n, \text{об/хв}$	$P_1, \text{кВт}$	$P_2, \text{кВт}$	$P_3, \text{кВт}$
1	0	270	360	150	–	10	20
2	90	0	180	100	10	–	20
3	180	270	0	200	10	20	–
4	270	360	0	300	–	30	40
5	360	0	90	400	30	–	40
6	0	90	180	500	30	40	–
7	90	180	270	600	–	50	60
8	180	270	360	700	50	–	60
9	270	360	0	800	50	60	–
0	90	0	180	900	–	90	50

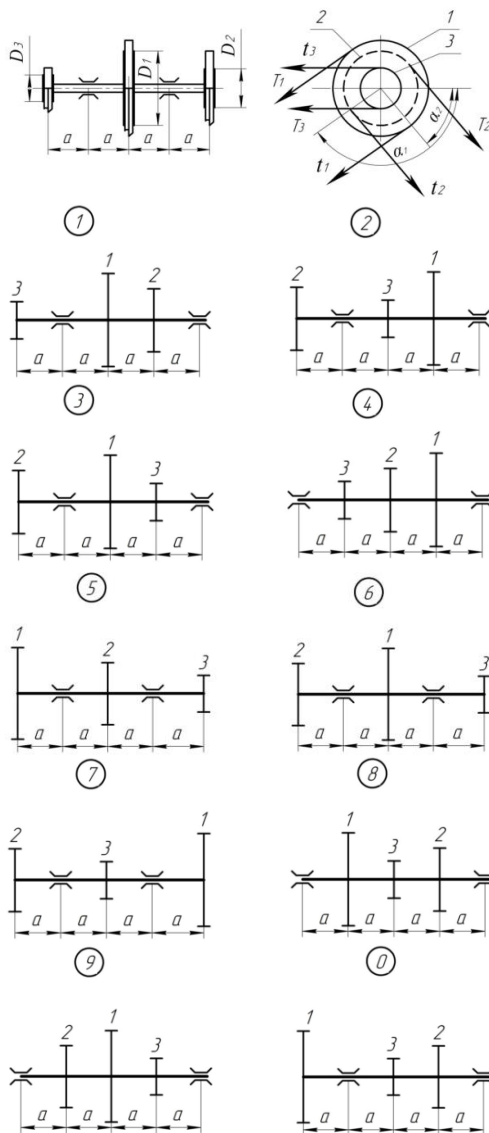


Рисунок 7.2 – Схеми навантаження та конструкції вала

7.2. Приклад виконання завдання

Розрахунок вала на згин з крученням

Сталевий трансмісійний вал обертається з частотою $n = 300$ об/хв і передає потужність $P_1 = 70$ кВт та $P_3 = 40$ кВт за допомогою двох приводних шківів ремінних приводів (рис. 7.2, а). Діаметр роликів $D_1 = 60$ см, $D_2 = 40$ см, $D_3 = 30$ см. Кути нахилу смуг $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 240^\circ$, $\alpha_3 = 180^\circ$ (на рис. 7.2, а кути нанесені від осі Y), відстань $a = 100$ см; матеріал – сталь 45, $[\sigma] = 200$ МПа. Визначте діаметр вала за умовою міцності.

Розв'язання

З балансу потужностей визначаємо потужність, яку передає тяговий шків:

$$P_2 = P_1 + P_3 = 70 + 40 = 110 \text{ кВт.}$$

Величини скручувальних моментів, які передають шківви, визначаємо за формулою:

$$M_i = P_i / \omega, (i = 1, 2, 3)$$

де ω – кутова швидкість вала, визначаємо її за формулою:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді моменти на шківвах:

$$M_1 = 70 / 31,4 = 2,23 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = 110 / 31,4 = 3,50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = 40 / 31,4 = 1,27 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Використовуючи метод перетинів, будуємо епюру крутних моментів, $M_{кр}$ (рис. 7.2, б). Визначаємо сили натягу пасових передач за формулою:

$$t_i = 2M_i / D_i.$$

$$t_1 = 2 \cdot 2,23 / 0,6 = 7,43 \text{ кН};$$

$$t_2 = 2 \cdot 3,50 / 0,4 = 17,5 \text{ кН};$$

$$t_3 = 2 \cdot 1,27 / 0,3 = 8,47 \text{ кН}.$$

Сили тиску на вал у місцях посадки шківів визначаємо за формулою:

$$F_i = 3t_i.$$

$$F_1 = 3 \cdot 7,43 = 22,3 \text{ кН};$$

$$F_2 = 3 \cdot 17,5 = 52,4 \text{ кН};$$

$$F_3 = 3 \cdot 8,47 = 25,4 \text{ кН}.$$

Розкладаємо сили тиску на вертикальні й горизонтальні складові:

$$F_{1Z} = -F_1 \cdot \sin 30^\circ = -22,3 \cdot \sin 30^\circ = -11,2 \text{ кН};$$

$$F_{1Y} = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 22,3 \cdot \cos 30^\circ = 19,3 \text{ кН};$$

$$F_{2Z} = F_2 \cdot \sin 60^\circ = 52,4 \cdot \sin 60^\circ = 45,4 \text{ кН};$$

$$F_{2Y} = -F_2 \cdot \cos 60^\circ = -52,4 \cdot \cos 60^\circ = -26,2 \text{ кН};$$

$$F_{3Z} = 0;$$

$$F_{3Y} = -F_3 = 25,4 \text{ кН}.$$

Розглянемо навантаження вала у вертикальній площині (рис. 7.2, в).

Вертикальні складові реакцій опор A і B визначаємо з рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum M_{BZ} = 0; & A_Z \cdot 4 - F_{2Z} \cdot 3 + F_{1Z} \cdot 2 = 0; \\ \sum M_{AZ} = 0; & -B_Z \cdot 4 - F_{1Z} \cdot 2 + F_{2Z} \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

звідки:

$$A_Z = \frac{45,4 \cdot 3 - 11,2 \cdot 2}{4} = 28,4 \text{ кН};$$

$$B_Z = \frac{45,4 - 11,2 \cdot 2}{4} = 5,8 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Z = -A_Z + F_{2Z} - F_{1Z} - B_Z = -28,4 + 45,4 - 11,2 - 5,8 = 0.$$

Визначаємо згинальні моменти у характерних перетинах вала у вертикальній площині:

$$M_Y^A = M_Y^B = 0;$$

$$M_Y^K = -A_Z \cdot 1 = -28,4 \cdot 1 = -28,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_Y^L = -A_Z \cdot 2 + F_{2Z} \cdot 1 = -28,4 \cdot 2 + 45,4 \cdot 1 = -11,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_Y^C = -B_Z \cdot 1 = -5,8 \cdot 1 = -5,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів вала у вертикальній площині (рис. 7.2, г).

Розглянемо навантаження вала у горизонтальній площині (рис. 7.2, д).

Визначаємо опорні реакції:

$$\begin{cases} \sum M_{BY} = 0; & -A_Y \cdot 4 - F_{2Y} \cdot 3 - F_{1Y} \cdot 2 + F_{3Y} \cdot 1 = 0; & A_Y = 16,4 \text{ кН}; \\ \sum M_{AY} = 0; & B_Y \cdot 4 - F_{3Y} \cdot 3 + F_{1Y} \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 1 = 0. & B_Y = 15,9 \text{ кН}. \end{cases}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum Y &= A_Y - F_{2Y} + F_{1Y} - F_{3Y} + B_Y = 16,4 - 26,2 + 19,3 - 25,4 + 15,9 = \\ &= 51,6 - 51,6 = 0. \end{aligned}$$

**Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)**

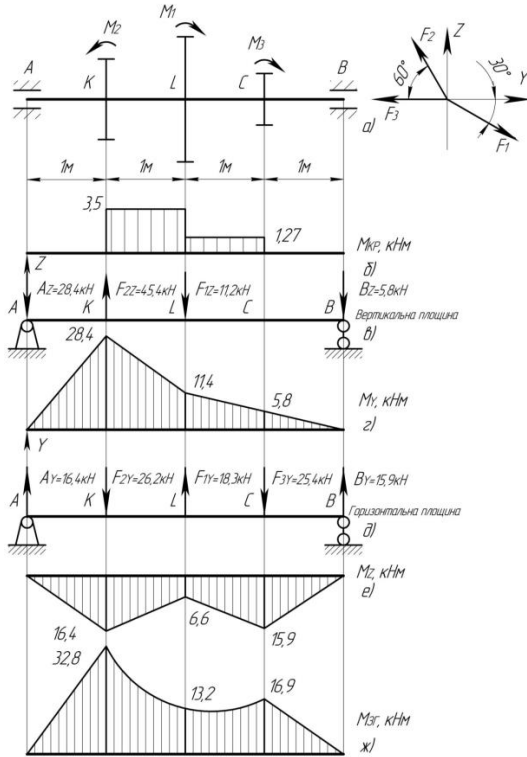


Рисунок 7.2 – Схема сталюго валу трансмісії та його епюри навантаження

Визначаємо згинальні моменти у характерних перетинах валу у горизонтальній площині:

$$M_Z^A = M_Z^B = 0;$$

$$M_Z^K = A_Y \cdot 1 = 16,4 \cdot 1 = 16,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_Z^L = A_Y \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 1 = 16,4 \cdot 2 - 26,2 \cdot 1 = 6,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_Z^C = B_Y \cdot 1 = 15,9 \cdot 1 = 15,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Побудуємо епюру згинальних моментів валу у горизонтальній площині яка зображена на рис. 7.2, е.

Визначаємо сумарні значення згинальних моментів у характерних перетинах валу за формулою:

$$M_{3Г} = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}.$$

Визначимо:

$$\begin{aligned}M_{3\Gamma}^A &= M_{3\Gamma}^B = 0; \\M_{3\Gamma}^K &= \sqrt{28,4^2 + 16,4^2} = 32,8 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\M_{3\Gamma}^L &= \sqrt{11,4^2 + 6,6^2} = 13,2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\M_{3\Gamma}^C &= \sqrt{5,8^2 + 15,9^2} = 16,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Побудуйте діаграму загальних згинальних моментів вала згідно з рис. 7.2, ж.

З аналізу діаграм $M_{кр}$, зображених на рис. 7.2, б та $M_{зг}$, зображених на рис. 7.2, ж, визначте небезпечний ділянку – тобто ділянку К, у якому: $M_{зг} = 32,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_{кр} = 3,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Розрахований момент визначається третьою теорією потужності:

$$M_P = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{32,8^2 + 3,5^2} = 33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

З умови міцності за сумісної дії згину з крученням:

$$\sigma_{\text{екв}} = \frac{M_P}{W_0} = \frac{32M_P}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$$

визначаємо діаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_P}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 33,0}{\pi \cdot 200 \cdot 10^3}} = 119 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

8. Задача № 7.

Стійкість центральностиснених стержнів

Теоретичні відомості

Умови міцності та жорсткості доповнюються умовою стійкості, що забезпечує збереження первісної форми балансу конструкції або окремих її елементів під впливом зовнішніх навантажень. Навантаження, за яких втрачається стійкість, називаються критичними, а відповідні – критичними.

Ризик втрати стійкості виникає через тонкостінні конструкції, такі як гнучкі прутки, довгі стислі прутки, плити та оболонки.

Критична сила – це максимальне значення сили стискування, що діє в центрі, за якої прямокутна форма рівноваги стержня стабільна.

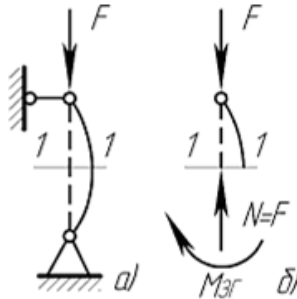


Рисунок 8.1 – Схема навантаження стержня і поперечного згину.

Згин, пов'язаний із втратою стійкості стержнем прямолінійної форми, називають поздовжнім згином.

Унаслідок викривлення осі у поперечних перетинах стержня виникають два внутрішні силові фактори – поздовжня сила $N = F$ і згинальний момент $M_{зг}$ (рис. 8.1). Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску

Визначення критичних навантажень є важливою частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості:

$$n_{ст} = F_{кр}/F. \quad (8.1)$$

Для забезпечення стійкості необхідно, щоб зусилля стискання F , що діє на шток, було меншим за критичний $F_{кр}$. Стійкість стержня достатня, якщо $n_{ст} > 1$. Значення коефіцієнта стійкості залежить від призначення стержня та його матеріалу. Для сталей $n_{ст} = 1,8-3$; для чавуну $n_{ст} = 5-5,5$; для дерева $n_{ст} = 2,8-3,2$.

Баланс абсолютно твердого тіла може бути стабільним, байдужим і нестійким. Те саме можна віднести до деформованого тіла.

Довгий стрижень під впливом осьового стискаючого навантаження відчуває три форми рівноваги: стабільну, байдужу та нестійку.

Стиснутий стрижень знаходиться у стані стабільної рівноваги (рис. 8.2,а), якщо сила стискання F не перевищує критичного значення F . Це означає, що якщо шток злегка зігнутий через деяке поперечне навантаження, то це навантаження знімається, шток знову вирівнюється і повернеться у вихідне положення.

Форма рівноваги стисненого стержня є байдужою (рис. 8.2,б), якщо сила стиску досягає певного значення, яке дорівнює критичній силі. За незначного відхилення від початкового положення, під дією поперечної сили стержень назад не повертається.

За значення стискаючої сили, яке перевищує критичне, прямолінійна форма рівноваги стержня стає нестійкою, стержень втрачає свою початкову форму (рис. 8.2, в).

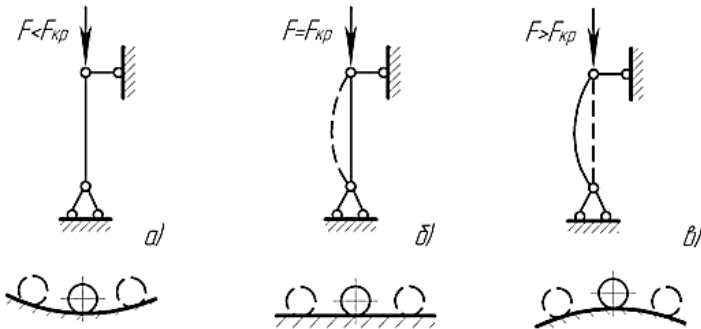


Рисунок 8.2 – Форми рівноваги стисненого стержня

Втрата стійкості штока також може статися, якщо напруга під впливом критичної сили не досягло межі пропорційності.

Мінімальне значення сили стискання, за якого шток втрачає здатність зберігати форму прямокутника, називається критичним значенням, позначеним $F_{кр}$.

Проблему визначення величини критичної сили вперше вирішив академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер у 1744 р. Формула Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (8.2)$$

де E – модуль пружності I-го роду;

I_{min} – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перетину стержня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, залежить від способу закріплення кінців стержня;

l – довжина стержня.

Варіанти закріплення кінців стержня зображено на рис. 8.3:

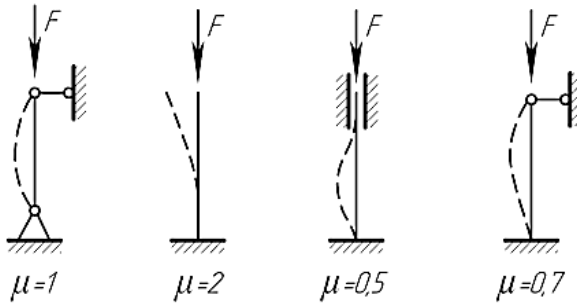


Рисунок 8.3 – Варіанти закріплення кінців стержня

Межі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського

Формула Ейлера виведена з диференціального рівняння кривої осі стержня з шарнірними кінцями. Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який діє до тих пір, поки напруга в матеріалі не перевищить межу пропорційності.

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}; \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2} \leq \sigma_{пц}; \quad (8.3)$$

де A – площа поперечного перетину стержня;

λ_{max} – максимальна гнучкість стержня, залежить від геометрії стержня, способів закріплення його кінців. Визначають її за формулою:

$$\lambda_{max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}, \quad (8.4)$$

де i_{min} – мінімальний радіус інерції поперечного перетину стержня, залежить від геометричних параметрів, визначають його за формулою:

$$i_{min} = \sqrt{I_{min}/A}. \quad (8.5)$$

Формулу Ейлера використовують при гнучкостях, які більші за граничну гнучкість стержня λ_0 , яка залежить від матеріалу стержня і визначають її за формулою:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{nc}}}. \quad (8.6)$$

Формулу Ейлера застосовують тоді, коли гнучкість стержня більша або дорівнює граничній гнучкості матеріалу, з якого його виготовлено:

$$\lambda_{max} \geq \lambda_0. \quad (8.7)$$

Як приклад, можна визначити граничну гнучкість для маловуглецевої сталі Ст. 3, для якої $\sigma_{nc} = 200 \text{ МПа}$, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6}} = 100. \quad (8.8)$$

Для стержнів з маловуглецевої сталі формулу Ейлера застосовують, якщо їх гнучкість $\lambda \geq 100$. Аналогічно визначають граничну гнучкість для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_0 = 80$; для дерева $\lambda_0 = 110$.

Якщо гнучкість стержнів менша від граничної, зокрема для сталей $\lambda = 40-100$, для визначення напружень застосовують емпіричну формулу Ясинського:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda_{max}, \quad (8.9)$$

де a, b – коефіцієнти, що залежать від матеріалу стержня. Для сталі Ст. 3 ці величини дорівнюють: $a = 310 \text{ МПа}$; $b = 1,14 \text{ МПа}$.

Якщо гнучкість $\lambda < 40$, стержні можна розраховувати на міцність за простого стиску, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто за формулою:

$$\sigma = F/A \leq [\sigma], [\sigma] = \sigma_T/n. \quad (8.10)$$

Графік залежності критичних напружень від гнучкості для стержнів, виготовлених із маловуглецевої сталі, зображено на рис. 8.4.

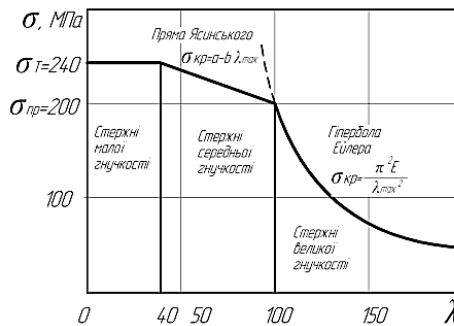


Рисунок 8.4 – Графік залежності критичних напружень від гнучкості

Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)

Будь ласка, зверніть увагу, що:

- за малих значень λ критична напруга дорівнює межі текучості $\sigma = \sigma_T$;
- за середніх значень λ критична напруга менша за межу текучості, але більша за межу пропорційності $\sigma_{кр} < \sigma_T$;
- за великих значень λ критична напруга менша за межу пропорційності $\sigma_{кр} < \sigma_{сп}$.

Значення критичної сили, яку можна прикласти до штока, отримують у такій послідовності:

- максимальна гнучкість λ_0 ;
- максимальна справжня гнучкість бруска λ_{max} .
- використовуйте λ_0 та λ_{max} для визначення однієї з таких формул для визначення критичних напруг:

- за $\lambda_{max} \geq \lambda_0$ формулу Ейлера, $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2}$;
- за $\lambda_{сп} \leq \lambda_{max} \leq \lambda_0$ формулу Ясинського, $\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda_{max}$,
- за $\lambda_{max} < \lambda_{сп}$, формулу на стиск, $\sigma_{кр} = \sigma_T$;

маючи $\sigma_{кр}$, знаходять $F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$.

Допустиме значення сили, прикладеної до стержня, визначають як:

$$[F] = F_{кр} / n_{ст}. \quad (8.11)$$

У розрахунках на стійкість критична напруга настільки ж руйнівна, як і міцність на розрив або межа міцності у розрахунках на міцність. Тому вводиться поняття допустимого напруження напруги $[\sigma_T]$, яке визначається як частина критичного напруження:

$$[\sigma_T] = \sigma_{кр} / n_{ст}. \quad (8.12)$$

Умова стійкості вимагає, щоб напруження, яке виникає під час стиску, не перевищувало допустимого напруження на стійкість:

$$\sigma = \frac{F_{max}}{A} \leq [\sigma_T]. \quad (8.13)$$

Проте обчислення допустимого напруження на стійкість ускладнюється внаслідок того, що критичне напруження залежить не лише від властивостей матеріалу, але й від гнучкості стержня. Тому введено поняття коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на міцність під час розрахунку на стійкість:

$$\varphi = \frac{[\sigma_T]}{[\sigma]}, \quad (8.14)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на міцність під час стиску, $[\sigma] = \sigma_T / n$.

Коефіцієнт φ для кожного матеріалу можна визначити за будь-якого значення гнучкості. Значення його для деяких матеріалів наведено у додатку А.

Отже, умова стійкості:

$$\sigma = \frac{F_{max}}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma]. \quad (8.15)$$

За допомогою умови стійкості розв'язують три типи задач.

1. Перевірний розрахунок. Перевірка стійкості, тобто виконання умови стійкості. Виконують у такій послідовності:

– встановлюється мінімальний момент інерції поперечного перетину стержня та мінімальний радіус інерції (за однакового закріплення у головних площинах);

– розраховується гнучкість стержня;

– обирають коефіцієнт зменшення головного допустимого напруження φ ;

– отримані дані підставляють до умови стійкості й перевіряють можливість її виконання.

2. Розрахунок допустимого навантаження з умови стійкості виглядає таким чином:

$$[F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A \quad (8.16)$$

Виконується аналогічно, крім останньої дії, замість якого обчислюють навантаження.

3. Спроба підбору поперечного перетину стержня або проектне обчислення.

Виконується це обчислення визначенням площі перетину з умови стійкості

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} \quad (8.17)$$

Єдиного рішення цієї проблеми немає, оскільки нерівність включає дві невідомі величини: площу поперечного перерізу A та коефіцієнт φ , який залежить від ще не визначених розмірів поперечного перерізу, його форми та довжини бруска. Розв'яжіть задачу методом послідовних наближень, перевіривши проміжні результати з умовою стійкості. У першому наближенні візьміть будь-яке значення коефіцієнта зменшення основної допустимої напруги, приблизно $\varphi = 0,5-0,6$.

Визначення розміру поперечного перерізу стержня під час стійкості ще більше ускладнюється тим, що заздалегідь невідомо, в якому діапазоні буде фактична гнучкість стержня, тобто яку з формул використовувати: Ейлера, Ясінського або просте стиснення.

8.1. Завдання до задачі № 7

Розрахунок на стійкість стисненого стержня

Для заданого стержня (рис. 8.5, табл. 8.1), визначити розміри поперечного перетину, критичну силу й коефіцієнт запасу стійкості.

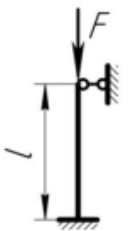
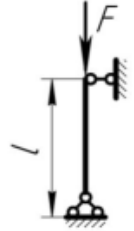
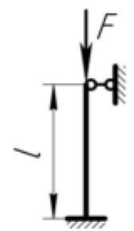
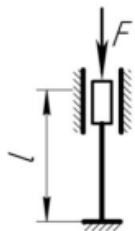
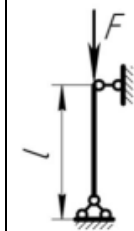

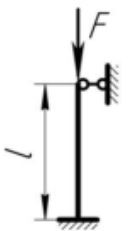
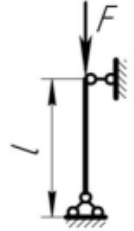
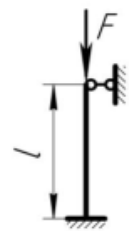
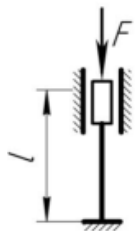
Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)

Розрахунок проводити послідовними наближеннями, попередньо задавшись коефіцієнтом зменшення основного допустимого напруження $\varphi = 0,5$. Матеріал стержня – сталь Ст. 3, $[\sigma] = 160\text{МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

План розв’язування задачі:

1. Накреслити задану схему, розмістивши перетин під стояком.
2. Визначити розміри поперечного перетину, користуючись таблицею коефіцієнтів зниження основного допустимого напруження, яка знаходиться у додатку.
3. Встановити критичну силу.
4. Розрахуйте коефіцієнт запасу стійкості.

Таблиця 8.1 – Вихідні дані до задачі № 7

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$F, \text{кН}$	800	200	300	400	500	200	300	400	500	600
$l, \text{м}$	2,40	2,80	2,50	3,00	2,40	2,80	2,50	3,00	2,50	3,00
Схема закріплення кінців стержня										

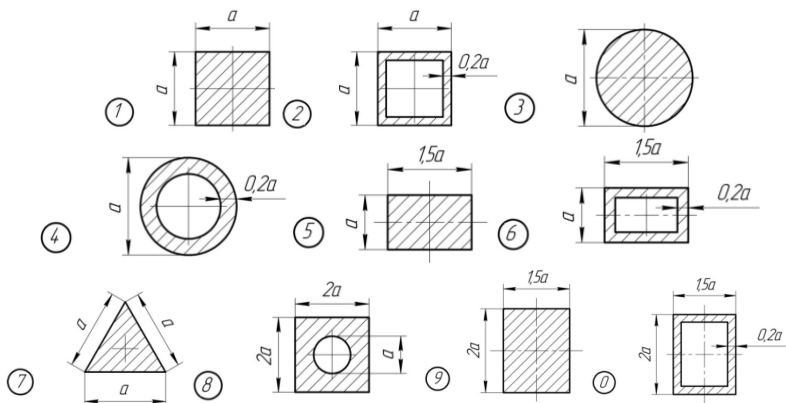


Рисунок 8.5 – Поперечні перетини стержня

8.2 Приклад виконання завдання

Розрахунок на стійкість стисненого стержня

Для поданого стержня, зображеного на рис. 8.6, визначте розміри поперечного перерізу, критичну силу та коефіцієнт її межі безпеки. Розрахунок проводиться з послідовними наближеннями, заданими основним допустимим коефіцієнтом зниження напруги $\phi_1 = 0,5$. Матеріал стержня – сталь Арт. 3, $[\sigma] = 160$ МПа; $F = 160$ кН; $l = 3$ м.

Розв'язання

Обчислення проводимо методом послідовних наближень. Перше наближення – приймаємо значення коефіцієнта поздовжнього згину $\phi_1 = 0,5$.

З умови стійкості визначаємо площу поперечного перетину стержня ми отримуємо:

$$A_1 \geq \frac{F}{\phi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 160} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

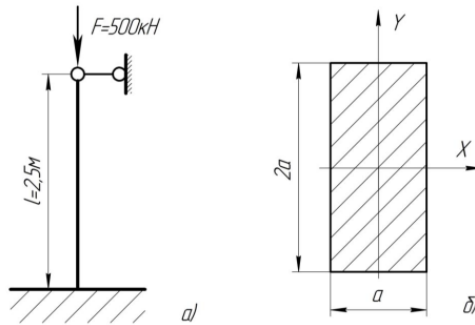


Рисунок 8.6 – Заданий стержень

Для заданого поперечного перетину, що зображено на рисунку 8.6, б, розраховуємо необхідні геометричні характеристики:

– площу перетину:

$$A = 2a \cdot a = 2a^2,$$

Звідки ми отримуємо

$$a = \sqrt{A/2};$$

**Прикладна механіка та основи конструювання
(розділ «Опір матеріалів»)**

- мінімальний осьовий момент інерції:

$$I_{min} = I_Y = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{6};$$

- мінімальний радіус інерції:

$$i_{min} = i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{6 \cdot 2a^2}} = 0,289a;$$

- максимальну гнучкість стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_Y} = \frac{0,7 \cdot 2,5}{0,289a} = \frac{6,06}{a},$$

де μ – коефіцієнт зведення довжини стержня, залежить від способу закріплення його кінців, для поданої схеми (див. рис. 8.5, а), $\mu = 0,7$.

Для першого наближення розрахуємо:

$$a_1 = \sqrt{\frac{62,5 \cdot 10^{-4}}{2}} = 5,59 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_1 = \frac{6,06}{5,59 \cdot 10^{-2}} = 108.$$

З таблиці значень коефіцієнтів поздовжнього згину (див. додаток А) знайдемо:

за $\lambda = 100$, $\varphi = 0,60$; за $\lambda = 110$, $\varphi = 0,52$.

Використовуючи метод лінійної інтерполяції, встановимо уточнене значення коефіцієнта поздовжнього згину, що відповідає гнучкості $\lambda_1 = 108$,

$$\varphi'_1 = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot 8 = 0,536.$$

Після цього необхідно провести перевірку на стійкість. Визначаємо дійсне і допустиме напруження:

$$\sigma_{д1} = \frac{F}{A_1} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{62,5 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{ст}]_1 = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0,536 \cdot 160 = 85,8 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає:

$$\frac{|[\sigma_{ст}]_1 - \sigma_{д1}|}{[\sigma_{ст}]_1} \cdot 100\% = \frac{85,8 - 80}{85,8} \cdot 100\% = 6,7\% > 5\%,$$

Це недопустимо.

Друге наближення, приймаємо:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,536}{2} = 0,518.$$

Проводимо розрахунки відповідно до першого наближення:

$$A_2 \geq \frac{500 \cdot 10^{-3}}{0,518 \cdot 160} = 60,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{60,3 \cdot 10^{-4}}{2}} = 5,49 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$
$$\lambda_2 = \frac{6,06}{5,49 \cdot 10^{-2}} = 110,$$

що відповідає $\varphi'_2 = 0,52$.

Дійсне напруження:

$$\sigma_{д2} = \frac{F}{A_2} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{60,3 \cdot 10^{-4}} = 82,9 \text{ МПа};$$

Допустиме напруження:

$$[\sigma_{ст}]_2 = \varphi'_2 \cdot [\sigma] = 0,52 \cdot 160 = 83,2 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає:

$$\frac{[\sigma_{ст}]_2 - \sigma_{д2}}{[\sigma_{ст}]_2} \cdot 100\% = \frac{83,2 - 82,9}{83,2} \cdot 100\% = 0,36\% < 5\%.$$

Отже, розмір перетину $a = 54,9$ мм.

Щоб встановити, за якою з формул (Ейлера чи Ясинського) проводити розрахунок критичної сили, визначаємо:

а) граничну гнучкість матеріалу стержня (матеріал – сталь Ст. 3):

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6}} \approx 100.$$

де E – модуль пружності, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа;

$\sigma_{пц}$ – границя пропорційності, $\sigma_{пц} = 200$ МПа;

б) дійсну гнучкість стержня:

$$\lambda_d = \frac{\mu \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 2,5}{0,289 \cdot 54,9 \cdot 10^{-3}} = 110.$$

Оскільки $\lambda_d = 110 > \lambda_0 = 100$, то критичну силу визначаємо за формулою Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot (5,49 \cdot 10^{-2})^4}{6(0,7 \cdot 2,5)} = 975 \text{ кН}.$$

Коефіцієнт запасу стійкості:

$$n_{ст} = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{975}{500} = 1,95.$$

Список використаної літератури

1. Довбуш А. Д. Прикладна механіка і основи конструювання: навчально-методичний посібник до розрахунково-графічної роботи / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик, Т.А. Довбуш, Н.А. Рубінець. – Тернопіль : ФОП Паляниця В. А., 2015. – 116 с.
2. Костюк В. С. Прикладна механіка та основи конструювання : навч. посібник / В. С. Костюк, Г. Р. Валіулін, Є. В. Костюк. – К. : Видавничий дім «Кондор», 2018. – 226 с., – 170 іл., 5 табл.
3. Міщенко І. В. Прикладна механіка. Розділ «Опір матеріалів». Методичні вказівки до виконання самостійної роботи / уклад. І. В. Міщенко, В. М. Халипа, Г. О. Чернобай. – Х. : УЦЗУ, 2007. – 76 с.

Додатки

Додаток А. Коефіцієнти зменшення основного допустимого значення

Гнучкість бруса $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Сталь марок Ст.ОС, Ст.2, Ст.3, Ст.4	Сталь Ст.5	Сталь СПК	Чавун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Олег Володимирович
ЩЕСЮК,
Олег Федорович
ПРИЩЕПОВ,
Дмитро Анатолійович
ЛІСКОВ,
Володимир Миколайович
ШЕНКЕВИЧ

Прикладна механіка та основи конструювання (розділ «Опір матеріалів»)

Методичні вказівки

Випуск 408

Редактор *А. Бурмус.*
Технічний редактор *О. Петроченко.* Комп'ютерна верстка *Н. Кардаш.*
Друк *С. Волинець.* Фальцювально-палітурні роботи *О. Мішалкіна.*

Підп. до друку 11.01.2022.
Формат 60x84¹/₁₆. Папір офсет.
Гарнітура «Times New Roman». Друк ризограф.
Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 1,75.
Тираж 5 пр. Зам. № 6165.

Видавець і виготовлювач: ЧНУ ім. Петра Могили.
54003, м. Миколаїв, вул. 68 Десантників, 10.
Тел.: 8 (0512) 50–03–32, 8 (0512) 76–55–81, e-mail: rector@chmnu.edu.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6124 від 05.04.2018.